BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-PIERRE CONZE

Ergodicité d'une transformation cylindrique

Bulletin de la S. M. F., tome 108 (1980), p. 441-456
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__441_0>

Bull. Soc. math. France,
108, 1980, p. 441-456.

ERGODICITÉ D'UNE TRANSFORMATION CYLINDRIQUE

PAR

JEAN-PIERRE CONZE (*)

RÉSUMÉ. — Étant donnés deux nombres réels α et β, nous étudions la transformation T définie sur le cylindre $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ par

$$T(x, y) = (x+\alpha,\ y + 1_{[0,\beta[}(x) - \beta).$$

Nous donnons une condition sur le couple (α, β) qui implique l'ergodicité de T.

ABSTRACT. — Let T be the transformation defined on the cylinder $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ by:

$$T(x, y) = (x+\alpha,\ y + 1_{[0,\beta[}(x) - \beta).$$

We prove that T is ergodic, under some condition on (α, β).

I. Introduction et notations

DÉFINITION DE LA TRANSFORMATION

Soient α, $0<\alpha<1$, un nombre irrationnel fixé, et $S : x \mapsto x+\alpha$ la rotation associée sur le cercle $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni de la mesure de Lebesgue μ.

Pour toute fonction φ mesurable sur X à valeurs réelles, on peut définir sur le cylindre $X \times \mathbb{R}$ une transformation T, dite « cylindrique », basée sur la rotation S, en posant :

(1) $$T(x, y) = (S x,\ y + \varphi(x)).$$

Cette transformation préserve la mesure infinie m produit des mesures de Lebesgue sur X et sur $\mathbb{R}$. D'après la relation :

(2) $$T^n(x, y) = (x + n\alpha,\ y + \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(x + k\alpha))$$

(*) Texte reçu le 3 septembre 1979, révisé le 2 février 1980.

Jean-Pierre CONZE, U.E.R. de Mathématiques et informatique, Université de Rennes-I, Rennes-Beaulieu, 35042 Rennes Cedex.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1980/441/$ 5.00

ses propriétés ergodiques sont liées au comportement du « cocycle » associé à φ et S, c'est-à-dire de la suite (φ_n) définie par :

(3) $$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(x+k\alpha), \qquad n \geqslant 1, \quad x \in X,$$

qui décrit les niveaux successifs sur le cylindre des images par T^n d'un point $(x, 0)$.

On montre facilement, à l'aide du théorème de Birkhoff, que, si φ est intégrable et d'intégrale nulle, la transformation T est conservative, et (ce qui est équivalent) que le cocycle (φ_n) est récurrent.

Dans ce travail, nous étudions une classe particulière de transformations T. Dans toute la suite, nous prenons pour φ la fonction définie sur le cercle par :

(4) $$\varphi(x) = 1_{[0, \beta[}(x) - \beta,$$

où β, $0 < \beta < 1$, est un nombre fixé.

La transformation T étant définie par (1), pour φ donnée par (4), nous montrons l'*ergodicité* de T sur $X \times \mathbb{R}$ muni de la mesure m, sous certaines conditions portant sur β. Nous étudions également les fonctions propres de T.

Le résultat principal répond à une question posée par W. Veech [5]. Des cas particuliers ou analogues avaient été étudiés précédemment ([4], [2]). Indépendamment de l'auteur, M. Stewart [8] a résolu le cas où 1, α, β sont indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Nous remercions le Referee pour ses suggestions et les corrections qu'il a apportées à ce texte.

Notations

Nous ferons appel à quelques résultats sur les fractions continues que l'on pourra trouver dans J. W. Cassels [1].

Pour tout nombre réel x, on pose :

$$((x)) = \inf_{p \in \mathbb{Z}} |x - p|.$$

Le nombre α étant fixé, on note (p_n/q_n) la suite des convergents de α.

On a la relation :

(5) $$1 = q_n((q_{n+1}\alpha)) + q_{n+1}((q_n\alpha)),$$

et l'inégalité qui en résulte :

$$((q_n \alpha)) < 1/q_{n+1}. \tag{6}$$

Remarques sur les démonstrations

La méthode utilisée, pour prouver l'ergodicité de T, est reprise de [2]. La démonstration se fait en deux étapes.

Soit f une fonction invariante par T sur $X \times \mathbb{R}$. On montre d'abord que f est périodique : il existe une constante $a > 0$ telle que :

$$f(x, y+a) \equiv f(x, y).$$

Ce résultat est obtenu en examinant de quelle façon s'effectue la récurrence (sous l'action de T) dans un voisinage de la base $X \times \{0\}$ du cylindre.

On est ainsi ramené au cas où f provient d'une fonction invariante définie sur le tore quotient $X \times \mathbb{R}/a\mathbb{Z}$. Une telle fonction doit vérifier une équation fonctionnelle, dont l'étude a fait l'objet de plusieurs travaux. En particulier, les travaux de W. VEECH ([6], [7]) fournissent des conditions nécessaires, portant sur le couple (α, β), pour que cette équation fonctionnelle ait une solution mesurable. On en déduit des conditions suffisantes assurant que T est ergodique.

Il convient de remarquer que, d'après la démonstration, si T n'est pas ergodique, φ est « homologue » à un cocycle à valeurs dans un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Plus précisément, si T n'est pas ergodique, il existe une constante $a > 0$ et une fonction mesurable h telles que l'on ait :

$$\varphi(x) \equiv a\gamma(x) + h(Tx) - h(x),$$

où $\gamma : X \to \mathbb{Z}$ est une fonction mesurable à valeurs entières.

Cette remarque conduit à la question suivante : étant donnée une transformation cylindrique, peut-on, à l'aide d'un changement homologue de cocycle, la réduire à une transformation cylindrique ergodique, définie sur un sous-groupe convenable. On peut formuler cette question dans le cadre général des transformations cylindriques opérant sur le produit d'un espace probabilisé et d'un groupe de Lie, et dont l'action commute avec celle du groupe. Dans le cas particulier étudié ici, la réduction est possible.

CHOIX DE LA VALEUR DE β

Il est clair que la transformation T n'est pas ergodique, si β est un multiple entier de α. On excluera donc les valeurs de β de la forme : $\beta = p\alpha$, mod 1, $p \in \mathbb{Z}$.

On voit d'autre part qu'il y a deux cas à considérer suivant les valeurs de β.

Si β est *rationnel*, $\beta = u/v$, u, v non nuls dans $\mathbb{Z}$, la suite $(\varphi_n(x), n \in \mathbb{N})$ est à valeurs dans le sous-groupe $(1/v)\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$. La question de l'ergodicité de T doit être posée pour la restriction de T au « cylindre » $X \times (1/v)\mathbb{Z}$, muni de la mesure produit de μ sur X par la mesure discrète sur $(1/v)\mathbb{Z}$.

Si β est *irrationnel*, le sous-groupe engendré par les valeurs de $(\varphi_n(x))$ est au contraire dense dans $\mathbb{R}$, pour tout $x \in X$.

Pour éviter les redites, nous ne donnerons le détail des démonstrations que dans le cas où β est irrationnel.

Remarquons enfin que toutes les fonctions considérées (en particulier) dans les équations fonctionnelles sont mesurables, par hypothèse ou par construction, et que les relations fonctionnelles sont supposées vérifiées en dehors d'un ensemble de mesure nulle.

II. Périodicité des fonctions invariantes

PROPOSITION 1. — *Soit f une fonction sur $X \times \mathbb{R}$ invariante par T. Si on a* $\beta \neq p\alpha$, mod 1, *pour tout $p \in \mathbb{Z}$, il existe $a > 0$ tel que $f(x, y+a) \equiv f(x, y)$.*

Avant de démontrer la proposition, nous allons faire quelques remarques et montrer une série de lemmes.

Dans le cas général, comme nous l'avons vu dans l'introduction, dès que φ est intégrable et d'intégrale nulle, la transformation cylindrique associée est conservative, et le cocycle (φ_n) est récurrent : pour tout $\varepsilon > 0$, pour presque tout x, il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k(x), k \in \mathbb{N})$, telle que :

$$|\varphi_{n_k(x)}(x)| = |\sum_{l=0}^{n_k(x)-1} \varphi(x + l\alpha)| \leqslant \varepsilon.$$

Ici, compte tenu du choix de φ, T vérifie une propriété de récurrence uniforme dans un compact, résultant du lemme suivant dû à KOKSMA :

LEMME 1. — *Soient u une fonction à variation bornée sur le cercle, et q un entier tel que, pour un entier p premier avec q, on ait : $|q\alpha - p| < 1/q$. On a alors :*

$$\left|\sum_{l=0}^{q-1} u(x + l\alpha) - q\int_X u\, d\mu\right| \leqslant \mathrm{Var}(u) \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Preuve. — Chaque intervalle $[k/q, (k+1)/q[$, $0 \leqslant k < q$ contient un point et un seul de la forme $l\alpha$, mod 1, $0 \leqslant l < q$. L'inégalité en résulte.

Appliqué aux convergents de α et à la fonction $\varphi=1_{[0,\beta[}-\beta$, le lemme 1 fournit la majoration :

$$(7) \qquad |\varphi_{q_n}(x)| = |\textstyle\sum_{l=0}^{q_n-1}\varphi(x+l\alpha)| \leqslant \mathrm{Var}(\varphi)=2.$$

Si l'on pouvait trouver un $\varepsilon>0$ et une sous-suite (n_k) tels que l'on ait $|\varphi_{q_{n_k}}(x)|\geqslant\varepsilon$, pour chaque x, on obtiendrait facilement la périodicité de toute fonction f invariante par T. En effet, en admettant que l'on puisse faire converger la suite $(\varphi_{q_{n_k}}(x)$, ou une suite extraite, vers une limite $v(x)$, nécessairement finie et non nulle, on obtiendrait, en passant à la limite dans :

$$f(x+q_{n_k}\alpha,\ y+\varphi_{q_{n_k}}(x))=f(x,\ y),$$

la relation :

$$f(x,\ y+v(x))\equiv f(x,\ y),$$

dont on déduit immédiatement la périodicité de f.

Pratiquement, nous allons adapter ce raisonnement en montrant que les majorations et les convergences mentionnées ont lieu, sous une forme plus faible.

LEMME 2. — *Si* $\beta\neq p\alpha$, mod 1, *pour tout* $p\in\mathbb{Z}$, *la suite* $(((q_n\beta))/((q_n\alpha))\,|\,n\in\mathbb{N})$ *est non bornée.*

Preuve. — Supposons qu'il existe une constante M telle que $((q_n\beta))\leqslant M((q_n\alpha))$, pour tout n. Soit n_0 un indice tel que q_{n_0} soit impair, et $M\leqslant(q_{n_0}-1)/2$. Nous pouvons supposer que $M=(q_{n_0}-1)/2$. Considérons l'ensemble :

$$\Lambda=\{\lambda : ((q_n\lambda))\leqslant M((q_n\alpha)),\ \text{pour tout } n\}.$$

Nous allons montrer que Λ est formé de multiples entiers de α.

Un élément λ dans Λ appartient, pour chaque n, à un intervalle I_n^k, de la forme :

$$I_n^k=\left[\frac{k-M((q_n\alpha))}{q_n};\frac{k+M((q_n\alpha))}{q_n}\right], \qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ q_n-1.$$

Montrons que, pour $n\geqslant n_0$, un intervalle de rang n ne coupe, au plus, qu'un intervalle de rang $n+1$. Dans le cas contraire, deux intervalles consécutifs de rang $n+1$ recouperaient un même intervalle de rang n, ce qui impliquerait l'inégalité :

$$1/q_{n+1}\leqslant 2M((q_{n+1}\alpha))/q_{n+1}+2M((q_n\alpha))/q_n,$$

d'où, d'après (5) :

$$q_n/2M \leqslant q_n((q_{n+1}\alpha)) + q_{n+1}((q_n\alpha)) = 1.$$

Ceci est impossible pour $n \geqslant n_0$, d'après le choix de M.

Ainsi, chaque élément de Λ appartient à une suite d'intervalles emboîtés dont la longueur tend vers zéro, et il y a q_{n_0} telles suites. Il en résulte qu'il y a au plus q_{n_0} éléments dans Λ. Par ailleurs, on connaît q_{n_0} éléments de Λ : les multiples $p\alpha$, pour $p=0, \pm 1, \ldots, \pm(q_{n_0}-1)/2$, qui fournissent donc tous les éléments de Λ.

LEMME 3. — *Si la suite $(((q_n\beta))/((q_n\alpha)), n \in \mathbb{N})$ est non bornée, il existe une suite de fonctions mesurables à valeurs entières $(t_k(x))$, telles que :*

$$\lim_k t_k(x)\alpha = 0, \qquad \operatorname{mod} 1,$$

et

$$1/4 \leqslant |\varphi_{t_k(x)}(x)| \leqslant 9/4.$$

Preuve. — Soit $\eta_k = ((q_{n_k}\alpha))/((q_{n_k}\beta))$, où la suite (n_k) est choisie de façon que $\lim_k \eta_k = 0$.

On peut supposer que $|\varphi_{q_{n_k}}(x)| < 1/4$, puisque, dans le cas contraire, le lemme serait une conséquence immédiate de l'inégalité (7). On a :

$$\varphi_{q_n}(x) = u_n - q_n\beta,$$

où u_n est un entier. Il résulte donc de l'hypothèse $|\varphi_{q_{n_k}}(x)| < 1/4$, que $((q_{n_k}\beta)) < 1/4$ et il est possible de trouver une suite d'entiers (l_k) telle que :

$$1/2 \leqslant l_k((q_{n_k}\beta)) < 3/4.$$

On a :

$$l_k((q_{n_k}\alpha)) \leqslant 3/4\,\eta_k \qquad \text{avec} \quad \lim_k \eta_k = 0.$$

Montrons que $|\varphi_{l_k q_{n_k}}(x)| \geqslant 1/4$. Dans le cas contraire, on aurait simultanément :

$$|v_k - l_k q_{n_k}\beta| < 1/4,$$
$$l_k |w_k - q_{n_k}\beta| \leqslant 3/4,$$

où v_k et w_k sont des entiers. D'où $|v_k - l_k w_k| < 1$, et donc $v_k = l_k w_k$, ce qui implique :

$$l_k |w_k - q_{n_k} \beta| \leqslant 1/4,$$

contrairement au fait que cette quantité est $\geqslant 1/2$.

Soit $(s_k(x))$ le plus petit entier >0, inférieur à l_k, tel que :

$$|\varphi_{s_k(x) q_{n_k}}(x)| \geqslant 1/4.$$

Cet entier existe, d'après ce qui précède. D'après la définition de s_k, on a :

$$|\varphi_{(s_k(x)-1) q_{n_k}}(x)| < 1/4.$$

D'après l'inégalité (7), ceci implique :

$$|\varphi_{s_k(x) q_{n_k}}(x)| \leqslant |\varphi_{(s_k(x)-1) q_{n_k}}(x)| + |\varphi_{q_{n_k}}(x + (s_k(x) - 1) q_{n_k} \alpha)| \leqslant 1/4 + 2 = 9/4.$$

D'autre part, on a bien :

$$((s_k(x) q_{n_k} \alpha)) \leqslant l_k ((q_{n_k} \alpha)), \qquad \text{quantité tendant vers zéro.}$$

La suite de fonctions à valeurs entières $(t_k(x) = s_k(x)\, q_{n_k})$, fonctions mesurables d'après leur construction, répond aux conditions du lemme.

LEMME 4. — *Soit $(u_k(x))$ une suite de fonctions mesurables à valeurs dans un intervalle compact $[a, b]$. Il existe une suite strictement croissante de fonctions à valeurs entières mesurables $(k_j(x))$, et une fonction $v(x)$ mesurable telles que $\lim_j u_{k_j(x)}(x) = v(x)$, pour presque tout x.*

Preuve. — Considérons la suite décroissante de partitions (θ_j) de l'intervalle $[a, b]$ en intervalles $\mathscr{I}_j^l$, $l = 1, 2, 3, \ldots, 2^j$, de longueur $(b-a) 2^{-j}$.

Étant donnée la partition θ_1, on peut choisir une fonction mesurable $x \mapsto l_1(x) \in \{1, 2\}$, telle que, pour presque tout x, il existe une infinité d'indices k vérifiant $u_k(x) \in \mathscr{I}_1^{l_1(x)}$.

De même, pour θ_2, il est possible de construite une fonction mesurable $x \mapsto l_2(x) \in \{1, 2, 3, 4\}$ telle que, pour presque tout x, on ait :

$$\mathscr{I}_1^{l_1(x)} \supset \mathscr{I}_2^{l_2(x)},$$

et

$$u_k(x) \in \mathscr{I}_2^{l_2(x)},$$

pour une infinité d'indices k.

On effectue ainsi la construction d'une suite $(l_j(x))$ de fonctions mesurables à valeurs entières, vérifiant, pour presque tout x :

$$\mathscr{I}_j^{l_j(x)} \supset \mathscr{I}_{j+1}^{l_{j+1}(x)},$$

et

$$u_k(x) \in \mathscr{I}_j^{l_j(x)},$$

pour une infinité d'indices k.

Par le procédé diagonal, on peut alors construire une suite strictement croissante de fonctions mesurables à valeurs entières $(k_j(x))$, telles que l'on ait, pour presque tout x :

$$u_{k_j(x)}(x) \in \mathscr{I}_j^{l_j(x)}.$$

La suite $(u_{k_j(x)}(x), j \in \mathbb{N})$ est une suite de fonctions mesurables, qui est de Cauchy pour presque tout x. Elle converge vers une fonction mesurable v.

LEMME 5. — *Si* $\beta \neq p\alpha$, mod 1, *pour tout* $p \in \mathbb{Z}$, *il existe une suite croissante de fonctions mesurables à valeurs entières* $(r_j(x))$ *telle que :*

$$\lim_j r_j(x)\alpha = 0, \qquad \text{mod } 1$$

et

$$\lim_j \varphi_{r_j(x)}(x) = a,$$

où a est une constante non nulle.

Preuve. — En appliquant les lemmes 2, 3, et 4, on obtient une suite strictement croissante de fonctions à valeurs entières $(k_j(x))$, telle que, en posant :

$$r_j(x) = t_{k_j(x)}(x),$$

on ait :

$$\lim_j r_j(x)\alpha = 0, \qquad \text{mod } 1,$$

et

$$\lim_j \varphi_{r_j(x)}(x) = w(x),$$

où w est une fonction mesurable strictement positive non nulle.

En reprenant la construction de la suite $(r_j(x))$, il n'est pas difficile de voir que w est invariante par la rotation d'angle α. On en déduit que w est égale à une constante non nulle.

Preuve de la proposition. — Soit f une fonction invariante par T. On peut supposer f bornée. Appliquons le lemme 5. D'après l'invariance de f, on a :

$$f(x+n\alpha,\ y+\varphi_n(x))=f(x,\ y) \quad \text{pour tout entier } n\geqslant 0,$$

d'où :

$$f(x+r_j(x)\,\alpha,\ y+\varphi_{r_j(x)}(x))=f(x,\ y),$$

où $(r_j(x))$ est la suite donnée par le lemme 5.

Cette relation peut s'écrire :

$$f(x+r_j(x)\,\alpha,\ y)=f(x,\ y-\varphi_{r_j(x)}(x)).$$

On peut passer à la limite dans la relation précédente, à gauche pour y fixé, au sens de $L^1(\mu)$, à droite, pour x fixé, au sens de L^1 sur tout intervalle compact en y. A la limite, on obtient la relation :

$$f(x,\ y)=f(x,\ y-a).$$

III. Ergodicité

Pour tout $b>0$, la transformation cylindrique T se factorise en une transformation T_b définie sur le tore quotient $X\times\mathbb{R}/b\,\mathbb{Z}$ par :

$$T_b:\quad (x,\ y)\mapsto(x+\alpha,\ y+\varphi(x) \bmod b).$$

Toute fonction invariante par T_b sur le tore se relève dans $X\times\mathbb{R}$ en une fonction invariante par T, de période b.

Dans le cas étudié ici d'une transformation T associée à la fonction $\varphi=1_{[0,\,\beta[}-\beta$, toute fonction invariante par T est périodique d'après la proposition 1, de période a (*cf.* le lemme 5), et donc se factorise en une fonction invariante par T_a sur $X\times Z/a\,\mathbb{Z}$. Le lemme suivant ramène l'étude de ces fonctions à la résolution d'une équation fonctionnelle.

LEMME 6. — *Toute fonction g invariante par T_a sur $X\times Z/a\,\mathbb{Z}$ est de la forme :*

$$g(x,\ y)=\textstyle\sum_{p\in\mathbb{Z}} h_p(x)\, e^{-2\pi i p/a y},$$

où h_p est une solution (mesurable) de l'équation fonctionnelle :

$$h_p(x+\alpha)=e^{2\pi i p/a\,\varphi(x)}\,h_p(x).$$

Preuve. — Ce résultat, bien connu, s'obtient en considérant les coefficients de Fourier en y de g, c'est-à-dire les fonctions :

$$h_p(x)=\int_0^a g(x,y)\,e^{2\pi i p/a y}\,dy.$$

Pour obtenir un critère d'ergodicité de la transformation T, nous devons maintenant rappeler des résultats dus à W. VEECH.

Soient $\lambda\neq 0$, mod 1, et γ deux réels fixés. Une condition nécessaire pour que l'équation fonctionnelle :

$$h(x+\alpha)=e^{2\pi i(\lambda\varphi(x)-\gamma)}\,h(x), \tag{8}$$

ait une solution (mesurable non nulle) h est que la suite des intégrales $\int \exp 2\pi i\lambda\varphi_n(x)\,d\mu(x)$ vérifie la condition :

$$\lim_{n\alpha\to 0 \bmod 1}\left|\int \exp 2\pi i\lambda\varphi_n(x)\,d\mu(x)\right|=1. \tag{a}$$

On note que cette condition est indépendante de γ. Nous sommes intéressés ici par le cas $\gamma=0$, i. e. par l'équation :

$$h(x+\alpha)=e^{2\pi i\lambda\varphi(x)}\,h(x). \tag{9}$$

D'après un résultat de W. WEECH [6], une condition nécessaire pour que la condition (a) soit réalisée est qu'il existe une suite d'entiers (b_n) telle que :

$$(c)\quad \begin{cases} \beta=\sum_n b_n q_n\alpha, \\ \text{et} \\ \lim_n b_n q_n((q_n\alpha))=0, \end{cases}$$

et l'on a de plus :

$$\lim_n b_n\lambda=0 \bmod 1. \tag{b}$$

(la convergence dans la série est réalisée au sens du cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.)

Ainsi, les conditions (b) et (c) sont des conditions nécessaires pour que l'équation (8) ait une solution mesurable non nulle h.

THÉORÈME 1. — *Si β ne vérifie pas la condition (c), la transformation cylindrique T associée à $\varphi=1_{[0,\,\beta[}-\beta$ est ergodique.*

Preuve. — On applique la proposition 1, le lemme 6, et les résultats rappelés ci-dessus.

Remarques

1. Si le nombre α est tel que $\inf_n q_n((q_n\alpha))>0$ (α à quotients bornés), les seules valeurs de β vérifiant (c) sont les multiples entiers de α, mod 1.

2. En utilisant le lemme 5 et la méthode de la proposition 1, on obtient le résultat suivant : soit λ tel que l'équation :

$$h(x+\alpha)=h(x)\,e^{2\pi i\lambda\varphi(x)}, \tag{9}$$

ait une solution h non nulle. Alors $\lambda a \in \mathbb{Z}$, où a est le nombre apparaissant dans le lemme 5.

3. La condition (c) n'est *a priori* qu'une condition nécessaire pour que l'équation (8) possède une solution h non nulle. Considérons le cas particulier où $\lambda=1/2$ et $\gamma=-\beta/2$. c'est-à-dire l'équation :

$$h(x+\alpha)=h(x)\,e^{\pi i 1_{[0,\,\beta[}(x)}.$$

Dans [6], W. VEECH a montré que, sous la condition (c), cette équation a effectivement une solution h non nulle. Les entiers b_n sont, dans ce cas, pairs, pour n assez grand, d'après la condition $\lim_n b_n\lambda=0$, mod 1.

Dans [3], nous obtenons un résultat analogue, mais plus faible (condition plus restrictive sur β), par une méthode différente, susceptible de généralisations.

CAS OU β EST RATIONNEL

Si β est rationnel, $\beta=u/v$, avec u et v entiers non nuls premiers entre eux, on examine le problème de l'ergodicité de la transformation T restreinte à $X\times(1/v)\,\mathbb{Z}$.

En appliquant la méthode développée plus haut, et compte tenu de ce qu'aucun nombre rationnel ne vérifie la condition (c), on obtient le résultat :

Pour tout nombre rationnel $\beta=u/v$, $\beta\neq 0$ (mod 1), la transformation cylindrique T associée à $\varphi=1_{[0,\,\beta[}-\beta$ est ergodique sur $\mathbb{T}^1\times(1/v)\,\mathbb{Z}$.

Dans le cas particulier où $\beta=1/2$, on retrouve un résultat de [2].

Toujours dans le cas où β est rationnel, $\beta=u/v$, il est possible de préciser certains résultats obtenus plus haut. La proposition suivante est l'analogue du lemme 5.

PROPOSITION 2. — *Il existe un entier w, $0<w<v$, tel que, pour presque tout x, on ait pour une infinité d'indices n :*

$$\sum_{k=0}^{q_n-1} \varphi(x+k\alpha)=w/v.$$

Preuve. — Soient p et q des entiers tels que $(p, q)=1$, et v ne divise pas q. On obtient facilement l'inégalité :

$$0<\sum_{k=0}^{q_n-1} \varphi(x+kp/q)\leqslant \frac{v-1}{v}.$$

Par ailleurs, on peut montrer que, pour tout entier $v\geqslant 2$, l'inégalité :

$$((q_n\alpha))<\frac{1}{2q_n}$$

est vérifiée pour une infinité de q_n, non divisibles par v. En nous restreignant dans toute la suite de la démonstration à cette famille de q_n, nous aurons donc :

$$\mu\{x : \sum_{k=0}^{q_n-1} \varphi(x+k\alpha)\neq\sum_{k=0}^{q_n-1} \varphi(x+kp_n/q_n)\}<1/2.$$

Considérons l'ensemble fini $\mathscr{I}=\{\pm 1/v, \ldots, \pm(v-1)/v\}$. D'après ce qui précède, si q_n n'est pas divisible par v, on a :

$$\mu\{x : \sum_{k=0}^{q_n-1} \varphi(x+k\alpha)\in\mathscr{I}\}\geqslant 1/2.$$

Ainsi, il existe un $w\in\{\pm 1, \ldots, \pm(v-1)/v\}$ tel que, si l'on pose :

$$A=\{x : \sum_0^{q_n-1} \varphi(x+k\alpha)=w/v, \text{ pour une infinité d'indices } n\},$$

on ait : $\mu(A)\geqslant C$, où C est une constante >0. L'ensemble A étant invariant par la rotation d'angle α, il est de mesure 1. Enfin, en utilisant la relation $\sum_{k=0}^{v-1} \varphi(x+k/v)=0$, on peut se ramener au cas où w est >0.

COROLLAIRE. — *Si $\beta=1/2$, on a $\sum_{k=0}^{q_n-1} \varphi(x+k\alpha)=1/2$, pour une infinité d'indices n.*

A l'aide de la proposition 2, on peut démontrer facilement l'ergodicité de la transformation T (dans le cas où β est rationnel), en suivant la méthode de [2], sans passer par la condition (c).

IV. Fonctions propres

Nous nous plaçons d'abord dans le cas où β est irrationnel. Soit u une fonction propre pour T, c'est-à-dire une fonction mesurable sur $X \times \mathbb{R}$, telle qu'il existe une constante t vérifiant :

$$u(x+\alpha,\ y+\varphi(x))=tu(x,\ y) \quad \text{pour } m\text{-presque tout } (x,\ y).$$

On montre facilement que, T étant conservative, on a $|t|=1$. Nous poserons $t=e^{2\pi i\theta}$. La relation exprimant que u est une fonction propre s'écrit donc :

$$u(x+\alpha,\ y+\varphi(x))=e^{2\pi i\theta}u(x,\ y). \tag{10}$$

On ramène facilement l'étude des fonctions propres à celle des fonctions propres bornées (dans le cas où T est ergodique, u est en fait de module constant). Nous supposerons dans la suite que u est bornée.

Dans l'énoncé qui suit, a est le nombre introduit dans le lemme 5.

PROPOSITION 3. — *Si u vérifie* (10), *il existe un nombre réel θ_1 tel que :*

$$u(x,\ y+a)=e^{2\pi i\theta_1}u(x,\ y). \tag{11}$$

Preuve. — En utilisant le lemme 5, et en employant les notations de la proposition 1, on a :

$$e^{-2\pi i r_j(x)\theta}u(x+r_j(x)\,\alpha,\ y)=u(x,\ y-\varphi_{r_j(x)}(x)).$$

On peut extraire de la suite $(e^{-2\pi i r_j(x)\theta},\ j\in\mathbb{N})$, une sous-suite convergeant faiblement vers une fonction mesurable $\zeta(x)$. Pour y fixé, la convergence de $u(x+r_j(x)\,\alpha,\ y)$ vers $u(x,\ y)$ a lieu au sens de $L^1(\mu)$ (*cf.* la proposition 1). On peut alors passer à la limite à gauche et à droite dans la relation précédente. On obtient :

$$\zeta(x)\,u(x,\ y)=u(x,\ y-a). \tag{12}$$

Des relations (10) et (12), il résulte :

$$\zeta(x+\alpha)\,u(x,\ y)=u(x,\ y-a).$$

Si u n'est pas identiquement nulle, pour presque tout x, il existe y tel que $u(x,\ y)\neq 0$. Ceci implique : $\zeta(x+\alpha)=\zeta(x)$. Donc la fonction ζ est une constante. Comme u est bornée, la relation (12) implique que cette constante est de module 1. On la note $e^{-2\pi i\theta_1}$.

La relation (12) donne la relation (11) annoncée.

LEMME 7. — *Si u est une fonction propre pour T vérifiant* (10) *et* (11), *u est de la forme :*

(13) $$u(x,y)=\sum_{p\in\mathbb{Z}} u_p(x)\, e^{-2\pi i[(p-\theta_1)/a]y},$$

où les fonctions u_p vérifient la relation fonctionnelle :

(14) $$u_p(x+\alpha)=e^{2\pi i\theta}\, u_p(x)\, e^{2\pi i[(p-\theta_1)/a]\varphi(x)}.$$

Preuve. — D'après (11), la fonction $v(x,y)=e^{-2\pi i\theta_1 y/a}u(x,y)$ est périodique, de période a. On obtient (13) et (14) en calculant les coefficients de Fourier en y de v, $\int_0^a v(x,y)\,e^{2\pi i p_{\cdot a} y}\,dy$, et en utilisant la relation de fonction propre (10).

Remarque. — Si T est ergodique, l'expression dans (13) se réduit à un terme.

THÉORÈME 3. — *Si β ne vérifie pas la condition* (c), *la transformation cylindrique T associée à $\varphi=1_{[0,\beta[}-\beta$ est ergodique, et ses fonctions propres sont de la forme :* $(x,y)\to e^{2\pi i(kx+ly)}$, $k, l\in\mathbb{Z}$.

Preuve. — Le théorème résulte immédiatement de la proposition 3, du lemme 7, et des résultats rappelés au paragraphe III.

Remarques

1. Les conclusions du théorème sont en particulier vérifiées si α est à quotients partiels bornés (condition $\inf_n q_n((q_n\alpha))>0$).

2. Il existe des choix du couple (α,β), pour lesquels la transformation T est ergodique, mais possède d'autres fonctions propres que les fonctions de la forme $e^{2\pi i(kx+ly)}$, $k, l\in\mathbb{Z}$.

Choisissons α tel que la suite de ses quotients partiels (q_{n+1}/q_n) tende vers l'infini, et β de la forme :

$$\beta=\sum_n b_n q_n\alpha \pmod 1).$$

où (b_n) est une suite d'entiers prenant les valeurs 0 ou 2.

Il est clair qu'on peut choisir les b_n de façon que β ne soit pas un multiple entier de α, mod 1, et de façon que $\lambda=1/2$ soit la seule valeur $\neq 0$ (mod 1) vérifiant $\lim_n b_n\lambda=0$, mod 1.

D'après les résultats rappelés au paragraphe III, remarque 3, l'équation :

$$h(x+\alpha)=e^{\pi i 1_{[0,\beta[}(x)}h(x) \tag{15}$$

a une solution h non nulle.

La transformation T associée au couple (α, β) possède donc une fonction propre, de valeur propre $e^{-\pi i \beta}$, la fonction $(x, y) \to h(x)\, e^{-\pi i y}$. Mais l'existence d'une solution pour (15), le fait que $e^{\pi i \beta}$ ne soit pas une valeur propre de la rotation de base et la condition (b) impliquent que l'équation (9) n'a pas de solution non nulle. Ceci prouve l'ergodicité de T.

3. Dans le cas où β est rationnel, $\beta=u/v$, $u, v\neq 0$, on recherche les fonctions propres de la transformation T définie sur $X\times(1/v)\,\mathbb{Z}$. Nous avons vu que cette transformation est ergodique. On montre facilement que les fonctions propres de T sont, à une constante multiplicative près, de la forme :

$$(x, y)\mapsto e^{2\pi i(kx+ly)}, \qquad k\in\mathbb{Z}, \quad l\in\mathbb{Z}/v\,\mathbb{Z}.$$

4. Plaçons nous encore dans le cas où $\beta=u/v$ est rationnel. Soit $(k_n(x), n\in\mathbb{N})$ la suite strictement croissante des temps tels que :

$$\sum_{j=0}^{k_n(x)-1}\varphi(x+j\alpha)=0,$$

(temps de retour en zéro sur le cylindre). L'étude précédente des fonctions propres de T permet de montrer la propriété d'équirépartition :

pour tout $\lambda\neq 1$, $|\lambda|=1$,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\lambda^{k_n(x)}\to 0, \qquad N\to\infty,$$

pour presque tout x.

5. Considérons une fonction φ de la forme $\varphi=\sum_{i=1}^{n} C_i\, 1_{[a_i,\, a_i+\beta_i[}-\beta$, où les C_i sont entiers, $\beta\notin\alpha\,\mathbb{Z}$ mod 1, et $\int_{\mathbb{T}}\varphi\, dx=0$. La proposition 1 reste valable pour la transformation T associée à φ, à condition de remplacer 9/4 par une constante convenable. Sous certaines hypothèses sur les β_i, en utilisant les méthodes de [2], on peut prouver l'ergodicité de T.