BULLETIN DE LA S. M. F.

HENRI COHEN

Généralisation d'une construction de R. Apéry

Bulletin de la S. M. F., tome 109 (1981), p. 269-281
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1981__109__269_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
109, 1981, p. 269-281.

GÉNÉRALISATION D'UNE CONSTRUCTION DE R. APÉRY

PAR

HENRI COHEN (*)

1. Introduction

Dans sa démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$, Apéry introduit un tableau triangulaire $(c_{n,k})_{n \geq k \geq 0}$ avec :

$$c_{n,k} = \sum_{1 \leq m \leq n} \frac{1}{m^3} + \sum_{1 \leq m \leq k} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3 \binom{n}{m} \binom{n+m}{m}},$$

qui possède les propriétés suivantes :

(a) $c_{n,k}$ approche de façon exponentielle $\zeta(3)$, donc fournit un moyen d'accélérer la convergence de $\sum_{m \geq 1} 1/m^3$. Plus précisément $|\zeta(3) - c_{n,n}| = O(4^{-n})$;

(b) $c_{n,k}$ a de bonnes propriétés arithmétiques : son dénominateur ne croît pas trop vite. Plus précisément, si on pose d_n = le plus petit commun multiple de 1, 2, ..., n, on a :

$$2 d_n^3 \binom{n+k}{k} c_{n,k} \in \mathbb{Z}.$$

Il est instructif de comparer ceci au tableau triangulaire fourni par la formule sommatoire d'Euler-MacLaurin. Si on pose :

$$d_{n,k} = \sum_{1 \leq m \leq n} \frac{1}{m^3} + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq m \leq 2k} \frac{m b_{m-1}}{n^{m+1}},$$

(*) Texte reçu le 25 février 1980, révisé le 24 octobre 1980.

Henri COHEN, Laboratoire de Mathématiques pures, Institut Fourier dépendant de l'Université scientifique et médicale de Grenoble associé au C.N.R.S., B. P. n° 116, 38402 Saint-Martin d'Hères.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1981/269/$ 5.00
© Gauthier-Villars

où les b_i sont les nombres de Bernoulli ($b_0=1$, $b_1=-1/2$, $b_2=1/6$, $b_3=0$, $b_4=-1/30$, etc.) alors :

(*c*) $d_{n,k}$ approche de façon exponentielle $\zeta(3)$, plus rapidement que $c_{n,k}$. Plus précisément : $$|\zeta(3)-d_{n,[\pi n]}|=O(e^{-2\pi n}).$$

La convergence en 4^{-n} est donc remplacée par une convergence en 535^{-n}, ce qui est beaucoup plus rapide;

(*d*) $d_{n,k}$ a de mauvaises propriétés arithmétiques. Le dénominateur de $d_{n,[\pi n]}$ est au moins de l'ordre de $n^{2\pi n}$, comparé a un dénominateur de l'ordre de $(4e^3)^n$ pour $c_{n,k}$. A cause de ces mauvaises propriétés arithmétiques, il est peu probable que l'on puisse utiliser les $d_{n,k}$ dans une démonstration d'irrationalité, et c'est ce qui donne toute sa valeur aux $c_{n,k}$ d'Apéry.

Nous nous proposons ici de généraliser à d'autres fonctions que $1/m^3$ la méthode d'accélération d'Apéry, en conservant les propriétés (*a*) et (*b*). Nous n'obtiendrons pas de nouveau résultat d'irrationalité, mais c'est peut-être un pas dans la direction de tels résultats.

NOTATIONS. – Nous utiliserons la notation $x\,!$ à la place de $\Gamma(x+1)$. D'autre part, une somme du type $\sum_{1\leq m\leq A}$ a pour convention la valeur 0 pour $A=0$.

2. Une construction générale

Nous nous intéressons bien sûr avant tout à la généralisation des $c_{n,k}$ pour $\zeta(2p+1)$. Nous allons placer cela dans un contexte un peu plus général.

Soit g une fonction satisfaisant aux hypothèses suivantes :

$$(\star)\qquad \begin{cases} (a)\ g \text{ est une fonction entière nulle en } 0,\\ (b)\ \text{il existe } \alpha\in[0,1[\text{ tel que } g^{(k)}(0)=O(\alpha^k). \end{cases}$$

On peut considérablement affaiblir les hypothèses ($\star$) pour pouvoir effectuer la construction qui va suivre, mais nous n'en aurons pas besoin. Pour une telle fonction g nous poserons pour $|x|<1$:

$$g^{(k)}(2\,\mathrm{Log}\,(x+\sqrt{x^2+1}))=\sum_{m\geq 0} d_m^{(k)}(g)\frac{(2x)^m}{m\,!}$$

et $d_m(g)=d_m^{(0)}(g)$. Ces coefficients sont bien définis d'après (*a*).

Enfin, nous appellerons f la transformée de Laplace de g :

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-xt}g(t)\,dt.$$

L'hypothèse (*b*) assure que $f(x)$ existe pour $x \geqslant 1$.

PROPOSITION 2.1. — *La série* $\sum_{m\geqslant 1} f(m)$ *converge et on a :*

$$S(f)=\sum_{m\geqslant 1} f(m)=\int_0^\infty \frac{g(t)}{e^t-1}\,dt.$$

En effet, il est clair que :

$$\sum_{m=1}^n f(m)=\int_0^\infty \frac{g(t)}{e^t-1}\,dt-\int_0^\infty \frac{e^{-nt}}{e^t-1}\,g(t)\,dt,$$

les deux intégrales convergeant grâce aux hypothèses ($\star$) (noter que $g(t)\sim tg'(0)$ quant $t\to 0$). La fonction $|g(t)/(e^t-1)|$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ donc la deuxième intégrale tend vers 0 quand $n+\infty$, d'où la proposition.

Le théorème fondamental de cet article est le suivant :

THÉORÈME 2.2. — *Posons :*

$$c_{n,k}(f)=\sum_{1\leqslant m\leqslant n} f(m)+\sum_{1\leqslant m\leqslant 2k} \frac{d_m(g)(n-(m/2))\,!}{m(n+(m/2))\,!}.$$

On a alors pour $n\geqslant 1$ *et* $0\leqslant k\leqslant n-1$ *:*

$$c_{n,k}(f)-c_{n-1,k}(f)=\frac{(n-k-(1/2))\,!}{(n+k-(1/2))\,!}\sum_{l\geqslant 0} \frac{d_{2k+1}^{(2l)}(g)}{n^{2l+2}}+\frac{(n-k-1)\,!}{(n+k)\,!}\sum_{l\geqslant 0} \frac{d_{2k+2}^{(2l)}(g)}{n^{2l+2}}.$$

De ce théorème, il nous sera facile de déduire que les $c_{n,k}(f)$ accélèrent la convergence de la série $\sum_{1\leqslant m\leqslant n} f(m)$ et plus précisément que $|S(f)-c_{n,n}(f)|=O(4^{-n})$,

Démonstration. — On a :

$$c_{n,k}(f)-c_{n-1,k}(f)=f(n)+\sum_{1\leqslant m\leqslant 2k} \frac{d_m(g)}{m}\times\left[\frac{(n-(m/2))!}{(n+(m/2))!}-\frac{(n-1-(m/2))!}{(n-1+(m/2))!}\right]$$

$$=-\frac{(n-1-(m/2))!}{(n+(m/2))!}\left(\sum_{k\geqslant 0}\frac{d_m^{(2k+2)}(g)}{n^{2k+2}}-\sum_{k\geqslant 0}\frac{d_m^{(2k)}(g)}{n^{2k}}\right)$$

$$=f(n)-\sum_{1\leqslant m\leqslant 2k} d_m(g)\frac{(n-1-(m/2))\,!}{(n+(m/2))\,!}.$$

Posons :

$$b_{m,n}(g) = -\frac{(n-(m/2))\,!}{(n+(m/2)-1)\,!}\sum\nolimits_{k\geq 0}\frac{d_m^{(2k)}(g)}{n^{2k+2}}.$$

Il est facile de voir que les hypothèses ($\star$) entraînent que $d_m^{(2k)}(g)=O(\alpha^{2k})$ (la constante du O dépendant de m) donc puisque $\alpha<1$ la définition de $b_{m,n}(g)$ a bien un sens. Calculons $b_{m+2,n}(g)-b_{m,n}(g)$:

$$\begin{aligned} b_{m+2,n}(g)-b_{m,n}(g) &= -\frac{(n-1-(m/2))\,!}{(n+(m/2))\,!} \\ &\quad\times\sum\nolimits_{k\geq 0}\frac{d_{m+2}^{(2k)}(g)}{n^{2k+2}}+\frac{(n-(m/2))\,!}{(n+(m/2)-1)\,!}\sum\nolimits_{k\geq 0}\frac{d_m^{(2k)}(g)}{n^{2k+2}} \\ &= -\frac{(n-1-(m/2))\,!}{(n+(m/2))\,!}\left(\sum\nolimits_{k\geq 0}\frac{d_{m+2}^{(2k)}(g)}{n^{2k+2}}-\left(n^2-\frac{m^2}{4}\right)\sum\nolimits_{k\geq 0}\frac{d_m^{(2k)}(g)}{n^{2k+2}}\right).\end{aligned}$$

Or en dérivant deux fois la relation de définition des $d_m^{(k)}(g)$ nous obtenons :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}g^{(k+1)}(2\,\mathrm{Log}(x+\sqrt{x^2+1}))=\sum\nolimits_{m\geq 1}d_m^{(k)}(g)\frac{(2x)^{m-1}}{(m-1)\,!}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x^2+1}g^{(k+2)}(2\,\mathrm{Log}\,(x+\sqrt{x^2+1})) \\ &-\frac{x}{2(x^2+1)^{3/2}}g^{(k+1)}(2\,\mathrm{Log}(x+\sqrt{x^2+1})) =\sum\nolimits_{m\geq 2}d_m^{(k)}(g)\frac{(2x)^{m-2}}{(m-2)\,!}.\end{aligned}$$

D'où en multipliant par $x/2$ la première ligne, $(1+x^2)$ la deuxième et en ajoutant :

$$\begin{aligned} g^{(k+2)}(2\,\mathrm{Log}(x+\sqrt{x^2+1})) &= \frac{1}{4}\sum\nolimits_{m\geq 0}md_m^{(k)}(g)\frac{(2x)^m}{m\,!} \\ &\quad+\frac{1}{4}\sum\nolimits_{m\geq 0}m(m-1)\,d_m^{(k)}(g)\frac{(2x)^m}{m\,!}+\sum\nolimits_{m\geq 0}d_{m+2}^{(k)}(g)\frac{(2x)^m}{m\,!}.\end{aligned}$$

On en déduit la relation :

$$d_m^{(k+2)}(g)=d_{m+2}^{(k)}(g)+\frac{m^2}{4}d_m^{(k)}(g).$$

On obtient en reportant dans la formule obtenue plus haut :

$$b_{m+2,\,n}(g)-b_{m,\,n}(g)$$
$$=-\frac{(n-1-(m/2))\,!}{(n+(m/2))\,!}\left(\sum\nolimits_{k\geq 0}\frac{d_m^{(2\,k+2)}(g)}{n^{2\,k+2}}-\sum\nolimits_{k\geq 0}\frac{d_m^{(2\,k)}(g)}{n^{2\,k}}\right)$$
$$=\frac{(n-1-(m/2))\,!}{(n+(m/2))\,!}\,d_m(g).$$

On a donc :

$$c_{n,\,k}(f)-c_{n-1,\,k}(f)=f(n)-\sum\nolimits_{1\leq m\leq 2k}(b_{m+2,\,n}(g)-b_{m,\,n}(g))$$
$$=f(n)-b_{2\,k+1,\,n}(g)-b_{2\,k+2,\,n}(g)+b_{1,\,n}(g)+b_{2,\,n}(g).$$

Or :

$$g^{(k)}(2\,\mathrm{Log}(x+\sqrt{1+x^2}))=g^{(k)}(2\,x+O(x^3))$$
$$=g^{(k)}(0)+2\,xg^{(k+1)}(0)+2\,x^2\,g^{(k+2)}(0)+O(x^3),$$

donc $d_1^{(k)}(g)=g^{(k+1)}(0)$ et $d_2^{(k)}(g)=g^{(k+2)}(0)$. On en déduit que :

$$b_{1,\,n}(g)+b_{2,\,n}(g)=-\sum\nolimits_{k\geq 1}\frac{g^{(k)}(0)}{n^{k+1}}=-\int_0^{\infty}g(u)\,e^{-nu}\,du=-f(n),$$

car l'intégration terme à terme de la série de Taylor de g est justifiée d'après les hypothèses ($\star$). On obtient donc :

$$c_{n,\,k}(f)-c_{n-1,\,k}(f)=-b_{2\,k+1,\,n}(g)-b_{2\,k+2,\,n}(g),$$

ce qui n'est autre que le théorème 2.2.

PROPOSITION 2.3. — *Posons :*

$$c'_{n,\,k}(f)=2\sum\nolimits_{1\leq m\leq n}(-1)^{m-1}\,mf(m)+\sum\nolimits_{1\leq m\leq 2k}(-1)^n\,d_m(g)\frac{(n-(m/2))\,!}{(n+(m/2))\,!},$$

on a alors pour $n\geq 1$ *et* $0\leq k\leq n-1$:

$$c'_{n,\,k}(f)-c'_{n-1,\,k}(f)=(-1)^{n-1}\,2\,n(c_{n,\,k}(f)-c_{n-1,\,k}(f)).$$

Démonstration. — Vérification évidente.

L'intérêt de cette proposition est mis en évidence quand on suppose, en plus des hypothèses ($\star$), que $g'(0)=0$. En effet, g' vérifie alors aussi ($\star$) et cela assure la convergence de la série $\sum_{m\geq 1}(-1)^{m-1}\,mf(m)$, et nous verrons que les $c'_{n,\,k}$ accélèrent la convergence de cette série de la même façon que les $c_{n,\,k}$ accélèrent la convergence de $\sum_{m\geq 1}f(m)$.

3. Une famille de polynômes

Il est utile pour la suite d'introduire une famille de polynômes jouant pour le procédé d'accélération décrit plus haut le même rôle que les polynômes de Bernoulli pour la formule sommatoire d'Euler-MacLaurin.

DÉFINITION 3.1. — *On pose, pour* $|x|<1$:

$$e^{2a\operatorname{Log}(x+\sqrt{1+x^2})}=\sum_{m\geqslant 0}P_m(a)\frac{(2x)^m}{m!} \qquad et \qquad P_m(a)=\sum_{p=0}^{m}b_{m,p}a^p.$$

(On convient que $b_{m,p}=0$ si $p<0$ ou $p>m$.)

Les propriétés des polynômes $P_m(a)$ sont résumées dans la proposition suivante :

PROPOSITION 3.2. — (1) *$P_m(a)$ est un polynôme unitaire de degré m.*

(2) *Les $P_m(a)$ vérifient la relation de récurrence :*

$$P_m\left(a+\frac{1}{2}\right)-P_m\left(a-\frac{1}{2}\right)=m\,P_{m-1}(a).$$

(3) *On a $P_0(a)=1$ et pour $m\geqslant 1$:*

$$P_m(a)=a.\frac{(a+(m/2)-1)!}{(a-(m/2))!}.$$

(4) $P_m(-a)=(-1)^m P_m(a)$.

Démonstration. — (1) et (4) résultent de (3). (2) résulte immédiatement du fait que $\operatorname{sh}(\operatorname{Log}(x+\sqrt{1+x^2}))=x$. Pour (3) on vérifie que les polynômes Q_m définis par $Q_0=1$,

$$Q_m(a)=a.\frac{(a+(m/2)-1)!}{(a-(m/2))!}$$

vérifient la même relation de récurrence (2). Si on pose $R_m(a)=P_m(a)-Q_m(a)$ et que l'on suppose par récurrence que $R_{m-1}(a)=0$ on voit que $R_m(a+(1/2))=R_m(a-(1/2))$ donc que $R_m(a)$ est une constante, donc $R_m(a)=0\ (m\geqslant 1)$ puisque $Q_m(0)=0$ et $P_m(0)=0$ en mettant $a=0$ dans la définition 3.1. D'où la proposition.

Les propriétés des coefficients $b_{m,p}$ sont résumées dans la proposition suivante :

PROPOSITION 3.3. — (1) *$b_{m,p}=0$ si $m-p$ est impair.*

(2)
$$b_{m,0}=0;\ b_{m,2}=(-1)^{(m/2)-1}\left(\frac{m}{2}-1\right)!^2;$$
$$b_{m,4}=(-1)^{m/2}\left(\frac{m}{2}-1\right)!^2\sum_{1\leqslant k\leqslant(m/2)-1}k^{-2}$$

si m est pair;

$$b_{m,1}=(-1)^{(m-1)/2}\frac{((m/2)-1)\,!^2}{(-1/2)\,!^2};$$

$$b_{m,3}=(-1)^{(m+1)/2}\frac{((m/2)-1)\,!^2}{(-1/2)\,!^2}\sum\nolimits_{1\leq k\leq (m-1)/2}\left(k-\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

si m est impair.

(3) *Plus généralement, si $m-p$ est pair :*

$$b_{m,p}=(-1)^{(m-p)/2}\left(\frac{m}{2}-1\right)!^2\frac{\pi^{p-2}}{(p-1)\,!}\theta_{m,p}\qquad ou\quad \theta_{m,p}\in[0,1].$$

Démonstration. — (1) résulte de la proposition 3.2, (4), (2), (3) : pour m pair $\geqslant 2$ on peut écrire d'après la proposition 3.2, (3) :

$$P_m(a)=(-1)^{(m/2)-1}\left(\frac{m}{2}-1\right)!^{\,2}a^2\left(1-\frac{a^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{a^2}{2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{a^2}{((m/2)-1)^2}\right)$$

d'où l'assertion de (2) pour m pair. Pour l'assertion (3) (avec m pair) on remarque que les contributions au terme a^{2q} ont toujours le même signe $(-1)^{(m/2)-1}.(-1)^{q-1}$ et donc que leur somme en valeurs absolue est moins que ce qu'elle serait pour le produit infini, c'est-à-dire :

$$(-1)^{(m/2)-1}\left(\frac{m}{2}-1\right)!^2 a\frac{\sin\pi a}{\pi}$$
$$=(-1)^{m/2}\left(\frac{m}{2}-1\right)!^2\sum\nolimits_{q\geq 1}\frac{\pi^{2q-2}a^{2q}}{(2q-1)\,!}(-1)^q,$$

d'où (3) dans le cas m pair.

De façon analogue, si m est impair :

$$P_m(a)=(-1)^{(m-1)/2}\frac{((m/2)-1)\,!^2}{(-1/2)\,!^2}a\left(1-\frac{4a^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{4a^2}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{4a^2}{(m-2)^2}\right)$$

et la même démonstration que dans le cas m pair marche, en remarquant que :

$$a\frac{\cos\pi a}{\pi}=\frac{a}{(-1/2)\,!^2}\left(1-\frac{4a^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{4a^2}{3^2}\right)\ldots$$

4. Convergence et vitesse de convergence

PROPOSITION 4.1. — *Avec les notations des paragraphes précédents, on a :*

$$d_m^{(k)}(g)=\sum_{p=0}^{m} g^{(p+k)}(0)\, b_{m,\,p}.$$

Démonstration. — On a :

$$e^{2a\,\mathrm{Log}(x+\sqrt{1+x^2})}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{m} b_{m,\,p}\, a^p \frac{(2x)^m}{m\,!}$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty} a^p \sum_{m=p}^{\infty} b_{m,\,p}\frac{(2x)^m}{m\,!}.$$

Il résulte donc du développement en série entière de e^{au} que :

$$\sum_{m=p}^{\infty} b_{m,\,p}\frac{(2x)^m}{m\,!}=\frac{(2\,\mathrm{Log}\,(x+\sqrt{1+x^2}))^p}{p\,!}.$$

On a donc :

$$g^{(k)}(2\,\mathrm{Log}(x+\sqrt{1+x^2}))$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty} g^{(k+p)}(0)\frac{(2\,\mathrm{Log}\,(x+\sqrt{1+x^2}))^p}{p\,!}$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m=p}^{\infty} g^{(k+p)}(0)\, b_{m,\,p}\frac{(2x)^m}{m\,!}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^m}{m\,!}\Big(\sum_{p=0}^{m} g^{(k+p)}(0)\, b_{m,\,p}\Big),$$

d'où la proposition 4.1.

COROLLAIRE 4.2. — *Si g vérifie $(\star)$ avec une certaine constante $\alpha<1$ on a :*

$$|\, d_m^{(k)}(g)\,|\leqslant C.\left(\frac{m}{2}-1\right)!^2\,\alpha^k,$$

où C ne dépend que de g.

En effet, d'après les propositions 3.3 et 4.1 :

$$|\, d_m^{(k)}(g)\,|\leqslant \sum_{p=1}^{m} |\, g^{(p+k)}(0)\,|\left(\frac{m}{2}-1\right)!^2\frac{\pi^{p-2}}{(p-1)\,!}$$

$$\leqslant C_1\left(\frac{m}{2}-1\right)!^2\sum_{p\geqslant 0}\frac{\alpha^{p+k}\pi^p}{p\,!}\leqslant C\left(\frac{m}{2}-1\right)!^2\,\alpha^k$$

avec $C=C_1\, e^{\alpha\pi}$.

COROLLAIRE 4.3. — *Quand* $n \to \infty$, $c_{n,k}$ *converge vers* $S(f)$ *et* $c'_{n,k}$ *converge vers* $S'(f)$, *uniformément pour* $0 \leqslant k \leqslant n$.

En effet, l'estimation du corollaire 4.2 montre que :

$$c_{n,k} - \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} f(m) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

et :

$$c'_{n,k} - 2\sum_{1 \leqslant m \leqslant n} (-1)^{m-1} mf(m) = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

la constante du O ne dépendant pas de $k \leqslant n$.

COROLLAIRE 4.4 : $|c_{n,n} - S(f)| = O(n^{-5/2} 4^{-n})$.

En effet, d'après le théorème 2.2, on a :

$$\begin{aligned} c_{n,n} - c_{n-1,n-1} &= c_{n,n} - c_{n,n-1} + c_{n,n-1} - c_{n-1,n-1} \\ &= \frac{d_{2n-1}(g)}{2n-1} \frac{(1/2)!}{(2n-(1/2))!} + \frac{d_{2n}(g)}{2n(2n)!} \\ &+ \frac{(1/2)!}{(2n-(3/2))!} \sum_{l \geqslant 0} \frac{d_{2n-1}^{(2l)}(g)}{n^{2l+2}} + \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{l \geqslant 0} \frac{d_{2n}^{(2l)}(g)}{n^{2l+2}}. \end{aligned}$$

On voit aisément en utilisant la formule de Stirling et le corollaire 4.2 que tous les termes de cette formule sont des $O(n^{-5/2} 4^{-n})$. Le corollaire 4.4 en résulte immédiatement.

COROLLAIRE 4.5. — *Si en plus des hypothèses* ($\star$) *on a* $g'(0)=0$ *et si on pose* $S'(f) = \sum_{m \geqslant 1} (-1)^{m-1} mf(m)$ *alors on a :*

$$|c'_{n,n} - S'(f)| = O(n^{-3/2} 4^{-n}).$$

Ceci résulte immédiatement de la proposition 2.3 et du corollaire 4.4.

5. Applications. Exemples

Prenons $g(t) = t^{2r}/(2r)!$ ($r \geqslant 1$ entier) qui vérifie bien $g'(0)=0$ et les hypothèses ($\star$). On a alors $f(x) = 1/x^{2r+1}$, $d_m^{(k)}(g) = b_{m,2r-k}$ donc $d_m(g)=0$ si m est impair. On obtient :

THÉORÈME 5.1. — (1) *Posons* (*cf.* définition 3.1) :

$$c_{n,k}^r = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \frac{1}{m^{2r+1}} + \sum_{1 \leqslant m \leqslant k} \frac{b_{2m,2r}}{2m} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}.$$

On a alors :

$$c^r_{n,k}-c^r_{n-1,k}=\frac{(n-k-1)!}{(n+k)!}\sum_{l=0}^{r-1}\frac{b_{2k+2\,2r-2l}}{n^{2l+2}}.$$

(2) *On a :*

$$\zeta(2r+1)=\sum_{l=0}^{r-1}\left(2+\frac{\delta_{l0}}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n\,2r-2l}}{n^{2l+1}(2n)!},$$

où δ_{l0} est le symbole de Kronecker, la convergence de cette série étant en $O(n^{-5/2}4^{-n})$.

Pour $r=1$, on retrouve bien les $c_{n,k}$ d'Apéry, et la formule (2) s'écrit, d'après la proposition 3.3 :

$$\zeta(3)=\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!^2}{n(2n)!}=\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}},$$

formule également donnée par Apéry, mais connue [2].

Pour $r=2$ on obtient de façon analogue :

$$\zeta(5)=\frac{5}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^3\binom{2n}{n}}\left(\sum_{1\leq k\leq n-1}k^{-2}-\frac{4}{5n^2}\right).$$

THÉORÈME 5.2. — (1) *Posons :*

$$c'^r_{n,k}=2\sum_{1\leq m\leq n}\frac{(-1)^{m-1}}{m^{2r}}+\sum_{1\leq m\leq k}(-1)^n b_{2m,2r}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}.$$

On a alors :

$$c'^r_{n,k}-c'^r_{n-1,k}=(-1)^{n-1}2\frac{(n-k-1)!}{(n+k)!}\sum_{l=0}^{r-1}\frac{b_{2k+2\,2r-2l}}{n^{2l+1}}.$$

(2) *On a :*

$$(1-2^{1-2r})\zeta(2r)=\sum_{l=0}^{r-1}\left(2-\frac{\delta_{l0}}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n,2r-2l}(-1)^{n-1}}{n^{2l}(2n)!},$$

la convergence de cette série étant en $O(n^{-3/2}4^{-n})$.

Pour $r=1$ on retrouve bien les $c'_{n,k}$ d'Apéry et la formule :

$$\zeta(2)=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!^2}{(2n)!}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\binom{2n}{n}}.$$

Pour $r=2$ on obtient :

$$\frac{7}{8}\zeta(4)=-\frac{3}{2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2\binom{2n}{n}}\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}k^{-2}-\frac{4}{3n^2}\right).$$

Dans ce cas particulier, on peut transformer de façon agréable cette formule. En effet, revenant au théorème 5.2, on a :

$$\frac{7}{8}\zeta(4)=2\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^4\binom{2n}{n}}-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n,4}(-1)^n}{(2n)!}.$$

Or nous avons vu que :

$$\sum_{m=p}^{\infty}b_{m,p}\frac{(2x)^m}{m!}=\frac{(2\,\mathrm{Log}(x+\sqrt{1+x^2}))^p}{p!}.$$

Il résulte de la nullité des $b_{2n+1,4}$ que :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n,4}x^{2n}}{(2n)!}=\frac{(2\,\mathrm{Log}\,((x/2)+\sqrt{1+(x^2/4)}))^4}{24}=\frac{2}{3}\left(\mathrm{Arg\,sh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^4.$$

La série de gauche définit une fonction holomorphe dans le disque $|x|<2$ et on voit aisément qu'on obtient, en changeant x en ix :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n,4}(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=\frac{2}{3}\left(\mathrm{Arc\,sin}\frac{x}{2}\right)^4.$$

En particulier :

$$\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n,4}\frac{(-1)^n}{(2n)!}=\frac{\pi^4}{1296}=\zeta(4).\frac{5}{72}$$

puisque $\zeta(4)=\pi^4/90$. On obtient donc :

$$\left(\frac{7}{8}+\frac{5}{72}\right)\zeta(4)=2\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^4\binom{2n}{n}},$$

soit :

COROLLAIRE 5.3 :

$$\zeta(4)=\frac{36}{17}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^4\binom{2n}{n}}.$$

6. Conclusion

Comme annoncé dans l'introduction, nous avons généralisé la construction d'Apéry et montré que les $c^r_{n,n}$ approchaient exponentiellement $\zeta(2r+1)$. En remarquant que $d_n^{2r-2}\,b_{2m,2r}/(m-1)!^2\in\mathbb{Z}$ pour $m\leqslant n$, on montre facilement comme dans [1] que les dénominateurs des $c^r_{n,k}$ sont bons, et plus précisément que :

PROPOSITION 6.1 :

$$2.d_n^{2r+1}\binom{n+k}{k}c^r_{n,k}\in\mathbb{Z}.$$

Toutefois, nous n'avons, ni généralisé les « coefficients barycentriques » $\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2$ qu'utilise Apéry, ni ses relations de récurrences. Je compte revenir sur ce dernier point dans un prochain papier.

D'autre part, il est possible de placer le processus d'accélération d'Apéry et celui d'Euler-MacLaurin dans un cadre commun plus général : soit $\delta=F(D)=D+a_2D^2+\ldots$ un opérateur (où $D=d/dx$) et $D=F^{-1}(\delta)=\delta-a_2\delta^2+\ldots$ la série formelle réciproque. Si g et u sont des fonctions et si on pose :

$$f(n)=g(-D).u(n),$$

alors on peut accélérer $\sum_{m\geqslant 1}f(m)$ par :

$$c_{n,k}=\sum_{1\leqslant m\leqslant n}f(m)-\sum_{0\leqslant m\leqslant k}\frac{d_m}{m!}\delta^{m-1}u\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

où :

$$\sum_{m\geqslant 0}\frac{d_m}{m!}X^m=\frac{X}{2}\,\frac{g(-F^{-1}(X))}{\mathrm{sh}(F^{-1}(X)/2)}.$$

La famille de polynômes analogues aux $P_m(a)$ est définie par :

$$e^{aF^{-1}(X)} = \sum_{k \geq 0} P_k(a) \frac{X^k}{k!},$$

et on a $\delta P_k(a) = k P_{k-1}(a)$. On retrouve Euler-MacLaurin en prenant $\delta = D$, $u = f(n-(1/2))$ et $g(X) = e^{-X/2}$. On retrouve la construction décrite ici en prenant $\delta = 2 \text{ sh } D/2$, $u = 1/n$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Cohen (H.). – Démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ (d'après R. Apéry), *Séminaire de Théorie des Nombres*, Grenoble, 1978, 9 p.

[2] Van der Poorten (A.). – A Proof that Euler Missed..., *Math. Intelligencer*, vol. 1, n° 4, 1979, p. 195-203.