

BULLETIN DE LA S. M. F.

ALAIN HENAUT

Cycle exceptionnel de l'éclatement de Nash d'une hypersurface analytique complexe à singularité isolée

Bulletin de la S. M. F., tome 109 (1981), p. 475-481

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1981__109__475_0

© Bulletin de la S. M. F., 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CYCLE EXCEPTIONNEL
DE L'ÉCLATEMENT DE NASH
D'UNE HYPERSURFACE ANALYTIQUE COMPLEXE
À SINGULARITÉ ISOLÉE

PAR

ALAIN HÉNAUT (*)

RÉSUMÉ. — On démontre essentiellement que la forme initiale de la norme de l'équation d'une hypersurface analytique complexe à singularité isolée représente le cycle sous-jacent à la fibre exceptionnelle de l'éclatement de Nash de cette hypersurface.

ABSTRACT. — Our main result is that the initial form of the norm of the equation of a complex analytic hypersurface with an isolated singularity represents the cycle associated to the exceptional fiber of the Nash blowing-up of this hypersurface.

0. Introduction et notations

Soient un entier $n \geq 2$, U un polydisque ouvert de \mathbb{C}^n centré en 0 et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$. On suppose que 0 est un point singulier isolé de $H = f^{-1}(0)$. Quitte à restreindre U , il existe un polydisque ouvert U_0 de \mathbb{C}^n centré en 0 tel que le morphisme $\partial f : U \rightarrow U_0$ dont les composantes sont les $\partial f / \partial z_i$ pour $1 \leq i \leq n$, soit fini et plat. Soit $\mathcal{J} = (\partial f / \partial z_i)_{1 \leq i \leq n}$ l'idéal jacobien de f dans $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, alors le degré de ∂f est le nombre de Milnor $\mu = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O} / \mathcal{J}$ de H . Si $\langle z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(\mu)} \rangle = \langle z^{(j)} \rangle$ sont les points de U « au-dessus » de $t \in U_0$, on peut par normalité de U_0 définir une fonction holomorphe $\varphi : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $\varphi(t) = \prod_{j=1}^{\mu} f(z^{(j)})$. On appelle φ la *norme* de f et l'on note $\text{in}(\varphi)$ sa forme initiale en 0.

On suppose désormais que H est *irréductible*.

(*) Texte reçu le 5 janvier 1981.

Alain HÉNAUT, Université de Bordeaux-I, U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique, 351, cours de la Libération, 33405 Talence.

On désigne par $\pi : \tilde{H} \rightarrow H$ l'éclatement de Nash de H . On rappelle que si $\sigma : \mathbb{C}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ est la surjection canonique, \tilde{H} est l'adhérence dans $H \times \mathbb{P}^{n-1}$ du graphe Γ_F de l'application analytique $F : H - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ définie par $F(z) = \sigma[\partial f(z)]$; de plus, \tilde{H} est un espace analytique complexe réduit et $|\pi^{-1}(0)|$ correspond *via* le plongement de la grassmannienne des $(n-1)$ -plans de \mathbb{C}^n dans \mathbb{P}^{n-1} aux limites d'espaces tangents à H en 0 (cf. [H-L], p. 251). Autrement dit, $\pi : \tilde{H} \rightarrow H$ est l'éclatement de H relativement à l'idéal $\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_H$ de $\mathcal{O}_H = \mathcal{O}/f$ engendré par l'idéal jacobien \mathcal{J} . On note $E = \text{Projan}(\bigoplus_{v \geq 0} \mathcal{J}^v \cdot \mathcal{O}_H / \mathcal{J}^{v+1} \cdot \mathcal{O}_H)$ la fibre exceptionnelle de l'éclatement de Nash de H .

Dans ce qui suit, on précise la nature de la norme φ de f et l'on montre le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Les cycles de \mathbb{P}^{n-1} sous-jacents à E et $\{\text{in}(\varphi) = 0\}$ sont égaux.*

1. Premières remarques

Le morphisme fini $\partial f : U \rightarrow U_0$ induit un morphisme fini et surjectif d'espaces analytiques complexes réduits et irréductibles $h : H \rightarrow V$, où $V = \partial f(H)_{\text{red}}$. On note \mathcal{M} l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{V,0}$, alors *via* h on a $\mathcal{M} \cdot \mathcal{O}_H = \mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_H$ et d'après la propriété universelle des éclatements on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 H \times \mathbb{P}^{n-1} \supset \tilde{H} & \xrightarrow{h \times \text{id}|_{\tilde{H}}} & \tilde{V} \subset V \times \mathbb{P}^{n-1} \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi_V \\
 H & \xrightarrow{h} & V
 \end{array}$$

(★)

où $\pi_V : \tilde{V} \rightarrow V$ est l'éclatement de V relativement à l'idéal \mathcal{M} . On a :

$$\pi_V^{-1}(0) = \text{Projan}(\bigoplus_{v \geq 0} \mathcal{M}^v / \mathcal{M}^{v+1}) = \text{Proj}(C(V, 0)),$$

où $C(V, 0)$ est le cône tangent de Zariski de V en 0.

PROPOSITION 1. — *On a $|\pi^{-1}(0)| = |\pi_V^{-1}(0)|$.*

Démonstration. — On a $|\pi^{-1}(0)| \subset |\pi_V^{-1}(0)|$ car le diagramme (★) est commutatif. Inversement, soit $(0, \sigma(y)) \in \pi_V^{-1}(0)$, alors $y \in C(V, 0) - \{0\}$ et d'après ([W], p. 210) il existe une suite $(y_k) \in V - \{0\}$ et une suite $(\lambda_k) \in \mathbb{C}^*$ telles que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k y_k = y$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = 0$. Pour tout k , soit $z_k \in H$ tel que

$h(z_k) = y_k$; puisque h est propre et $h^{-1}(0) = 0$, il existe une suite extraite $(z_{k_i}) \in H - \{0\}$ telle que $\lim_{i \rightarrow +\infty} z_{k_i} = 0$. On a alors :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \sigma [h(z_{k_i})] = \lim_{i \rightarrow +\infty} \sigma (\lambda_{k_i}, y_{k_i}) = \sigma (y).$$

On a donc $|\pi_V^{-1}(0)| \subset |\pi^{-1}(0)|$, ce qui prouve le résultat.

L'espace analytique $E = (h \circ \pi)^{-1}(0)$ est un diviseur de \tilde{H} et les composantes irréductibles $(X_i)_{1 \leq i \leq l}$ de E_{red} sont des hypersurfaces de \mathbb{P}^{n-1} . En utilisant ce qui précède, on note $X = \sum_{i=1}^l \alpha_i X_i$ (resp. $Y = \sum_{i=1}^l \delta_i X_i$) le cycle de \mathbb{P}^{n-1} sous-jacent à E (resp. $\pi_V^{-1}(0)$), et $\deg h$ le degré générique du morphisme $h : H \rightarrow V$.

DÉFINITION 1. — On appelle X le cycle exceptionnel de l'éclatement de Nash de H .

PROPOSITION 2. — En tant que cycles de \mathbb{P}^{n-1} , on a $X = \deg h \cdot Y$.

Démonstration. — D'après un théorème de Samuel [S], on peut supposer que H est une variété algébrique, alors V est également une variété algébrique et d'après ([H], p. 166), \tilde{H} et \tilde{V} le sont aussi; de plus, on a $\deg h = [K(\tilde{H}) : K(\tilde{V})]$. Soit x_i (resp. y_i) le point générique de X_i sur E (resp. $\pi_V^{-1}(0)$), alors on a :

$$\mathcal{A}_{E, x_i} = \mathcal{G}_{\mathcal{S}_i} \text{ (resp. } \mathcal{A}_{\pi_V^{-1}(0), y_i} = \mathcal{X}_{\mathcal{P}_i}), \quad \text{où } \mathcal{G} = \bigoplus_{v \geq 0} \mathcal{G}^v \cdot \mathcal{O}_H / \mathcal{G}^{v+1} \cdot \mathcal{O}_H$$

(resp. $\mathcal{X} = \bigoplus_{v \geq 0} \mathcal{M}^v / \mathcal{M}^{v+1}$) et \mathcal{S}_i (resp. \mathcal{P}_i) est l'idéal premier minimal de \mathcal{G} (resp. \mathcal{X}) correspondant à X_i . D'après les propriétés de h et la proposition 1, on a un morphisme local, fini et injectif d'anneaux locaux noethériens intègres $A = \mathcal{A}_{\mathcal{P}, y_i} \hookrightarrow B = \mathcal{A}_{\mathcal{R}, x_i}$; de plus d'après la propriété universelle des éclatements on a $\mathcal{A}_{\pi_V^{-1}(0), y_i} = A / \xi A$ et $\mathcal{A}_{E, x_i} = B / \xi B$. L'anneau $A / \xi A$ est artinien donc pour $v \geq 0$, on a $(\mathcal{M}_A / \xi A)^v = \mathcal{M}_A^v / \xi A \cap \mathcal{M}_A^v = 0$ soit $\mathcal{M}_A^v \subset \xi A \subset \mathcal{M}_A$, ce qui montre que ξA est un idéal \mathcal{M}_A -primaire de A . D'après la formule de projection de Samuel ([Z-S. II], p. 297), ξB est un idéal \mathcal{M}_B -primaire de B et l'on a $[B : A] \cdot e(\xi A) = [B / \mathcal{M}_B : A / \mathcal{M}_A] \cdot e(\xi B)$. Puisque le corps des fractions de A (resp. B) est $K(\tilde{V})$ (resp. $K(\tilde{H})$), on a $[B : A] = \deg h$; de plus, on a $B / \mathcal{M}_B \simeq K(X_i) \simeq A / \mathcal{M}_A$, d'où $\deg h \cdot e(\xi A) = e(\xi B)$. Puisque la dimension de Krull de A (resp. B) est 1, on a pour $v \geq 0$:

$$e(\xi A) = l_A (\xi^v A / \xi^{v+1} A) \quad (\text{resp. } e(\xi B) = l_B (\xi^v B / \xi^{v+1} B)).$$

Par définition, et puisque ξ n'est pas un diviseur de zéro dans A (resp. B), on a pour $v \geq 0$:

$$\delta_i = l_{A/\xi A}(A/\xi A) = l_A(A/\xi A) = l_A(\xi^v A/\xi^{v+1} A)$$

(resp. $\alpha_i = l_B(\xi^v B/\xi^{v+1} B)$). D'où $\deg h \cdot \delta_i = \alpha_i$, ce qui prouve le résultat.

2. Polynôme caractéristique de f par rapport à \mathcal{J}

On note $\mathcal{O}_{U_0} = \mathcal{O}_{U_0,0} = \mathbb{C}\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ et $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{U,0}$, alors via le morphisme fini et plat $\partial f : U \rightarrow U_0$, \mathcal{O} est un \mathcal{O}_{U_0} -module libre de rang μ .

DÉFINITION 2. — On appelle polynôme caractéristique de f par rapport à \mathcal{J} , le polynôme caractéristique $P_f(t, x)$ du \mathcal{O}_{U_0} -endomorphisme de \mathcal{O} induit par la multiplication par f .

Si l'on écrit $P_f(t, x) = x^\mu - S_1(t) \cdot x^{\mu-1} + \dots + (-1)^\mu S_\mu(t)$, alors pour $1 \leq m \leq \mu$, quitte à restreindre U_0 , $S_m(t)$ est la m -ième fonction symétrique élémentaire des points $\langle f(z^{(j)}) \rangle$ (cf. [B], chap. V, § 2); en particulier, on a $\varphi = S_\mu$. De plus, quitte à restreindre U , on a $P_f(\partial f(z), f(z)) = 0$ pour tout $z \in U$. Ce qui montre que l'on a :

$$|V| = |\partial f(H)| = \{t \in U_0; \varphi(t) = 0\}.$$

PROPOSITION 3. — Le polynôme caractéristique de f par rapport à \mathcal{J} détermine une relation intégrale explicite de degré μ , de f sur \mathcal{J} .

Démonstration. — Pour $1 \leq m \leq \mu$, on note $\text{val}_0(S_m) = \text{degré}[\text{in}(S_m)]$ la valuation de S_m en 0, alors d'après ce qui précède, il suffit de montrer que $\text{val}_0(S_m) \geq m$. D'après ([T], p. 291), f est entier sur \mathcal{J} , donc quitte à restreindre U , il existe $c > 0$ tel que pour tout $z \in U$ on ait :

$$|f(z)| \leq c \cdot \sup_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{\partial f}{\partial z_i}(z) \right|.$$

Ce qui prouve le résultat.

3. Valuation de φ

Via h , \mathcal{O}_H est un \mathcal{O}_{U_0} -module de type fini, et d'après le paragraphe précédent on a une suite exacte de \mathcal{O}_{U_0} -modules :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{U_0}^{\mu} \xrightarrow{(\times f)} \mathcal{O}_{U_0}^{\mu} \rightarrow \mathcal{O}_H \rightarrow 0,$$

ce qui prouve que l'on a $F_0(\mathcal{O}_H) = (\varphi)$, où $F_0(\mathcal{O}_H)$ est le 0-ième idéal de Fitting du \mathcal{O}_H -module $\mathcal{O}_H(P_j(t, 0) = (-1)^j \varphi(t))$.

Pour préciser φ et calculer $\text{val}_0(\varphi) = \text{degré}[\text{in}(\varphi)]$, on va construire une autre présentation finie du \mathcal{O}_{U_0} -module \mathcal{O}_H .

D'après ([T], p. 315), on peut supposer que $\partial f / \partial z_1 \cdot \mathcal{O}_H$ est entier sur $(\partial f / \partial z_2, \partial f / \partial z_3, \dots, \partial f / \partial z_n) \cdot \mathcal{O}_H$. Ainsi, si \mathcal{M}_H est l'idéal maximal de \mathcal{O}_H et

$$\partial' f = \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}, \frac{\partial f}{\partial z_3}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right),$$

l'idéal $(\partial' f) \cdot \mathcal{O}_H$ est \mathcal{M}_H -primaire car $\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_H$ l'est. De plus, puisque \mathcal{O}_H est un anneau de Cohen-Macaulay, $(\partial f / \partial z_2, \partial f / \partial z_3, \dots, \partial f / \partial z_n)$ est une suite régulière dans \mathcal{O}_H et l'on a (cf. par exemple [T], chap. 0) :

$$e(\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_H) = e((\partial' f) \cdot \mathcal{O}_H) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_H / (\partial' f) \cdot \mathcal{O}_H,$$

où $e(I)$ est la multiplicité de I (i. e. le coefficient normalisé de plus haut degré du polynôme de Hilbert-Samuel de I).

D'après ce qui précède, il existe un polydisque ouvert U'_0 de \mathbb{C}^{n-1} centré en 0 tel que le morphisme $h' : H \rightarrow U'_0$, induit par $\partial' f$ soit fini et plat. On note $\mathcal{O}_{U'_0} = \mathcal{O}_{U'_0, 0} = \mathbb{C}\{t_2, t_3, \dots, t_n\}$, alors via h' , \mathcal{O}_H est un $\mathcal{O}_{U'_0}$ -module libre de rang $\delta = e(\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_H)$.

Soit $\lambda(t', t_1)$ le polynôme caractéristique du $\mathcal{O}_{U'_0}$ -endomorphisme de \mathcal{O}_H induit par la multiplication par $\partial f / \partial z_1$, alors puisque le polynôme minimal d'un endomorphisme est dans la racine du polynôme caractéristique, quitte à restreindre U'_0 , on a :

$$|V| = |\partial f(H)| = \{(t', t_1) \in U'_0 \times \mathbb{C}; \lambda(t', t_1) = 0\}.$$

De plus, puisque $\partial f / \partial z_1 \cdot \mathcal{O}_H$ est entier sur $(\partial' f) \cdot \mathcal{O}_H$, on a $\text{val}_0(\lambda) = \delta = e(\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_H)$.

Remarque. — Si l'on considère la suite de Teissier de f :

$$\mu^* = (\mu = \mu^{(n)}, \mu^{(n-1)}, \dots, \mu^{(1)}, 1 = \mu^{(0)})$$

on a :

$$\delta = e(\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_H) = \mu^{(n)} + \mu^{(n-1)} \quad (\text{cf. [T], p. 320}).$$

PROPOSITION 4. — On a $(\varphi) = F_0(\mathcal{O}_H) = (\lambda)$. En particulier $\text{val}_0(\varphi) = e(\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_H)$.

Démonstration. — Le germe λ est un polynôme de Weierstrass en t_1 et d'après le théorème de division, on a un isomorphisme de \mathcal{O}_{U_0} -modules :

$$\mathcal{O}_{U_0}^{\delta} \simeq \mathcal{O}_{U_0}/\lambda \quad \text{défini par } (\beta'_i) \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{\delta} \beta'_i t_1^{i-1} \text{ modulo } (\lambda).$$

On considère l'homomorphisme de \mathcal{O}_{U_0} -algèbres $\mathcal{O}_{U_0} \otimes_{\epsilon_{U_0}} \mathcal{O}_{U_0}/\lambda \rightarrow \mathcal{O}_{U_0}/\lambda$ défini par :

$$\alpha \otimes (\sum_{i=1}^{\delta} \beta'_i t_1^{i-1} \text{ modulo } (\lambda)) \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{\delta} \alpha \beta'_i t_1^{i-1} \text{ modulo } (\lambda);$$

il induit un homomorphisme surjectif Λ par passage au quotient :

$$A = (\mathcal{O}_{U_0} \otimes_{\epsilon_{U_0}} \mathcal{O}_{U_0}/\lambda) / (t_1 \otimes 1 - 1 \otimes t_1) \xrightarrow{\Lambda} \mathcal{O}_{U_0}/\lambda.$$

Pour tout $n \geq 0$, on a $t_1^n \otimes 1 - 1 \otimes t_1^n \in (t_1 \otimes 1 - 1 \otimes t_1)$ d'où, en utilisant le théorème de division, on a :

$$\alpha \otimes \dot{r} = (\lambda q + \rho) \otimes \dot{r} = \rho \otimes \dot{r} = 1 \otimes \hat{\rho} \dot{r}$$

dans A , soit $\Lambda(\alpha \otimes \dot{r}) = \hat{\rho} \dot{r}$. Ainsi, si $\Lambda(\sum \alpha_j \otimes \dot{r}_j) = 0$, on a $\sum \alpha_j \otimes \dot{r}_j = 0$ dans A ce qui montre que Λ est un isomorphisme. *Via* h' , on a $\mathcal{O}_{U_0}^{\delta} \simeq \mathcal{O}_H$; de plus, on a $\mathcal{O}_{U_0} \otimes_{\epsilon_{U_0}} \mathcal{O}_{U_0}/\lambda \simeq \mathcal{O}_{U_0}^{\delta}$. Alors, en utilisant ce qui précède, on obtient une suite exacte de \mathcal{O}_{U_0} -modules :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{U_0}^{\delta} \xrightarrow{(t_1 \cdot \text{id} - (x \partial/\partial z_1))} \mathcal{O}_{U_0}^{\delta} \rightarrow \mathcal{O}_H \rightarrow 0.$$

Puisque $F_0(\mathcal{O}_H)$ ne dépend pas de la présentation de \mathcal{O}_H , on a $F_0(\mathcal{O}_H) = (\lambda)$, d'où le résultat.

4. Détermination du cycle exceptionnel de l'éclatement de Nash de H

D'après les paragraphes 1 et 2, on a un morphisme fini et surjectif $h : H \rightarrow V$ où $|V| = \{t \in U_0; \varphi(t) = 0\}$, et φ_{red} la réduite de φ est irréductible car H l'est. D'après la formule de projection de Samuel appliquée à $\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_{V,0} \hookrightarrow \mathcal{O}_H$ ou d'après la proposition 2, on a grâce au paragraphe 3 :

$$\text{deg } h \cdot \text{val}_0(\varphi_{\text{red}}) = \text{deg } h \cdot m(\mathcal{O}_V) = e(\mathcal{O}_H) = \text{val}_0(\varphi)$$

soit :

$$(\star\star) \quad \varphi = (\varphi_{\text{red}})^{\text{deg } h}.$$

En tant que cycles de \mathbb{P}^{n-1} , on a par définition :

$$Y = \{\text{in}(\varphi_{\text{red}}) = 0\},$$

d'où :

$$\text{deg } h. Y = \{[\text{in}(\varphi_{\text{red}})]^{\text{deg } h} = \text{in}(\varphi) = 0\},$$

ce qui, d'après la proposition 2 prouve le résultat suivant :

THÉORÈME. — *En tant que cycles de \mathbb{P}^{n-1} , on a $X = \{\text{in}(\varphi) = 0\}$.*

L'auteur remercie le rapporteur de cet article de lui avoir signalé le corollaire suivant de (★★) :

PROPOSITION 5. — *Le hessien de f n'est pas identiquement nul sur H .*

Démonstration. — Si l'on suppose que :

$$H \subset S = \{z \in U; \text{Hess}(f)(z) = 0\}.$$

alors on a $V \subset \partial f(S) = \Delta$. Soit $t_0 \in U_0$, un point régulier de V au voisinage duquel on a $V = \Delta$, et tel que $t_0 \notin R$, où R est l'ensemble de ramification du morphisme fini $h : H \rightarrow V$. Alors, on peut choisir un système de coordonnées locales $(y_1, y_2, \dots, y_n) = (y', y_n)$ sur U_0 , centré en t_0 , tel que l'on ait grâce à (★★) : $\varphi(y', y_n) = y_n^{\text{deg } h}$. On a $\mu \geq \text{deg } h$. Si l'on suppose que $\mu = \text{deg } h$, alors « au-dessus » de t_0 , puisque $t_0 \notin R$, il y a $\mu = \text{deg } h$ points distincts dans H , mais puisque $t_0 \in \Delta$, deux au moins de ces points sont égaux, ce qui est absurde, d'où $\mu > \text{deg } h$. Puisque f est entier sur \mathcal{O} , la majoration déjà utilisée dans la démonstration de la proposition 3 montre que l'on a :

$$\text{val}_0(\varphi(0, y_n)) = \text{val}_0\left(\prod_{j=1}^{\mu} f[z^{(j)}(0, y_n)]\right) \geq \mu > \text{deg } h,$$

ce qui est absurde, d'où le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

- [B] BARLET (D.). — Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace analytique complexe de dimensions finie. Sém. F. Norguet II, *Lect. Notes in Math.*, n° 482, Springer-Verlag, 1975.
- [H] HARTSHORNE (R.). — *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.
- [H-L] HENRY (J. P.) et LÊ (D. T.). — Limites d'espaces tangents. Sém. F. Norguet II, *Lect. Notes in Math.*, n° 482, Springer-Verlag, 1975.
- [S] SAMUEL (P.). — Algébricité de certains points singuliers algébroides, *J. Math. Pures Appl.*, 35, 1956, p. 1-6.
- [T] TEISSIER (B.). — Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney. Singularités à Cargèse 1972, *Astérisque*, n° 7-8, S.M.F., 1973.
- [W] WHITNEY (H.). — *Complex Analytic Varieties*, Addison-Wesley, 1972.
- [Z-S. II] ZARISKI (O.) et SAMUEL (P.). — *Commutative Algebra*, vol. II, Van Nostrand, 1960.