

BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHÈLE MASTRANGELO

Différentiabilité fine et différentiabilité sur des compacts

Bulletin de la S. M. F., tome 108 (1980), p. 3-15

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__3_0

© Bulletin de la S. M. F., 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DIFFÉRENTIABILITÉ FINE ET DIFFÉRENTIABILITÉ SUR DES COMPACTS

PAR

MICHÈLE MASTRANGELO (*)

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous considérons la théorie du potentiel newtonien sur \mathbb{R}^d . Soient A un ouvert fin de \mathbb{R}^d , et f une fonction définie sur A à valeurs dans \mathbb{R} . Nous disons que f est finement différentiable en un point x appartenant à A , de différentielle $\nabla f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un temps d'arrêt T_ε , \mathbb{P}^x -presque sûrement strictement positif tel que, pour tout temps d'arrêt $S \leq T_\varepsilon$, on ait

$$\mathbb{E}^x \left[\frac{|f \circ X(S) - f(x) - \nabla f(x)[X(S) - x]|}{\|X(S) - x\|} \right] < \varepsilon,$$

où le processus X est le brownien standard dans \mathbb{R}^d .

Nous démontrons que, si f est finement différentiable sur un ouvert fin A , alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset A$, tel que la mesure de Lebesgue de $A \setminus K_\varepsilon$ soit majorée par ε et sur lequel f est différentiable, les deux différentielles ainsi obtenues étant égales.

ABSTRACT. — In this paper, we consider the theory of the newtonian potential on \mathbb{R}^d . Let A be a finely open set of \mathbb{R}^d , and f a real valued function on A . We say that f is finely differentiable at point x of A , of differential $\nabla f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ if, for all real $\varepsilon > 0$, there exists a stopping time T_ε , \mathbb{P}^x -almost everywhere strictly positive such that, for all stopping time $S \leq T_\varepsilon$, one has

$$\mathbb{E}^x \left[\frac{|f \circ X(S) - f(x) - \nabla f(x)[X(S) - x]|}{\|X(S) - x\|} \right] < \varepsilon,$$

where X is the brownian process on \mathbb{R}^d .

We demonstrate that, if f is finely differentiable on a finely open set A , there exists, for all real $\varepsilon > 0$, a compact set $K_\varepsilon \subset A$, such that the Lebesgue measure of $A \setminus K_\varepsilon$ is majorised by ε and on which f is differentiable, the two differentials thus obtained being equal.

(*) Texte reçu le 7 novembre 1978, révisé le 7 mai 1979.

Michèle MASTRANGELO, Équipe d'analyse, Tour 46, université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

DÉFINITION. — Dans ce travail, nous disons qu'une fonction f , presque-borélienne [4], définie sur un ouvert fin A de \mathbb{R}^d et à valeurs dans \mathbb{R} , est finement différentiable en un point x de A , de différentielle $\nabla f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un temps d'arrêt T_ε , \mathbb{P}^x -presque sûrement strictement positif, tel que, pour tout temps d'arrêt $S \leq T_\varepsilon$, on ait

$$\mathbb{E}^x \left[\frac{|f \circ X(S) - f(x) - \nabla f(x)[X(S) - x]|}{\|X(S) - x\|} \right] < \varepsilon.$$

REMARQUE 1. — Si A est ouvert et si f est différentiable en $x \in A$, alors elle y est finement différentiable.

Démonstration. — Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage compact de x , $V(x, \varepsilon)$, tel que, pour tout $y \in V(x, \varepsilon)$,

$$\frac{|f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y - x]|}{\|y - x\|} < \varepsilon.$$

Notant T_ε le temps d'entrée dans le complémentaire de $V(x, \varepsilon)$, nous voyons que f est finement différentiable en x .

PROPOSITION 2. — Si f est finement différentiable sur un ouvert fin A , elle y est finement continue et, par conséquent, elle est mesurable pour la mesure de Lebesgue.

Démonstration. — Soit x un point de A , alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un temps d'arrêt T_ε , \mathbb{P}^x -presque sûrement strictement positif tel que, pour tout temps d'arrêt $S \leq T_\varepsilon$, on ait

$$\mathbb{E}^x \left[\frac{|f \circ X(S) - f(x) - \nabla f(x)[X(S) - x]|}{\|X(S) - x\|} \right] < \varepsilon.$$

Supposons f non finement continue en x ; il existerait alors un réel $\alpha > 0$ et un borélien B , finement adhérent à x , tels que, pour tout $y \in B$, on ait

$$|f(y) - f(x)| > \alpha.$$

Comme B est finement adhérent à x , \mathbb{P}^x -presque sûrement,

$$T_B = 0 = \inf \{ T_K; K \text{ compact } \subset B \}.$$

Soient ε un réel strictement inférieur à $\alpha/4$, et S un temps d'arrêt inférieur à T_ε et au temps d'entrée dans le complémentaire de la boule de rayon

$$\rho = \inf (1, \alpha/2 \|\nabla f(x)\|) \quad \text{si } \|\nabla f(x)\| > 0, \\ \rho = 1 \quad \text{si } \nabla f(x) = 0.$$

Il existe alors un compact $K \subset B$ tel que

$$\mathbb{P}^x(\{T_K < S\}) > 2^{-1}.$$

Nous notons R le temps d'arrêt, $R = S \wedge T_K < T_{\alpha/4}$, et nous voyons que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x \left[\frac{|f \circ X(R) - f(x) - \nabla f(x)[X(R) - x]|}{\|X(R) - x\|} \right] \\ \geq \mathbb{E}^x[|f \circ X(R) - f(x) - \nabla f(x)[X(R) - x]|] \\ \geq \mathbb{E}^x[|f \circ X(R) - f(x) - \nabla f(x)[X(R) - x]| \cdot \mathbf{1}_{\{X(R) \in B\}}]. \end{aligned}$$

— si $\nabla f(x) \neq 0$,

$$\begin{aligned} \geq \mathbb{E}^x[\alpha - \|\nabla f(x)\| \cdot \text{sup ess} \|X(R) - x\| \cdot \mathbf{1}_{\{X(R) \in B\}}] \\ \geq \frac{1}{2} \left| \alpha - \|\nabla f(x)\| \frac{\alpha}{2\|\nabla f(x)\|} \right| \geq \frac{\alpha}{4}, \end{aligned}$$

— et si $\nabla f(x) = 0$,

$$\geq \frac{1}{2} \alpha.$$

On obtient une impossibilité. La fonction f est finement continue en x .

D'après un résultat de FUGLÈDE [2], une fonction finement continue est de première classe de Baire; elle est, par conséquent, mesurable pour la mesure de Lebesgue.

THÉORÈME 3. — Soit f une fonction définie sur un ouvert fin A , finement différentiable en un point $x \in A$. Pour tout réel $\alpha > 0$, il existe un voisinage fin de x , $V(x, \alpha)$, tel que, pour tout y appartenant à $V(x, \alpha)$, on ait

$$|f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y - x]| < \alpha \|y - x\|.$$

Remarque relative au théorème 3. — Nous pourrions, *a priori*, penser qu'une formulation, un peu plus restrictive de la différentiabilité fine, puisse permettre d'obtenir une différentiabilité suivant la définition de Whitney qui s'exprimerait ici de la manière suivante : pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage fin de x , $V(x, \varepsilon)$, tel que, pour tout (y, z) appartenant à $V(x, \varepsilon) \times V(x, \varepsilon)$, on ait

$$|f(y) - f(z) - \nabla f(x)[y - z]| < \alpha \|y - z\|.$$

La notion qui semblerait alors adéquate serait la suivante : f serait dite finement différentiable si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un temps d'arrêt T_ε ,

\mathbb{P}^x -strictement positif tel que tout couple (S, Σ) de temps d'arrêts vérifiant, \mathbb{P}^x presque sûrement, $0 \leq \Sigma < S \leq T_\varepsilon$ satisfasse à

$$\mathbb{E}^x \left[\frac{|f \circ X(S) - f \circ X(\Sigma) - \nabla f(x)[X(S) - X(\Sigma)]|}{\|X(S) - X(\Sigma)\|} \right] < \varepsilon.$$

Cependant le raisonnement du théorème 3 ne permettrait pas alors d'obtenir une différentiabilité suivant WHITNEY; en effet, posant

$$\Phi(y, z) = \frac{|f(y) - f(z) - \nabla f(x)[y - z]|}{\|y - z\|},$$

le fait que \limsup fine $\Phi(y, z)$, pour $y \rightarrow x$, $z \rightarrow x$, $y \neq z$, soit non nulle, n'implique nullement l'existence de deux boréliens $N(x)$ et $P(x)$, tous deux finement adhérents à x , et tels que

$$\forall y \in N(x), \quad \forall z \in P(x), \quad \text{on ait } \Phi(y, z) \geq \alpha.$$

Démonstration. — Si l'énoncé de ce théorème était faux, il existerait un réel $\alpha > 0$ tel que

$$B = \{y \in A; |f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y - x]| \geq \alpha \|y - x\|\}$$

soit finement adhérent à x .

Nous aurions alors, \mathbb{P}^x -presque sûrement,

$$T_B = 0 = \inf \{T_K; K \text{ compact } \subset B\}.$$

Nous considérons un temps d'arrêt $S \leq T_{\alpha/2}$. Il existe un compact $K \subset B$ tel que

$$\mathbb{P}^x(\{S \wedge T_K = T_K\}) > 2^{-1}.$$

Nous notons $R = S \wedge T_K < T_{\alpha/2}$, et nous voyons que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x \left[\frac{|f \circ X(R) - f(x) - \nabla f(x)[X(R) - x]|}{\|X(R) - x\|} \right] \\ \geq \mathbb{E}^x \left[\frac{|f \circ X(R) - f(x) - \nabla f(x)[X(R) - x]|}{\|X(R) - x\|} \cdot \mathbf{1}_{\{X(R) \in B\}} \right] \geq \alpha/2. \end{aligned}$$

Nous obtenons une contradiction avec le fait que R est majoré par $T_{\alpha/2}$; d'où nous déduisons le théorème 3.

PROPOSITION 4. — *Soit f une fonction définie sur un ouvert fin A , et finement différentiable en un point x de A , alors la différentielle $\nabla f(x)$ est unique.*

Démonstration. — Soit $\nabla f(x)$ et $Df(x)$ deux différentielles fines de f en x . Pour tout réel $\alpha > 0$, d'après le théorème 3, on peut déterminer des voisinages fins $V(x, \alpha)$ et $W(x, \alpha)$ tels que

$$\forall y \in V(x, \alpha), \quad \frac{|f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y-x]|}{\|y-x\|} < \alpha$$

et

$$\forall y \in W(x, \alpha), \quad \frac{|f(y) - f(x) - Df(x)[y-x]|}{\|y-x\|} < \alpha.$$

On peut en déduire que, pour tout y appartenant à $V(x, \alpha) \cap W(x, \alpha)$, on a

$$\frac{|[Df(x) - \nabla f(x)][y-x]|}{\|y-x\|} < 2\alpha.$$

Or $V(x, \alpha) \cap W(x, \alpha)$ est un voisinage fin de x , par conséquent l'ensemble des $(y-x)/\|y-x\|$, où y décrit $V(x, \alpha) \cap W(x, \alpha)$, est dense (pour la norme de \mathbb{R}^d) dans la sphère unité; on peut conclure que, pour tout réel $\alpha > 0$, la norme de l'opérateur $[Df(x) - \nabla f(x)]$ est majorée par 2α , et $Df(x) = \nabla f(x)$.

Lors de travaux antérieurs [3], j'ai utilisé la notion de différentiabilité stochastique qui se définit de la manière suivante : Soit f une fonction définie sur un ouvert fin $A \subset \mathbb{R}^d$; nous disons que f est stochastiquement différentiable en un point $x \in A$, de différentielle $\nabla f(x)$ appartenant à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un temps d'arrêt T_ε , \mathbb{P}^x -presque sûrement strictement positif, pour lequel tout temps d'arrêt $S \leq T_\varepsilon$ vérifie

$$\mathbb{E}^x [|f \circ X(S) - f(x) - \nabla f(x)[X(S) - x]|^2] < \varepsilon \mathbb{E}^x(S).$$

Comme corollaire du théorème 3, nous pouvons démontrer que la différentiabilité fine implique la différentiabilité stochastique et que les deux différentielles sont égales.

PROPOSITION 5. — *Soit f une fonction définie sur un ouvert fin A , finement différentiable en un point $x \in A$, alors f est stochastiquement différentiable en x et les deux différentielles fine et stochastique sont égales.*

Démonstration. — D'après le théorème 3, nous savons que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage fin compact de x , $V(x, \varepsilon)$, tel que, pour tout $y \in V(x, \varepsilon)$, nous ayons

$$|f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y-x]| < \varepsilon \|y-x\|.$$

Si S est un temps d'arrêt majoré par $T_\varepsilon = T_{CV(x, \varepsilon)}$, alors, pour presque toute trajectoire, nous avons

$$\|f \circ X(S) - f(x) - \nabla f(x)[X(S) - x]\| < \varepsilon \|X(S) - x\|.$$

En élevant au carré, et en intégrant par rapport à \mathbb{P}^x , nous voyons que

$$\mathbb{E}^x[\|f \circ X(S) - f(x) - \nabla f(x)[X(S) - x]\|^2] < \varepsilon^2 \mathbb{E}^x(S).$$

Par suite, f est stochastiquement différentiable en x , et la différentielle stochastique est égale à la différentielle fine.

Nous allons maintenant établir un raffinement du théorème 3, et montrer que, si f est finement différentiable en $x \in A$, il existe un ensemble M_x , effilé en x , tel que $(f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y - x]) / \|y - x\|$ converge vers zéro lorsque y tend vers x , au sens de la norme, sur $A \setminus M_x$.

THÉORÈME 6. — *Soit f une fonction définie sur un ouvert fin A et finement différentiable en un point x de A . Il existe un ensemble M_x , effilé en x , tel que $\nabla f(x)$ soit la différentielle de x , au sens de la norme, sur $A \setminus M_x$, c'est-à-dire : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\rho(\varepsilon) > 0$ tel que, pour tout $y \in [A \cap B(x, \rho(\varepsilon))] \setminus M_x$, $(\|f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y - x]\|) / \|y - x\|$ soit majoré par ε .*

Démonstration. — Sur A , nous considérons la fonction

$$\Phi = \left(y \mapsto \frac{\|f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y - x]\|}{\|y - x\|} \right) \quad \text{si } y \neq x,$$

$$\Phi(x) = 0.$$

Cette fonction est finement continue (en y) et converge vers zéro, lorsque y tend finement vers x .

Utilisant l'assertion (b) du théorème T.72 de [4], nous pouvons déduire qu'il existe un ensemble M_x , effilé en x tel que Φ converge vers zéro, lorsque y tend vers x , au sens de la norme, dans $A \setminus M_x$.

THÉORÈME 7. — *Soit f une fonction définie et finement différentiable sur un ouvert fin A . Alors son gradient fin, ∇f , est mesurable pour la mesure de Lebesgue sur A .*

Démonstration. — Utilisant le théorème 6, nous allons établir que les dérivées partielles $\partial f / \partial e = \nabla f \cdot e$ (e vecteur unitaire de \mathbb{R}^d) sont mesurables.

Nous notons $\Delta(e)$ un ouvert (pour la norme), non effilé en 0 et tel que $\|y \cdot e\| / \|y\|$ tende vers 1, quand y converge vers zéro, y appartenant à $\Delta(e)$.

Un tel ouvert existe toujours. Dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , on peut, par exemple, prendre

$$\Delta(e) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d, \|y\| < 1 \text{ et } \frac{\|y\| - |y \cdot e|}{\|y\|^2} < 1 \right\}.$$

Nous notons Ω l'ensemble des trajectoires browniennes, et nous introduisons les fonctions φ , définies sur $A \times \Omega \times \mathbb{R}_+^*$ par

$$\varphi(x, \omega, t) = \begin{cases} \frac{f[X_\omega(t) + x] - f(x)}{X_\omega(t) \cdot e} & \text{si} \\ & X_\omega(t) + x \in [\Delta(e) + x] \cap A, \\ 0 & \text{si } X_\omega(t) + x \notin [\Delta(e) + x] \cap A. \end{cases}$$

L'application $(\omega \mapsto X_\omega(t))$ est \mathbb{P}^0 -mesurable, par suite $((x, \omega) \mapsto X_\omega(t) + x)$ est $(dx \times \mathbb{P}^0)$ -mesurable.

Or f est de première classe de Baire, car elle est finement continue, par suite

$$((x, \omega) \mapsto f[X_\omega(t) + x] - f(x))$$

est $(dx \times \mathbb{P}^0)$ -mesurable.

De même, $(\omega \mapsto X_\omega(t) \cdot e)$ est \mathbb{P}^0 -mesurable, et $\mathbf{1}_{\{X_\omega(t) + x \in [\Delta(e) + x] \cap A\}}$ est $(dx \times \mathbb{P}^0)$ -mesurable. On peut donc conclure que, t étant fixé, $((x, \omega) \mapsto \varphi(x, \omega, t))$ est $(dx \times \mathbb{P}^0)$ -mesurable.

Or, pour \mathbb{P}^0 -presque chaque trajectoire, le temps d'entrée de $X_\omega + x$ dans M_x est strictement positif. Il existe donc un réel $\rho(\omega) > 0$ tel que, pour tout $t > 0$ et $t < \rho(\omega)$, $X_\omega(t) + x$ appartienne à $A \setminus M_x$.

Nous voyons alors que, lorsque t tend vers zéro,

$$\lim_{t \rightarrow 0, (X_\omega(t) + x) \in [\Delta(e) + x]} \varphi(x, \omega, t) = \frac{\partial f}{\partial e}(x) = \nabla f(x) \cdot e$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0, (X_\omega(t) + x) \notin [\Delta(e) + x]} \varphi(x, \omega, t) = 0.$$

Comme, \mathbb{P}^0 -presque sûrement, le temps d'entrée de $X_\omega + x$ dans $\Delta(e) + x$ est nul, et comme $\Delta(e) + x$ est ouvert, il existe une suite (t_n) de rationnels strictement positifs, t_n tendant vers zéro, tels que, pour tout n , $(X_\omega(t_n) + x)$ appartienne à $[\Delta(e) + x] \cap [A \setminus M_x]$.

Nous pouvons en déduire que, \mathbb{P}^0 -presque sûrement,

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x) = \limsup \varphi(x, \omega, t) + \liminf \varphi(x, \omega, t).$$

$$(t \rightarrow 0, t \in \mathbb{Q}_+^*).$$

L'une des deux limites étant égale à $\partial f / \partial e(x)$ et l'autre étant nulle, suivant le signe de $\partial f / \partial e(x)$.

Les deux fonctions

$$\limsup \varphi(x, \omega, t) \quad (t \rightarrow 0, t \in \mathbb{Q}_+^*)$$

et

$$\liminf \varphi(x, \omega, t) \quad (t \rightarrow 0, t \in \mathbb{Q}_+^*),$$

sont, toutes deux, $(dx \times \mathbb{P}^0)$ -mesurables; la fonction $\partial f / \partial e(x)$ est donc égale, \mathbb{P}^0 -presque sûrement à une fonction $(dx \times \mathbb{P}^0)$ -mesurable, qui est alors, nécessairement, \mathbb{P}^0 -presque sûrement constante sur les $\{x\} \times \Omega$.

La fonction

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x) = \mathbb{P}^0 [\limsup_{t \rightarrow 0, t \in \mathbb{Q}_+^*} \varphi(x, \omega, t) + \liminf_{t \rightarrow 0, t \in \mathbb{Q}_+^*} \varphi(x, \omega, t)],$$

est donc mesurable pour la mesure de Lebesgue sur A .

Construction explicite d'ensembles effilés $M(x)$. — Soient x un point de A et n un entier; nous notons

$$A_n = \{y \in A; \|y - x\|^{-1} |f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y - x]| > n^{-1}\}.$$

Soit p un réel strictement positif fixé, nous notons e_C^p le potentiel d'équilibre de C , enveloppe inférieure régularisée de l'ensemble des fonctions p -excessives qui majorent 1 sur C .

L'ensemble A_n est effilé en x , par suite, d'après le lemme XV, T. 69 de [4] :

$$\lim_{r \rightarrow 0} e_{A_n \cap B(x, r)}^p(x) = 0.$$

Nous désignons par r_n le réel

$$r_n = \inf [1, \sup \{r > 0; e_{A_n \cap B(x, r)}^p(x) < 2^{-n-2}\}].$$

Nous notons

$$M_1(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [A_n \cap B(x, r_n)].$$

Nous écrivons λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d .

PROPOSITION 8. — L'ensemble

$$\mathcal{R} = \{r > 0, \forall r' \leq r, \lambda[M_1(x) \cap B(x, r')] \leq 2^{-1} \lambda[B(x, r')]\}$$

est non vide.

Désignant par ρ la borne supérieure de \mathcal{R} , l'ensemble $M(x) = M_1(x) \cap B(x, \rho)$ est alors un ouvert fin effilé en x , vérifiant l'énoncé du théorème 6 et tel que, pour tout $\alpha > 0$,

$$\lambda[M(x) \cap B(x, \alpha)] \leq 2^{-1} \lambda[B(x, \alpha)].$$

Démonstration. — D'après la sous-additivité des réduites,

$$e^p_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [A_n \cap B(x, r_n)]}(x) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n-2} < 1.$$

Ceci implique, d'après la remarque XV 65, (b) de [4], que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [A_n \cap B(x, r_n)]$ est effilé en x .

Par ailleurs, la définition de $M_1(x)$ implique que le rapport

$$\|y-x\|^{-1} |f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y-x]|$$

converge vers zéro avec $\|y-x\|$, lorsque y reste dans $A \setminus M_1(x)$. Comme $M_1(x)$ est effilé en x , x est point de densité de $A \setminus M_1(x)$; par conséquent,

$$(\lambda[B(x, r)])^{-1} \cdot \lambda[M_1(x) \cap B(x, r)],$$

converge vers zéro avec r , et l'ensemble \mathcal{R} est bien non vide. L'assertion de la proposition 8 se déduit alors de manière immédiate.

PROPOSITION 9. — Soit f une fonction définie et finement différentiable sur un ouvert fin A . Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un compact $L = L(\varepsilon) \subset A$, tel que la mesure de Lebesgue de $A \setminus L$ soit majorée par ε , sur lequel f et ∇f soient continues et tel que, $\forall \alpha > 0, \exists \eta = \eta(\alpha) > 0, \forall x \in L, \forall y \in B(x, \eta) \setminus M(x)$:

$$\|y-x\|^{-1} |f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y-x]| < \alpha.$$

Démonstration. — Pour tout entier $m \geq 1$ et tout $x \in A$, il existe un réel $\eta(x, m) > 0$ tel que, pour tout $y \in B[x, \eta(x, m)] \setminus (M(x) \cup \{x\})$, on ait

$$\|y-x\|^{-1} |f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y-x]| < m^{-1}.$$

Comme f et ∇f sont mesurables sur A , utilisant la caractérisation de Lusin, nous pouvons, pour tout $\varepsilon > 0$, déterminer un compact $J \subset A$, tel que la mesure de $A \setminus J$, soit majorée par $\varepsilon/2$ et sur lequel f et ∇f soient continues.

Pour tout entier $m \geq 1$ et tout réel $\eta > 0$, nous notons

$$Q(m, \eta) = \{x \in J, \forall y \in B(x, \eta) \setminus (M(x) \cup \{x\}), \\ \|y-x\|^{-1} |f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y-x]| < m^{-1}\}.$$

Nous voyons que

$$J \setminus Q(m, \eta) = \{x \in J, \exists y \in B(x, \eta) \setminus (M(x) \cup \{x\}), \\ \|y-x\|^{-1} |f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y-x]| \geq m^{-1}\}.$$

Dans $J \times J \times J = J^3$, nous considérons l'ensemble

$$\Lambda = \{x \in J, y \in B(x, \eta) \setminus (M(x) \cup \{x\}), \\ z \in \{\|y-x\|^{-1} |f(y) - f(\cdot) - \nabla f(\cdot)[y-x]| \geq m^{-1}\}\}.$$

D'après la construction de $M(x)$, donnée à la proposition 8, et la mesurabilité de f et ∇f , Λ est borélien dans l'ensemble produit $J \times J \times J = J^3$. Nous notons P l'hyperplan $\{x=z\}$. Nous voyons que $J \setminus Q(m, \eta)$ est la projection sur la première coordonnée de $\Lambda \cap P$. Par suite $J \setminus Q(m, \eta)$ est mesurable, et $Q(m, \eta)$ est aussi mesurable pour la mesure de Lebesgue.

Comme $\bigcup_{\eta > 0} Q(m, \eta) = J$, on peut, pour tout $m \in \mathbb{N}$, déterminer un réel $\eta(m) > 0$, tel que la mesure de Lebesgue de $J \setminus Q(m, \eta(m))$ soit majorée par $\varepsilon \cdot 2^{-m-2}$. Notant ensuite $Q = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} Q(m, \eta(m))$, la mesure de $A \setminus Q$ est majorée par ε . L'ensemble Q contient un compact $L = L(\varepsilon)$ tel que la mesure de Lebesgue de $A \setminus L$ soit encore majorée par ε et sur lequel l'énoncé de la proposition 9 est vrai.

THÉORÈME 10. — *Soit f une fonction définie et finement différentiable sur un ouvert fin $A \subset \mathbb{R}^d$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K = K(\varepsilon)$, contenu dans A , tel que la mesure de Lebesgue de $A \setminus K$ soit majorée par ε et tel que la restriction de f à K soit différentiable.*

Démonstration. — Nous reprenons les notations des propositions 8 et 9. L'ensemble des points de L qui ne sont pas des points de densité pour L est négligeable pour la mesure de Lebesgue. Nous désignons par $K = K(\varepsilon)$ un compact, contenu dans l'ensemble des points de densité de L et tel que la mesure de Lebesgue de $A \setminus K$ soit majorée par ε .

Pour établir la différentiabilité de la restriction de f à K , il suffit de montrer que la restriction f/L est différentiable en tout point de K .

Si f/L n'était pas différentiable en un point $x \in K$, il existerait un réel $\alpha > 0$ et une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, contenue dans $M(x)$ et convergeant vers x , telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f(y_n) - f(x) - \nabla f(x)[y_n - x]| > \alpha \|y_n - x\|.$$

Notant $\eta = \eta(\alpha/10)$ le réel défini à la proposition 9, nous voyons que, pour tout $z \in B(y_n, \eta) \setminus M(y_n)$,

$$|f(z) - f(y_n) - \nabla f(y_n)[z - y_n]| < \alpha \|z - y_n\|/10.$$

Utilisant la continuité de ∇f sur L , nous pouvons supposer, en nous limitant éventuellement à une suite cofinale des (y_n) , que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la norme $\|\nabla f(y_n) - \nabla f(x)\|$ est majorée par $\alpha/10$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il apparaît alors que, pour tout z appartenant à $B[y_n, \inf(\eta, 2^{-1}\|y_n - x\|)] \setminus M(y_n)$, on a la minoration suivante :

$$\begin{aligned} |f(z) - f(x) - \nabla f(x)[z - x]| &= |f(y_n) - f(x) - \nabla f(x)[y_n - x] + f(z) \\ &\quad - f(y_n) - \nabla f(y_n)[z - y_n] + [\nabla f(y_n) - \nabla f(x)][z - y_n]| \\ &\geq \alpha \|y_n - x\| - \alpha \|z - y_n\|/10 - \alpha \|z - y_n\|/10 \\ &\geq \alpha \frac{2}{3} \|z - x\| - \alpha \|z - x\|/10 - \alpha \|z - x\|/10 \geq \frac{\alpha}{3} \|z - x\|. \end{aligned}$$

Nous voyons que l'ensemble

$$C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B[y_n, \inf(\eta, 2^{-1}\|y_n - x\|)] \setminus M(y_n)$$

est contenu dans l'ensemble

$$E = \{y \in L; |f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y - x]| > \frac{\alpha}{3} \|y - x\|\}.$$

Comme f est finement différentiable en x , E est la trace sur L d'un ensemble effilé en x . Le point x est donc un point de densité 0 de $E \cap L$.

Nous allons montrer que C est la trace sur L d'un ensemble Γ de densité supérieure non nulle en x . Nous notons

$$\Gamma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{y \in A, \|y - y_n\| < \inf[\eta, 2^{-1}\|y_n - x\|], y \notin M(y_n)\}.$$

Soit r un réel > 0 , alors il existe un n tel que $3/2 \|y_n - x\| \leq \inf(r, \eta)$ et

$$\begin{aligned} & \lambda \left\{ \Gamma \cap B \left(x, \frac{3}{2} \|y_n - x\| \right) \right\} \\ & \geq \lambda \left\{ [B(y_n, 2^{-1} \|y_n - x\|) \setminus M(y_n)] \cap B \left(x, \frac{3}{2} \|y_n - x\| \right) \right\} \\ & \geq 2^{-1} \lambda [B(y_n, 2^{-1} \|y_n - x\|)] \geq 2^{-d-1} \|y_n - x\|^d \Lambda, \end{aligned}$$

où Λ désigne la mesure de Lebesgue d'une boule de rayon 1 :

$$\lambda \left\{ \Gamma \cap B \left(x, \frac{3}{2} \|y_n - x\| \right) \right\} \geq 2^{-1} \cdot 3^{-d} \lambda \left\{ B \left(x, \frac{3}{2} \|y_n - x\| \right) \right\}.$$

Nous voyons alors que

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda[\Gamma \cap B(x, r)]}{\lambda[B(x, r)]} \geq 2^{-1} 3^{-d} > 0.$$

Or x est point de densité de L , d'après la définition de K , ce qui signifie que

$$\frac{\lambda[L \cap B(x, r)]}{\lambda[B(x, r)]} \rightarrow 1 \quad (r \rightarrow 0).$$

Il en résulte que

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda[C \cap B(x, r)]}{\lambda[B(x, r)]} \geq 2^{-1} \cdot 3^{-d} > 0.$$

Or E vérifie, d'après le critère de Wiener,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda[E \cap B(x, r)]}{\lambda[B(x, r)]} = 0.$$

On obtient donc une contradiction avec l'inclusion $C \subset E$, et le théorème est démontré.

THÉORÈME 11. — Soit f une fonction définie et finement différentiable sur un ouvert fin $A \subset \mathbb{R}^d$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $C \subset A$, tel que la mesure de Lebesgue de $A \setminus C$ soit majorée par ε et une fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ tels que $f/C = g/C$.

Démonstration. — Soit C compact, contenu dans $K = K(\varepsilon)$, sur lequel les fonctions f et ∇f soient continues, et tel que la mesure de Lebesgue de $A \setminus C$ soit majorée par ε .

Nous considérons la fonction $\Phi(x, y)$, définie sur $C \times C$ par

$$\Phi(x, y) = \frac{|f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y-x]|}{\|y-x\|}, \quad \text{si } y \neq x,$$

$$\Phi(x, x) = 0, \quad \forall x \in C.$$

Comme f/C est différentiable et comme f et ∇f sont continues, Φ est continue sur $C \times C$; il existe donc une constante $M \in \mathbb{R}_+$ telle que, pour tout $(x, y) \in C \times C$,

$$|f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y-x]| < M \|y-x\|.$$

Utilisant un résultat de H. WHITNEY (exposé au théorème VI, 4.7 de [1]), dans lequel nous supposons que $\gamma = k = 1$ et $j = 0$, nous savons qu'une fonction continûment différentiable sur un compact se prolonge en une fonction continûment différentiable sur \mathbb{R}^d .

Il existe donc une fonction g , continûment différentiable sur \mathbb{R}^d qui prolonge f/C , d'où l'énoncé du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] FUGLEDE (B.). — *Finely harmonic functions.* — Berlin, Springer-Verlag, 1972 (*Lecture Notes in mathematics*, 289).
- [2] FUGLEDE (B.). — *Remarks on fine continuity and the base operation in potential theory*, *Math. Ann.* (à paraître).
- [3] MASTRANGELO (M.) et DEHEN (D.). — Différentiabilité fine, Différentiabilité stochastique, différentiabilité stochastique de fonctions finement harmoniques, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 28, 1978, fasc. 2, p. 161-186.
- [4] MEYER (P.-A.). — *Processus de Markov.* — Berlin, Springer-Verlag, 1967 (*Lecture Notes in Mathematics*, 26).
- [5] STEIN (E. M.). — *Singular integrals and differentiability properties of functions.* — Princeton, Princeton University Press, 1970 (*Princeton mathematical Series*, 30).
- [6] WHITNEY (H.). — Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 36, 1934, p. 63-89.