BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL TALAGRAND

Sur les mesures vectorielles définies par une application Pettis-intégrable

Bulletin de la S. M. F., tome 108 (1980), p. 475-483
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__475_0>

Bull. Soc. math. France,
108, 1980, p. 475-483.

SUR LES MESURES VECTORIELLES DÉFINIES PAR UNE APPLICATION PETTIS-INTÉGRABLE

PAR

MICHEL TALAGRAND (*)

RÉSUMÉ. — On étudie quand l'ensemble des valeurs prises par une mesure vectorielle définie par une application Pettis-intégrable est relativement compact en norme. On montre sous l'axiome de Martin que c'est toujours le cas si l'espace d'arrivée n'admet pas l^∞ pour quotient.

ABSTRACT. — We study when the range of a Banach space valued measure which is defined by a Pettis-integrable function is norm relatively compact. Under Martin's axiom, we show that it is always the case when l^∞ is not quotient of the Banach space.

Soit (Ω, Σ, μ) un espace probabilisé et E un espace de Banach. Une application bornée φ de Ω dans E sera dite *Pettis-intégrable* si pour tout $x' \in E'$, $x' \circ \varphi$ est mesurable et si pour tout $A \in \Sigma$ il existe un élément b_A de E tel que $x'(b_A) = \int_A x' \circ \varphi d$ pour tout $x' \in E'$. Cette formule montre que l'application $A \to b_A$ est σ-additive lorsque E est muni de la topologie faible $\sigma(E, E')$. D'après le théorème classique d'Orlicz-Pettis, elle est encore σ-additive lorsque E est muni de la norme, c'est-à-dire que c'est une mesure vectorielle. On sait alors que son image est faiblement relativement compacte [1]. Le problème est de savoir si cette image est relativement compacte pour la norme de E. Disons pour simplifier que le couple $((\Omega, \Sigma, \mu), E)$ possède la propriété (P) si toute application Pettis-intégrable bornée de Ω dans E définit une mesure dont l'image est relativement compacte en norme. On a montré dans [2] qu'il existe un espace probabilisé pathologique $(\Omega, \Sigma, \bar{\mu})$ tel que le couple $((\Omega, \Sigma, \bar{\mu}), l^\infty(\mathbb{N}))$ ne possède pas la propriété (P). On a également montré que sous des hypothèses assez faibles de théorie des ensembles, et si l'espace (Ω, Σ, μ) est raisonnable, alors pour tout espace de Banach E, le couple $((\Omega, \Sigma, \mu), E)$ possède (P). On va étudier

(*) Texte reçu le 20 novembre 1979.

Michel TALAGRAND, Équipe d'analyse, Tour 46, Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1980/475/$ 5.00

ici le problème de savoir quels sont les espaces de Banach E possédant la propriété, dite (Q), que pour tout espace probabilisé (Ω, Σ, μ), le couple $((\Omega, \Sigma, \mu), E)$ possède (P), autrement dit, quels sont les espaces de Banach E tels que toute fonction Pettis-intégrable bornée à valeurs dans E définisse une mesure dont l'image est relativement compacte en norme.

Le principal résultat de ce travail est de montrer que sous l'axiome de Martin (AM) (on renvoie à [3] pour la formulation de cet axiome) si E ne possède pas de quotient isomorphe à $l^\infty = l^\infty(\mathbb{N})$ alors E possède (Q). On montrera ensuite grâce au même axiome, qu'il n'est guère possible d'améliorer ce résultat. En effet, il existe un espace de Banach qui ne possède pas (Q) sans contenir l^∞, et il existe un espace de Banach qui possède à la fois (Q) et des quotients isomorphes à l^∞.

Le lemme suivant est élémentaire.

LEMME 1. — *Soit E un espace de Banach et (x'_n) une suite de la boule unité de E'. Supposons qu'il existe des réels $\rho < \sigma$ tels que pour toute partie $M \subset \mathbb{N}$, il existe $x \in E$ avec $\|x\| \leqslant 1$ et $x'_n(x) \geqslant \sigma$ pour $n \in M$, $x'_n(x) \leqslant \rho$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus M$. Alors l'application θ de E dans l^∞ donnée par $\theta(x) = (x'_n(x))$ est surjective.*

Preuve. — Soit M une partie de $\mathbb{N}$. Il existe $x \in E$, $\|x\| \leqslant 1$ avec $x'_n(x) \geqslant \sigma$ pour $n \in M$, $x'_n(x) \leqslant \rho$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus M$ et il existe $x' \in E$, $\|x'\| \leqslant 1$ avec $x'_n(x') \leqslant \rho$ pour $n \in M$, $x'_n(x') \geqslant \sigma$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus M$. Posons $y = (x - x')/2$. On a $\|y\| \leqslant 1$, et si on pose $\tau = (\sigma - \rho)/8$, on a $x'_n(y) \geqslant 4\tau$ pour $n \in M$ et $x'_n(y) \leqslant -4\tau$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus M$.

Soit maintenant $t = (t_n) \in l^\infty$. Soit $M = \{n;\ t_n \geqslant \|t\|/2\}$. D'après ce qui précède, il existe $x \in E$ avec $\|x\| \leqslant \|t\|/4$, et $x'_n(x) \geqslant \tau \|t\|$ pour $n \in M$, $x'_n(x) \leqslant -\tau \|t\|$ pour $n \notin M$. Pour $n \in M$ on a $t_n - x'_n(x) \leqslant \|t\|(1-\tau)$, et pour $n \notin M$ on a (puisque $\tau < 1/4$) :

$$-\|t\|(1-\tau) = -\|t\| + \tau\|t\| \leqslant t_n - x'_n(x) \leqslant \|t\|/2 + \|t\|/4 \leqslant \|t\|(1-\tau).$$

Il en résulte que $\|t - \theta(x)\| \leqslant \|t\|(1-\tau)$, où $\|x\| \leqslant \|t\|/4$. Par induction il existe une série $(x_n) \in E$ avec

$$\|x_n\| \leqslant \|t\|(1-\tau)^{n-1}/4 \qquad \text{et} \qquad \|t - \textstyle\sum_{i \leqslant n} \theta(x_i)\| \leqslant \|t\|(1-\tau)^n$$

Le résultat en découle.

On dira qu'un sous-ensemble X de la boule unité de E' est *normant* s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E$, il existe $x' \in X$ avec

$$|x'(x)| \geqslant \delta \|x\|.$$

THÉORÈME 2 (AM). — *Soit E un espace de Banach qui ne possède pas la propriété (Q). Alors, pour tout sous-ensemble normant et* $\sigma(E', E)$ *fermé X de E', il existe une suite* (x'_n) *de X telle que l'application de E dans* l^∞ *donnée par* $x \to (x'_n(x))$ *soit surjective.*

Preuve. — Soit (Ω, Σ, μ) un espace probabilisé et $\varphi : \Omega \to E$ une application Pettis-intégrable bornée, telle que la mesure associée n'ait pas une image relativement compacte en norme.

L'application $x' \to x' \circ \varphi$ de X dans l'espace des fonctions mesurables sur Ω, muni de la topologie de la convergence ponctuelle, est continue pour la topologie $\sigma(E', E)$. Il en résulte que son image K est compacte pour la topologie de la convergence ponctuelle.

Il existe par hypothèse une suite (A_n) de Σ telle que si b_{A_n} est donnée par

$$x'(b_{A_n}) = \int_{A_n} x' \circ \varphi \, d\mu \qquad \text{pour} \quad x' \in E',$$

on ait $\| b_{A_m} - b_{A_n} \| \geqslant \varepsilon$ pour $n \neq m$ et $\varepsilon > 0$. Puisque X est normant cela montre qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour $n \neq m$, il existe $t \in K$ avec $\left| \int_{A_n} t - \int_{A_m} t \right| \geqslant \delta$, et ainsi la suite χ_{A_n} ne converge pas uniformément sur K, lorsque l'on regarde K comme sous-ensemble de $L^2(\mu)'$. Puisque l'on peut supposer que χ_{A_n} converge faiblement dans $L^2(\mu)$, cela montre que K n'est pas précompact pour la norme de $L^2(\mu)$, donc pas précompact en mesure, puisqu'il est uniformément borné.

La preuve du théorème 33 de [4] (où intervient (AM)) montre qu'il existe une partie P de Ω, ayant la puissance du continu, et des réels $\rho < \sigma$, tels que pour toute partie $Q \subset P$ il existe $h_Q \in K$, avec $h_Q(t) \geqslant \sigma$ pour $t \in Q$ et $h_Q(t) \leqslant \rho$ pour $t \in P \setminus Q$.

Il existe dans P une suite Q_n d'ensembles indépendants, c'est-à-dire tels que pour toute partie $M \subset \mathbb{N}$, l'ensemble $Q_M = \bigcap_{n \in M} Q_n \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus M} (P \setminus Q_n)$ soit non vide. (On le voit par exemple en identifiant P à $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, et en prenant pour Q_n l'ensemble des points dont la coordonnée de rang n est 1.) Soit $x'_n \in X$ tel que $x'_n \circ \varphi = h_{Q_n}$. Pour tout n et tout $t \in P$ on a $x'_n(\varphi(t)) = h_{Q_n}(t)$. Pour une partie $M \subset \mathbb{N}$, et pour $t \in Q_M$, on a $x'_n(\varphi(t)) \geqslant \sigma$ pour $n \in M$ (car alors $t \in Q_n$) et $x'_n(\varphi(t)) \leqq \rho$ pour $n \notin M$ (car alors $t \in P \setminus Q_n$). Le résultat découle alors du lemme 1.

COROLLAIRE 3 (AM). — *Soit E un espace de Banach tel que* l^∞ *ne soit pas quotient de E. Alors E possède la propriété (Q). Autrement dit, toute fonction*

Pettis-intégrable bornée à valeurs dans E définit une mesure dont l'image est relativement compacte en norme.

On va maintenant donner un exemple qui montre entre autre que si E ne contient pas l^∞, il ne possède pas nécessairement (Q). Rappelons que l'on dit qu'un espace de Banach possède la propriété de Grothendieck si toute suite de E' qui converge pour $\sigma(E', E)$ converge pour $\sigma(E', E'')$.

THÉORÈME 4 (AM). — *Il existe un compact K tel que $\mathscr{C}(K)$ ne possède pas la propriété (Q), mais tel que pour tout espace de Banach E qui possède la propriété de Grothendieck, tout opérateur de E dans $\mathscr{C}(K)$ soit faiblement compact. En particulier $\mathscr{C}(K)$ ne contient pas l^∞.*

Preuve. — Soit ω_1 le premier ordinal ayant la puissance du continu, et soit $(U_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ une énumération des ouvert-fermés de $\beta\,\mathbb{N}$ avec $U_0=\beta\,\mathbb{N}$. On identifie $\mathbb{N}$ à un sous-ensemble de $\beta\,\mathbb{N}$. Soit A l'ensemble $\beta\,\mathbb{N}\times[0, \omega_1]\diagdown\mathbb{N}\times[0, \omega_1[$. Considérons sur A l'algèbre A engendrée par les traces sur A des sous-ensembles de la forme $U_\beta\times]\alpha, \omega_1]$ pour $\beta\leqslant\alpha$. Le théorème de représentation de Stone permet d'identifier A à l'algèbre des ouvert-fermés d'un compact K, et chaque point de A à un point de K. Cette identification n'est pas une injection, mais l'application de $\beta\,\mathbb{N}$ dans K qui envoie u sur (u, ω_1) est un homéomorphisme sur son image. On peut donc considérer $\beta\,\mathbb{N}$ comme un sous-espace de K. Dans cette identification les points de K correspondant à ceux de $\mathbb{N}$ sont isolés.

Pour tout $\alpha<\omega_1$ soit V_α l'ouvert-fermé de K associé à

$$\beta\,\mathbb{N}\times]\alpha, \omega_1]\diagdown\mathbb{N}\times[0, \omega_1[.$$

C'est un voisinage de $\beta\,\mathbb{N}$, et il est clair que les V_α forment une base de voisinage de $\beta\,\mathbb{N}$. Pour tout α, le compact $K\diagdown V_\alpha$ possède une base d'ouverts de cardinal < card $\mathbb{R}$, puisque la restriction de A à $A\diagdown(\beta\,\mathbb{N}\times]\alpha, \omega_1])$ est engendrée par les traces des ensembles $U_\beta\times]\gamma, \omega_1]$ pour $\beta\leqslant\gamma\leqslant\alpha$. Il en résulte en particulier que $K\diagdown\beta\,\mathbb{N}$ est séquentiellement compact (c'est-à-dire que toute suite possède une sous-suite convergente). En effet toute suite de $K\diagdown\beta\,\mathbb{N}$ est contenue dans un $K\diagdown V_\alpha$, et cet ensemble est séquentiellement compact d'après le théorème 8 de [3].

Soit E un espace de Banach possédant la propriété de Grothendieck et T un opérateur de E dans $\mathscr{C}(K)$. Pour montrer que T est faiblement compact, on va montrer que son transposé T' est faiblement compact. En identifiant K à un sous-ensemble de $\mathscr{C}(K)'$, il suffit d'après le théorème de Krein de montrer que $T'(K)$ est relativement faiblement compact. Or T' est continu de K

dans E' lorsque E' est muni de la topologie $\sigma(E', E)$. Puisque $K\setminus\beta\mathbb{N}$ est séquentiellement compact, l'hypothèse sur E et le théorème d'Eberlein montrent que $T'(K\setminus\beta\mathbb{N})$ est relativement faiblement compacte, c'est-à-dire contenu dans un ensemble faiblement compact C de E'. Puisque C est faiblement compact, il est $\sigma(E', E)$-fermé. Or $\overline{K\setminus\beta\mathbb{N}}\supset\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, puisque pour $u\in\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ on a $(u, \omega_1)=\lim_{\alpha\to\omega_1}(u, \alpha)$. Par continuité de T on a donc $T(K\setminus\mathbb{N})\subset C$.

Pour $n\in N$, posons $T(n)=a_n$. Il suffit de montrer que l'ensemble des a_n est relativement faiblement compact, ou encore d'après l'hypothèse sur E que toute sous-suite (a'_n) de (a_n) possède une sous-suite $\sigma(E', E)$-convergente. Soit H l'ensemble des valeurs d'adhérence de (a'_n) pour $\sigma(E', E)$. La continuité de T montre que $H\subset C$. D'après le théorème de [5], il existe alors un point a de H où l'application identité de $(H, \sigma(E', E))$ dans $(H, \|\ \|)$ est continue. En particulier, il existe des éléments $x_n\in E$ tels que pour $b\in H$, $x_n(b)=x_n(a)\Rightarrow b=a$. Il existe une sous-suite a''_n de a'_n telle que $\forall m$, $\lim_n x_m(a''_n)=a_m(a)$. Il en résulte que la suite a''_n possède au plus une valeur d'adhérence pour $\sigma(E', E)$ ce qui termine la preuve du fait que T est faiblement compact.

Nous allons montrer maintenant que $\mathscr{C}(K)$ ne satisfait pas (Q). Dans [2] on prouve l'existence d'un espace mesuré $(\Omega, \Sigma, \bar{\mu})$ et d'une application Pettis-intégrable de Ω dans la boule unité de l^∞ telle que l'image de la mesure associée ne soit pas relativement compacte en norme. L'espace Ω possède la puissance du continu, et on peut donc l'énumérer par $\Omega=(t_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$. De plus pour chaque $A\in\Sigma$, on a $b_A\in c_0(\mathbb{N})$. Pour chaque α soit $f_\alpha\in\mathscr{C}(K)$ telle que f_α soit nulle sur le complémentaire de V_α, que $\|f_\alpha\|\leqslant 1$ et que la restriction de f_α à $\beta\mathbb{N}$ soit $\varphi(t_\alpha)$ (où l'on identifie l^∞ et $\mathscr{C}(\beta\mathbb{N})$). Soit ψ l'application de Ω dans E donnée par $\psi(t_\alpha)=f_\alpha$. Puisque pour chaque $A\in\Sigma$ on a $b_A\in c_0(\mathbb{N})$ et que les points de $\mathbb{N}$ sont isolés dans K il existe $b'_A\in\mathscr{C}(K)$ dont la restriction à $\mathbb{N}$ vaille b_A et qui soit nulle en dehors de $\mathbb{N}$. On va montrer que pour toute mesure λ sur K, $t\to\lambda(\psi(t))$ est mesurable et que l'on a :

$$\lambda(b'_A)=\int\lambda(\psi(t))\,d\bar{\mu}(t). \tag{1}$$

Si λ est portée par $K\setminus\beta\mathbb{N}$, alors il existe α tel que $K\setminus V_\alpha$ porte λ. Pour $\gamma>\alpha$ on a donc par construction $\lambda(\psi(t_\gamma))=0$. Ainsi l'ensemble des t tels que $\lambda(\psi(t))\neq 0$ est de cardinal $<$ card $\mathbb{R}$. Puisque $\bar{\mu}$ est extension d'une mesure diffuse sur une tribu séparable, on en déduit, grâce au théorème 3 de [3], que $\lambda(\psi(t))=0$ $\bar{\mu}$ p.p., donc que (1) est vérifiée.

Si λ est portée par $\beta \mathbb{N}$, en identifiant λ à une mesure sur $\beta \mathbb{N}$, on a par construction $\lambda(\psi(t))=\lambda(\varphi(t))$ pour tout t; et ainsi (1) est encore vérifiée.

Par additivité on voit que (1) est vérifiée pour tout n, ce qui montre que ψ est Pettis-intégrable.

Enfin l'ensemble des b'_A étant isométrique à celui des (b_A) n'est pas relativement compact en norme, ce qui termine tout.

THÉORÈME 5 (AM). — *Il existe un compact séparable* K, *tel que tout point de* K *possède une base de voisinages de cardinal* $<$card $\mathbb{R}$, *et que* l^{∞} *soit quotient de* $\mathscr{C}$(K) *par une application positive.*

Preuve. — Soit Δ l'ensemble de Cantor, considéré comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et soit λ sa mesure canonique. Posons pour $n \geqslant 1$, $\Delta_n = \Delta \times \{1/n\} \subset \mathbb{R}^2$ et $\Delta_{\infty} = \Delta \times \{0\}$. On pose $L = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \Delta_i$ et on désigne par λ_i la mesure canonique de Δ_i.

Désignons par ω_1 le premier ordinal ayant la puissance du continu. Soit $(t_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ une énumération de Δ_∞ et $(M_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ une énumération des parties de $\mathbb{N}$.

Fixons $\alpha < \omega_1$. D'après le théorème 3 de [3], l'ensemble des $(t_\beta)_{\beta \leqslant \alpha}$ étant de cardinal $<$card $\mathbb{R}$, est λ_∞-négligeable. Il existe donc un ouvert U^α de Δ_∞ avec $\lambda_\infty(U^\alpha) \leqslant 1/4$ et $\beta \leqslant \alpha \Rightarrow t_\beta \in U^\alpha$. On peut écrire $U^\alpha = \bigcup_n U_n^\alpha \times \{0\}$, où chaque U_n est un ouvert-fermé de Δ, et où la suite U_n est croissante. Pour chaque n, on a $\lambda_n(U_n \times \{1/n\}) \leqslant 1/4$. Posons $V_n^\alpha = \Delta_n \setminus U_n^\alpha \times \{1/n\}$ pour $n \in M_\alpha$ et $V_n^\alpha = \emptyset$ pour $n \notin M_\alpha$. Posons $A_\alpha = \overline{U V_n^\alpha}$, $B_\alpha = \overline{L \setminus A_\alpha}$. Ce sont deux fermés de L, dont la réunion est L. De plus $A_\alpha \cap B_\alpha \cap \Delta_n = \emptyset$ pour $n \geqslant 1$, et pour tout $\beta \leqslant \alpha$, on a $t_\beta \notin A_\alpha$, puisque pour n assez grand $t_\beta \in U_n^\alpha \times \{0\}$ et que $A_\alpha \cap \bigcup_{p \geqslant n} U_n^\alpha \times \{1/p\} = \emptyset$.

Posons :

$$K' = \{(x, y) \in L \times \{0, 1\}^{\omega_1};\ \forall \alpha < \omega_1,\ y_\alpha = 1 \Rightarrow x \in A_\alpha,\ y_\alpha = 0 \Rightarrow x \in B_\alpha\}$$

et désignons par π la projection canonique de K' sur L.

Soit $z=(x, y) \in K'$. Si $x = \pi(z) \notin \Delta_\infty$, on a $z = \pi^{-1}(\{x\})$, donc $\{z\}$ est un $G\delta$. Si $x \in \Delta_\infty$, soit $\beta < \omega_1$ tel que $x = t_\beta$. Pour $\alpha \geqslant \beta$ et $z' = (x, y) \in K'$ on a $\pi_\alpha(y) = 0$. Il en résulte que si $y'_\gamma = y_\gamma$ pour $\gamma < \beta$, on a $z' = z$, ce qui montre que $\{z'\}$ est intersection d'une famille d'ouverts de cardinal $<$card $\mathbb{R}$. Pour tout n soit μ_n une probabilité sur K' telle que $\pi(\mu_n) = \lambda_n$. Pour $\alpha < \omega_1$ soit f_α la fonction caractéristique de l'ensemble $C_\alpha = \{(x, y) \in K';\ y_\alpha = 1\}$. Puisque π est une bijection sur $\pi^{-1}(\Delta_n)$, on a :

$$\mu_n(f_\alpha) = \mu_n(C_\alpha) = \mu_n(\pi^{-1}(\pi(C))) = \lambda_n(\pi(C)) = \lambda_n(V_n^\alpha)$$

on a donc $\mu_n(f_\alpha) \geqslant 3/4$ pour $n \in M_\alpha$ et $\mu_n(f_\alpha) = 0$ pour $n \notin M_\alpha$.

Puisque les M_α énumèrent les parties de $\mathbb{N}$, le lemme 1 montre que l^∞ est quotient de $\mathscr{C}(K)$, où $K = \overline{\bigcup_n \pi^{-1}(\Delta_n)}$ est séparable.

COROLLAIRE 6 (AM). — *Il existe un espace compact K tel que $\mathscr{C}(K)$ vérifie (Q) mais que l^∞ soit quotient de $\mathscr{C}(K)$ par une application positive.*

Preuve. — Considérons l'espace K précédemment construit. Prouvons que $\mathscr{C}(K)$ vérifie la propriété (Q). Dans le cas contraire, puisque K peut être identifié à un ensemble normant de $\mathscr{C}(K)'$, il existe d'après le théorème 2 une suite (t_n) de K telle que l'application θ de $\mathscr{C}(K)$ dans l^∞ donnée par $\theta(f) = (f(t_n))$ soit surjective. Si H désigne l'adhérence des t_n, on en déduit que l'application η de $\mathscr{C}(H)$ dans l^∞ donnée par $\eta(g) = g(t_n))$ est une isométrie. Il en résulte que H est homéomorphe à $\beta\,\mathbb{N}$. Mais ceci est absurde car d'après le théorème 4 de [3], toute intersection d'une famille de cardinal $<\operatorname{card}\mathbb{R}$ ouverts de $\beta\,\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ qui est non vide, est d'intérieur non vide, et aucun point de $\beta\,\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ ne peut posséder de base de voisinages de cardinal $<\operatorname{card}\mathbb{R}$, ce qui conclut la preuve.

Le théorème 5 possédant un intérêt en soi, on va pour conclure discuter quelques problèmes qui lui sont reliés. Si on renforce (AM) par l'hypothèse du continu (HC), on a :

COROLLAIRE 7 (HC). — *Il existe un compact séparable K dont tout point soit un G_δ, et tel que l^∞ soit un quotient de $\mathscr{C}(K)$ par une application positive.*

Le résultat suivant montre en particulier que K ne peut pas être choisi convexe.

PROPOSITION 8. — *Soit K un convexe compact dont tout point soit un G_δ. Désignons par B la boule unité de $\mathscr{C}(K)'$, munie de la topologie vague. Alors tout point μ de $S = \{\lambda \in B;\ \|\lambda\| = 1\}$ est un G_δ de B, et si K n'est pas métrisable, tout point de B qui est un G_δ est de norme* 1. *De plus l^∞ n'est pas quotient de $\mathscr{C}(K)$.*

Preuve. — Soit $\mu \in S$ et b le barycentre de $|\mu|$. Il est clair qu'il existe un convexe compact métrisable L et une surjection affine continue φ de K sur L telle que $b = \varphi^{-1}(\varphi(b))$ et que $\|\varphi(\mu)\| = 1$. On a donc $\varphi(|\mu|) = |\varphi(\mu)|$. On va montrer que si $\lambda \in S$ est tel que $\varphi(\lambda)=\varphi(\mu)$, on a $\lambda=\mu$, ce qui montrera que $\{\mu\}$ est un G_δ de B. Supposons $\lambda \neq \mu$. Il existe alors un convexe compact métrisable L', des surjections affines φ'' de K sur L', φ' de L' sur L, avec $\varphi=\varphi' \circ \varphi''$, de sorte que $\varphi''(\lambda) \neq \varphi''(\mu)$.

Si (h_n) désigne une suite de fonctions affines continues qui séparent L', l'ensemble G des points de L' dont l'image réciproque n'est pas réduite à un point est égal à :

$$\bigcup_{n:\, r<s,\, r,\, s\in\mathbb{Q}} \varphi'(\{h_n \geqslant s\}) \cap \varphi'(\{h_n \leqslant r\})$$

c'est donc une réunion dénombrable de convexes compacts. Montrons que $|\varphi(\mu)|(G)=0$. Sinon, il existe un convexe compact $G' \subset G$, avec $|\varphi(\mu)|(G')>0$. On peut écrire $\varphi(|\mu|)=\theta\mu_1+(1-\theta)\mu_2$, où $0<\theta<1$, $\mu_1\,\mu_2 \in M_1^+(L)$, μ_1 portée par G'. Soient c_1 et c_2 leurs barycentres respectifs. On a $c_1 \in G' \subset G$. On a $\varphi(b)=\theta c_1+(1-\theta)c_2$. Mais puisque $\theta>0$, ceci implique sans peine que $\varphi(b) \in G$, ce qui est absurde.

Il en résulte que $\varphi''(\mu)$ est portée par $L' \setminus \varphi'^{-1}(G)=H$. Et donc que $\varphi''(\lambda)$ est aussi portée par H. Mais sur H, φ' est injective. On ne peut donc avoir $\varphi''(\lambda) \neq \varphi''(\mu)$, puisque les images par φ' de ces deux mesures coïncident. Ainsi $\{\mu\}$ est un G_δ de S.

Si H est un G_δ de S qui contient μ, alors $H \supset \varphi^{-1}\varphi(\mu) \cap B$ où φ est une application affine continue de K sur un convexe compact métrisable L. Si K n'est pas métrisable, alors φ n'est pas injective. Soit a, $b \in K$ avec $a \neq b$, $\varphi(a)=\varphi(b)$. Si $|\mu|<1$, alors :

$$\mu+\varepsilon(\delta_a-\delta_b) \in H \cap B \qquad \text{pour} \quad \varepsilon \text{ assez petit.}$$

Si l^∞ est un quotient de $\mathscr{C}(K)$, alors par transposition et homothétie il existe une injection η de $\beta\,\mathbb{N}$ dans B. Rappelons que tout G_δ non vide de $\beta\,\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ est d'intérieur non vide. Pour tout G_δ non vide G de $\beta\,\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, posons $\alpha(G)=\operatorname{Sup}\{\|\eta(t)\|;\, t \in G\}$. On a toujours $\alpha(G)>0$. Définissons une suite décroissante G_n de G_δ de $\beta\,\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ de sorte que $G_0=\beta\,\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ et

$$\alpha(G_{n+1}) \leqslant \operatorname{Inf}\{\alpha(G');\, G' \subset G,\, G' \text{ est un } G_\delta \text{ non vide}\}+2^{-n}.$$

Si l'on pose $G=\bigcap_n G_n$, il est clair que pour tout G_δ non vide G' de G, on a $\alpha(G')=\alpha(G)$.

Pour tout n, l'ensemble

$$\{t \in G;\, \|\eta(t)\| \geqslant \alpha(G)-1/n\}$$

est fermé dans G, la norme étant s.c.s. pour la topologie vague. Son complémentaire est un ouvert G' de G pour lequel $\alpha(G') \leqslant \alpha(G) - 1/n$. On a donc $G' = \emptyset$, ce qui montre que $\| \eta(t) \| = \alpha(G)$ pour $t \in G$. Mais ceci montre que $\eta(t)$ est un G de la boule $\alpha(G) B$, donc t est un G_δ de G, donc un G_δ de $\beta \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, ce qui est absurde.

PROBLÈME 9. — (*a*) Le compact du corollaire 7 peut-il être choisi héréditairement séparable ?

(*b*) Supposons $MA + \neg CH$. Existe-t-il un espace compact ayant les propriétés décrites au corollaire 7 ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] DISTEL (J.) and UHL (J.). — Vector measures, *A.M.S. Math. Surveys*, vol. 15.

[2] FREMLIN (D. H.) and TALAGRAND (M.). — A decomposition theorem for additive set functions with applications to Pettis integrals and ergodic means, *Math. Z.*, vol. 168, 1979, p. 117-142.

[3] SHOENFIELD (R.). — Martin's axiom, *Amer. Math. Monthely J.*, vol. 32, 1975, p. 610-617.

[4] TALAGRAND (M.). — Filtres non mesurables et compacts de fonctions mesurables (à paraître dans *Studia Math.*).

[5] TALAGRAND (M.). — Deux généralisations d'un théorème de I. Namioka, *Pacific J. of Math.*, vol. 81, 1979, p. 239-251.