BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN COQUET

Sur l’équirépartition des suites à croissance lente et des suites non décroissantes

Bulletin de la S. M. F., tome 108 (1980), p. 251-258

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__251_0>

Bull. Soc. math. France,
108, 1980, p. 251-258.

SUR L'ÉQUIRÉPARTITION DES SUITES A CROISSANCE LENTE ET DES SUITES NON DÉCROISSANTES (*)

PAR

JEAN COQUET

[Valenciennes]

RÉSUMÉ. — Cet article est consacré à l'étude de la répartition modulo 1 des suites $x\Lambda$ où Λ est une suite d'entiers naturels, dans les cas où Λ est à croissance « lente » et où Λ est non décroissante.

On étudie essentiellement la répartition complète et la répartition uniforme.

SUMMARY. — Λ being a "slowly" increasing or a non decreasing sequence of natural integers, we investigate the distribution modulo 1 of the sequences $x\Lambda$. Mainly, completely equidistributed and well-distributed sequences are studied.

1. Introduction

1.1. Rappels

Différents auteurs ont examiné les rapports entre la croissance des suites de réels et leur répartition modulo 1. Rappelons deux résultats concernant les suites $x\Lambda$ où Λ est à valeurs entières.

Pour les suites à croissance « lente », Mendès-France a obtenu [11] :

THÉORÈME A. — *Soit* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ *telle que* $\varphi(n) \to_{n\to+\infty} +\infty$. *Il existe une suite* $\Lambda=(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'entiers naturels telle que :*

(1) $\lambda_n = O(\varphi(n))$, $n \to +\infty$ *et,*

(2) $(x\lambda_n)$ *soit équirépartie modulo* 1 *si et seulement si* $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Et, pour les suites non décroissantes, Dress a démontré [9] :

THÉORÈME B. — 1° *Soit* $(\lambda_n)_{n\in}$ *une suite non décroissante d'entiers naturels vérifiant* $\lambda_n = o(\log n)$ *lorsque n tend vers l'infini. Il n'existe aucun nombre réel x tel que la suite* $(x\lambda_n)$ *soit équirépartie modulo* 1.

(*) Texte reçu le 10 juillet 1978, révisé le 5 mars 1979.

J. COQUET, Centre universitaire de Valenciennes, Département de Mathématiques, Mont-Houy, Chemin-Vert, 59326 Valenciennes.

2° *Soit* $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ *telle que* $f(n).(\operatorname{Log} n)^{-1} \to_{n\to+\infty} +\infty$. *Il existe une suite non décroissante* (λ_n) *d'entiers naturels vérifiant* $\lambda_n = O(f(n))$ *lorsque n tend vers l'infini et telle que la suite* $(x\lambda_n)$ *soit équirépartie modulo* 1 *pour tout nombre irrationnel* x.

La suite construite par Mendès-France afin de démontrer le théorème A est q-additive [8]. Son équirépartition est nécessairement uniforme ([7], chap. 8). Elle ne peut donc être complète ([10], p. 45).

1.2. Les problèmes abordés

Un exemple de suite de réels complètement équirépartie modulo 1 a été donné par Bass lors d'un exposé [1] fait en 1972 à Paris. La construction réalisée utilisant une infinité de nombres rationnellement indépendants $\theta_k = \operatorname{Log} p_k$, p_k étant le k-ième nombre premier.

On se propose de donner une construction simple de suite complètement équirépartie modulo 1 ayant une croissance aussi lente qu'on veut, obtenant ainsi un résultat analogue au théorème A.

Au paragraphe 3, on étudie les suites non décroissantes : des résultats analogues au théorème B sont donnés concernant en particulier la répartition complète et la répartition uniforme.

2. Suites à croissance lente

2.1. Énoncé du résultat

THÉORÈME 1. — *Soit* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ *telle que* $\varphi(n) \to_{n\to+\infty} +\infty$. *Il existe une suite* (λ_n) *d'entiers naturels telle que :*

(1) $\lambda_n = O(\varphi(n))$, $n \to +\infty$ *et*,

(2) $(x\lambda_n)$ *soit complètement équirépartie modulo* 1 *si et seulement si* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2.2. Construction de Λ

Notons d'abord que, quitte à remplacer φ par ψ définie par

$$\psi(n) = \operatorname{Inf}_{k \geq n} \varphi(k),$$

on pcut supposer φ non décroissante.

La suite Λ est une suite additive « tronquée » : $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ désigne la suite croissante des nombres premiers; $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'entiers naturels satisfaisant aux conditions suivantes :

(C 1) $\lim_{k\to+\infty} \sigma_{k+1}.(\sigma_k)^{-1}=+\infty$,

(C 2) $\lim_{k\to+\infty} \sigma_k.(p_1 \ldots p_k)^{-1}=+\infty$,

(C 3) $K=O(\varphi(\sigma_K))$, $\quad K\to+\infty$.

Soit $J_k=[\sigma_k, \sigma_{k+1}[$. On définit Λ par blocs :

– si $0\leqslant n<\sigma_1$, $\lambda_n=0$;

– si $n\in J_K$, $K\in\mathbb{N}^*$, $\lambda_n=\sum_{1\leqslant k\leqslant K} \tau_k(n)$ où,

$$\tau_k(n)=\begin{cases}0 & \text{si } p_k \text{ ne divise pas } n;\\ 1 & \text{si } p_k \text{ divise } n.\end{cases}$$

Remarquons que (C 3) assure la condition (1) du théorème 1. En effet, si $n<\sigma_{K+1}$, $\lambda_n\leqslant K$.

2.3. Remarque préliminaire

Posons $e(t)=e^{2i\pi t}$ pour tout t réel. D'après le critère de Weyl, il s'agit de prouver que, quels que soient x irrationnel et le s-uple $(d_1, \ldots, d_s)\in\mathbb{Z}^s\setminus\{(0, \ldots, 0)\}$, la suite

$$n \mapsto g(n)=e(x\textstyle\sum_{j=1}^{s} d_j\lambda_{n+j-1})$$

a une valeur moyenne nulle sur $\mathbb{N}$.

Pour k assez grand, $\sigma_{k+1}\geqslant\sigma_k+s$. On pose alors $J_k^*=[\sigma_k, \sigma_{k+1}-s[$ de sorte que, si $n\in J_k^*$, $\{n, n+1, \ldots, n+s-1\}\subset J_k$.

Dans J_k^*, g a pour période $p_1 \ldots p_k$: soit μ_k sa valeur moyenne sur une telle période. Soit maintenant $N\in J_{K+1}$:

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{0\leqslant n\leqslant N} g(n)&=O(\sigma_K)+O(s)+\textstyle\sum_{n\in J_K^*} g(n)+\sum_{\sigma_{K+1}\leqslant n\leqslant N-s} g(n)\\ &=o(N)+\mu_K\,\sigma_{K+1}+\mu_{K+1}(N-\sigma_{K+1}),\end{aligned}$$

d'après les conditions (C 1) et (C 2). On est ramené à prouver que

$$\lim_{K\to+\infty} \mu_K=0.$$

2.4. Fin de la démonstration

Soient $p_1, \ldots, p_r$ les nombres premiers $\leqslant s$. Posons :

$$\gamma_k(n)=e\left(x\sum_{j=1}^{s} d_j\tau_k(n+j-1)\right) \text{ pour tout } k\in\mathbb{N}^*,$$

$$G_l(n)=\prod_{1\leqslant k\leqslant l}\gamma_k(n) \quad \text{et} \quad G_l^*(n)=\prod_{r<k\leqslant l}\gamma_k(n).$$

On suppose $K>r$. μ_K est la valeur moyenne de $G_K=G_r.G_K^*$. Puisque les périodes respectives de G_r et G_K^* sont des entiers premiers entre eux, $\mu_K=\mu_r.\mu_K^*$ où μ_K^* est la valeur moyenne de G_K^*, et il s'agit de montrer que $\lim_{K\to\infty}\mu_K^*=0$.

Si η_k est la valeur moyenne de γ_k, on a

$$\eta_k=\frac{1}{p_k}\sum_{1\leqslant m\leqslant p_k} e\left(x\sum_{j=1}^{s} d_j\tau_k(m+j-1)\right).$$

Si $k>r$, l'un au plus des nombres $m, m+1, \ldots, m+s-1$ est divisible par p_k donc

$$\eta_k=\frac{1}{p_k}\left(p_k-s+\sum_{j=1}^{s} e(xd_j)\right).$$

Puisque les périodes des γ_k sont deux à deux premières entre elles,

$$|\mu_K^*|^2=\prod_{r<k\leqslant K}|\eta_k|^2\leqslant\prod_{r<k\leqslant K}\left(1-\frac{4(p_k-s)}{p_k^2}.C\right),$$

où $C=\sum_{j=1}^{s}\sin^2(\pi xd_j)>0$ de sorte que

$$\lim_{K\to\infty}\mu_K^*=0.$$

2.5. Remarque

Soit q entier $\geqslant 2$. Λ étant la suite définie précédemment, soit a_n le reste de la division euclidienne de λ_n par q. Le nombre $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.q^{-n}$ est normal en base q ([10], [13]).

3. Les suites non décroissantes

3.1. Énoncés

Le premier énoncé concerne la corrélation des suites : pour les notions de corrélation, de suites pseudo-aléatoires, on peut se reporter aux articles [2], [3], [5] et [6].

THÉORÈME 2. — 1° *soit* (λ_n) *une suite non décroissante d'entiers vérifiant* $\lambda_n = o(n)$. *Il n'existe aucun nombre réel x tel que la suite* $(e(x\lambda_n))$ *soit pseudo-aléatoire;*

2° *il existe une suite* (λ_n) *non décroissante d'entiers vérifiant* $\lambda_n = O(n)$ *et telle que, pour tout x non entier, la suite* $(e(x\lambda_n))$ *soit pseudo-aléatoire au sens de Bertrandias, et non au sens de Bass;*

3° *il existe une suite* (λ_n) *non décroissante d'entiers vérifiant* $\lambda_n = O(n)$ *et telle que, pour tout x non entier, la suite* $(e(x\lambda_n))$ *soit pseudo-aléatoire au sens de Bass;*

4° *soit* (λ_n) *une suite non décroissante d'entiers vérifiant* $\lambda_n = O(n)$. *Pour tout réel x, il existe un entier naturel d non nul tel que la suite* $(e(xd\lambda_n))$ *ait une corrélation (si celle-ci existe) non identiquement nulle.*

A l'aide du théorème 1 et du théorème 2, 4°, on obtient :

THÉORÈME 3. — 1° *soit* (λ_n) *une suite non décroissante d'entiers vérifiant* $\lambda_n = O(n)$. *Il n'existe aucun nombre réel x tel que la suite* $(x\lambda_n)$ *soit complètement équirépartie modulo* 1;

2° *soit* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ *telle que* $\varphi(n) \to_{n\to+\infty} +\infty$. *Il existe une suite* (λ'_n) *non décroissante d'entiers vérifiant* $\lambda'_n = O(n\varphi(n))$ *et telle que, pour tout x irrationnel, la suite* $(x\lambda'_n)$ *soit complètement équirépartie modulo* 1.

Enfin, pour la répartition uniforme, on démontre :

THÉORÈME 4. — 1° *Soit* (λ_n) *une suite non décroissante d'entiers vérifiant* $\lambda_n = o(n)$. *Il n'existe aucun nombre réel x tel que la suite* $(x\lambda_n)$ *soit uniformément équirépartie modulo* 1; 2° *il existe une suite* (λ_n) *non décroissante d'entiers vérifiant* $\lambda_n = O(n)$ *et telle que, pour tout x irrationnel, la suite* $(x\lambda_n)$ *soit uniformément équirépartie modulo* 1.

3.2. Preuve du théorème 2, 1°

On montre que la suite $(e(x\lambda_n))$ a une corrélation γ telle que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\gamma(m) = 1$. Soit $h \in \{0, \ldots, m-1\}$.

L'hypothèse $\lambda_n = o(n)$ et la croissance de (λ_n) impliquent que

$$\operatorname{Card}\{n < m\mathrm{N}/n \equiv h \bmod m \text{ et } \lambda_{n+m} - \lambda_n > 0\} = o(N).$$

Donc

$$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \frac{1}{mN} \sum_{0 \leqslant n < mN,\, n \equiv h \bmod m} e(x(\lambda_{n+m} - \lambda_n)) = \frac{1}{m}$$

et,

$$\gamma(m)=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{mN}\sum_{0\leqslant n<mN}e(x\lambda_{n+m})\,e(-x\lambda_n)=1.$$

3.3. Preuve du théorème 2, 2°

Soit q entier naturel $\geqslant 2$. Posons $\lambda_n=\sum_{r=0}^{+\infty}[n.q^{-r}]$ où, pour tout t réel, $[t]=\operatorname{Max}\{n\in\mathbb{Z},\ n\leqslant t\}$: (λ_n) est non décroissante, $\lambda_n\leqslant(q/(q-1))n$; (λ_n) est une suite q-additive : le fait que $(e(x\lambda_n))$ soit pseudo-aléatoire au sens de Bertrandias lorsque x est non entier, est une conséquence immédiate des résultats donnés dans [5].

Enfin, aucune suite q-multiplicative de module 1 n'est pseudo-aléatoire au sens de Bass ([7], p. 31).

3.4. Preuve du théorème 2, 3°

Soit $(s_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers naturels deux à deux premiers entre eux et telle que $\sum_{k=1}^{+\infty}1/s_k<+\infty$. On pose $\lambda_n=\sum_{k=1}^{+\infty}[n/s_k]$.

Dans l'article [6], on montre que pour tout nombre réel x, la suite $(e(x\lambda_n))$ possède une corrélation γ telle que

$$|\gamma(t)|^2=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-4\left\{\frac{t}{s_k}\right\}\left(1-\left\{\frac{t}{s_k}\right\}\right)\sin^2\pi x\right).$$

où $\{y\}=y-[y]$ pour tout y réel.

Faisons l'hypothèse supplémentaire que

$$\operatorname{Card}\{k\in\mathbb{N}/T\leqslant s_k\leqslant 2T\}\to_{T\to+\infty}+\infty.$$

On voit que, pour x non entier

$$|\gamma(t)|^2\leqslant\prod_{k\in\mathbb{N}^*,\,3t/2\leqslant s_k\leqslant 3t}\left(1-\frac{4t}{s_k}\left(1-\frac{t}{s_k}\right)\sin^2\pi x\right)$$

$$\leqslant\prod_{k\in\mathbb{N}^*,\,3t/2\leqslant s_k\leqslant 3t}\cdot\left(1-\frac{8}{9}\sin^2\pi x\right)\to_{t\to+\infty}0.$$

Donc, dans ce cas, $(e\,(x\lambda_n))$ est pseudo-aléatoire au sens de Bass.

3.5. Preuve du théorème 2, 4°

Il existe $A>0$ tel que $\lambda_n\leqslant An$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Donc,

$$\operatorname{Card}\{n\in\mathbb{N}/0\leqslant n<N\text{ et }\lambda_{n+1}-\lambda_n>A/\varepsilon\}<\varepsilon N.$$

Fixons $\varepsilon\in]0, 1/4[$. Pour tout x réel, il existe $d\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$\|xd\|<\frac{\varepsilon^2}{2\pi A} \qquad \text{où} \quad \|y\|=\mathrm{Min}_{n\in Z}\,|y-n|.$$

Alors, si $\lambda_{n+1}-\lambda_n\leqslant A/\varepsilon$,

$$|e(xd\lambda_{n+1})\,e(-xd\lambda_n)-1|<\varepsilon.$$

D'où il résulte que

$$\left|\sum\nolimits_{0\leqslant n<N} e(xd\lambda_{n+1})\,e(-xd\lambda_n)-N\right|<3N\varepsilon<\frac{3N}{4}.$$

Donc,

$$\limsup_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\left|\sum\nolimits_{0\leqslant n<N} e(xd\lambda_{n+1})\,e(-xd\lambda_n)\right|>\frac{1}{4}.$$

Et, si la corrélation γ de $(e\,(xd\lambda_n))$ existe, $\gamma\,(1)\neq 0$.

3.6. Preuve du théorème 3, 1°

Si la suite $(x\lambda_n)$ était complètement équirépartie, la suite $(x\lambda_{n+1}-x\lambda_n)$ serait équirépartie. C'est impossible d'après ce qu'on vient de voir au 3.5.

3.7. Preuve du théorème 3, 2°

On peut supposer φ non décroissante. Soit (λ_n) la suite construite pour démontrer le théorème 1. On pose

$$\lambda'_n=\sum\nolimits_{0\leqslant m<n}\lambda_m$$

(λ'_n) est une suite d'entiers non décroissante. Il existe $A>0$ telle que

$$\lambda'_n\leqslant A\sum\nolimits_{1\leqslant m<n}\varphi(m)\leqslant An\,\varphi(n).$$

Enfin, d'après le théorème de van der Corput, $(x\lambda'_n)$ est complètement équirépartie modulo 1 pour tout x irrationnel.

3.8. Preuve du théorème 4, 1°

Soit $j\in\mathbb{N}^*$. On sait qu'il existe $N_0\in\mathbb{N}$ tel que

$$N\geqslant N_0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_N<\frac{N}{2j}.$$

Donc,

$$\mathrm{Card}\,\{n\in\mathbb{N}/0\leqslant n<N/\lambda_{n+1}>\lambda_n\}<\frac{N}{2j} \qquad \text{pour} \quad N\geqslant N_0.$$

Soit N_1 le plus petit entier $\geqslant N_0$ et divisible par j.
Si $I_a=[aj, (a+1)j[$, $[0, N_1[=\bigcup_{0\leqslant a<N_1/j} I_a$.
Il existe au moins un intervalle I_a sur lequel (λ_n) est constante. Ceci contredit l'uniforme équirépartition de $(x\lambda_n)$.

3.9. Preuve du théorème 4, 2°

$\lambda_n=n$ convient bien sûr. Remarquons toutefois que la suite q-additive $\lambda_n=\sum_{r=0}^{+\infty}[n.q^{-r}]$ possède la propriété supplémentaire suivante : pour tout x irrationnel, la suite $(x\lambda_n)_{n\in\mathscr{C}}$ est équirépartie modulo 1 quelle que soit la suite $\mathscr{C}\subset\mathbb{N}$ à caractère presque-périodique de densité non nulle ([4], [12], [13]). Ceci résulte du fait que, pour tout $d\in\mathbb{N}^*$, $(e(xd\lambda_n))$, suite pseudo-aléatoire, a un spectre de Fourier-Bohr vide ([5], [12], [13]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bass (J.). — Construction d'une suite complètement équirépartie modulo 1. Applications, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou*, Paris, 1972-1973, exposé 6.

[2] Bass (J.). — Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires, *Bull. Soc. Math. France*, t. 87, 1959, p. 1-64.

[3] Bertrandias (J. P.). — Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p, *Bull. Soc. Math. France*, mémoire 5, 1966, p. 1-106.

[4] Besineau (J.). — Ensembles d'entiers à c.p.p. et équirépartition, *Lecture notes* 475, 1975, p. 1-12.

[5] Coquet (J.) et Mendes-France (M.). — Suites à spectre vide et suites pseudo-aléatoires, *Acta Arithmetica*, 32, 1977, p. 99-106;

[6] Coquet (J.). — Sur certaines suites pseudo-aléatoires, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 40, 1978, p. 229-235.

[7] Coquet (J.). — Contribution à l'étude harmonique de suites arithmétiques, *Thèse d'État*, Orsay, décembre 1978.

[8] Delange (H.). — Sur les fonctions q-additives ou q-multiplicatives, *Acta Arithmetica*, 21, 1972, p. 285-298.

[9] Dress (F.). — Sur l'équirépartition de certaines suites $(x\lambda_n)$, *Acta Arithmetica*, 14, 1968, p. 169-175.

[10] Kuipers (L.) et Niederreiter (H.). — *Uniform distribution of sequences*, Wiley, Interscience.

[11] Mendes-France (M.). — Deux remarques concernant l'équirépartition des suites, *Acta Arithmetica*, 14, 1968, p. 163-167.

[12] Mendes-France (M.). — Les suites à spectre vide et la répartition modulo 1, *J. Number Theory*, 5, 1973, p. 1-15.

[13] Rauzy (G.). — Propriétés statistiques de suites arithmétiques, P.U.F., collection Sup *Le Mathématicien*, n° 15.