Jean-François Colombeau
Bernard Perrot

L'équation $\bar{\partial}$ dans les ouverts pseudo-convexes des espaces DFN

Bulletin de la S. M. F., tome 110 (1982), p. 15-26
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1982__110__15_0>

Bull. Soc. math. France
110, 1982, p. 15-26

L'ÉQUATION $\bar{\partial}$ DANS LES OUVERTS PSEUDO-CONVEXES DES ESPACES DFN

PAR

J. F. COLOMBEAU ET B. PERROT (*)

RÉSUMÉ. — On montre : « Soit E un dual fort d'un espace de Fréchet nucléaire complexe (en abrégé un espace DFN) et soit Ω un ouvert pseudo-convexe de E. Soit F une forme différentielle C^∞, *de type* 0,1, et fermée sur Ω. Alors il existe une fonction C^∞, f sur Ω vérifiant $\bar{\partial} f = F$ ». Ce théorème améliore un résultat de Raboin où des hypothèses plus restrictives sur E et F étaient nécessaires. De plus il conduit à diverses applications à l'Holomorphie en dimension infinie.

ABSTRACT. — We prove: "let E be a strong dual of a complex nuclear Fréchet space (in short a DFN space) and let Ω be a pseudo-convex open subset of E. Let F be a closed $C^\infty(0, 1)$ differential form on Ω. Then there is a C^∞ function f on Ω such that $\bar{\partial} f = F$". This theorem improves a result of Raboin where more restrictive assumptions on E and F were used. Furthermore it yelds various applications to infinite dimensional Holomorphy.

1. Introduction

Étant donnée l'importance de l'équation $\bar{\partial}$ en analyse complexe, il y a eu diverses tentatives pour résoudre l'équation $\bar{\partial}$ en dimension infinie, *voir* C. J. HENRICH [10], A. RAPP [21], P. RABOIN ([18], [19], [20]). Dans un article antérieur [6] les auteurs obtiennent le résultat cité ci-dessus dans le cas particulier $\Omega = E$. Dans cet article nous traitons du cas général où Ω est un ouvert pseudo-convexe de E.

La démonstration utilise trois lemmes. Le lemme 1 montre l'existence de solutions C^∞ dans le cas d'un espace de Hilbert séparable H. Ces solutions sont définies sur l'intersection de $\Omega \subset H$ avec un sous-espace dense de H. Sa démonstration est basée sur le début d'une démonstration de P. RABOIN ([18], [19], [20]) et sur un résultat de P. MAZET [14], non encore publié.

(*) Texte reçu le 4 juillet 1980, révisé le 12 janvier 1981.

J. F. COLOMBEAU et B. PERROT, Université de Bordeaux-I, U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique, 351, cours de la Libération, 33405 Talence.

Le lemme 2 résoud l'équation $\bar{\partial}$ dans le cas d'une « échelle » formée d'un nombre fini d'espaces de Hilbert séparables, reliés entre eux par des injections nucléaires. Il est basé sur le lemme 1 et sur la décomposition spectrale des opérateurs compacts entre espaces de Hilbert (*voir* PIETSCH [17]). Le lemme 3 est un résultat d'approximation des fonctions holomorphes et sa démonstration est analogue à une démonstration de GRUMAN [8] et GRUMAN et KISELMAN [9] (utilisé par eux pour la solution du problème de Lévi).

Dans la preuve du théorème nous utilisons aussi la solution du problème de Lévi et la propriété d'Oka-Weil dans les espaces de Hilbert séparables, (GRUMAN [8], GRUMAN et KISELMAN [9], NOVERRAZ [15], [16]).

2. Définitions et notations

Soit E un espace DFN. E est une limite inductive injective et dénombrable d'une suite croissante $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'espaces de Banach. De plus on peut supposer que chaque E_n est un espace de Hilbert séparable et que chaque inclusion $E_n \to E_{n+1}$ est nucléaire ([12], chap. 7 et [11], chap. 8). Une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset E$ est une fonction continue et Gateaux-analytique ou, ce qui est équivalent dans le cas des DFN, une fonction f sur Ω telle que, pour chaque n, la restriction de f à $\Omega \cap E_n$ est holomorphe sur $\Omega \cap E_n$ muni de la topologie de l'espace de Hilbert E_n.

On note $\mathscr{H}(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur Ω, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de Ω. Par définition une fonction à valeurs complexes définie sur Ω est dite C^∞ si sa restriction à chaque $\Omega \cap E_n$ (contenu dans E_n avec topologie induite) est C^∞ pour la structure réelle sous-jacente à l'espace de Hilbert E_n.

En fait les principales notions de fonction C^∞ dans les espaces localement convexes coïncident avec celle-ci dans le cas présent où E est un espace DFN (*voir* [2], [3], [4]). Nous rappelons que chaque compact de E est contenu et compact dans un certain E_n (*voir* [12], chap. VII). Ainsi nous munissons l'espace $\mathscr{E}(\Omega)$ de ces fonctions C^∞ sur Ω de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω pour les fonctions et leurs dérivées successives (*voir* [3], [7] pour plus amples détails). $\mathscr{H}(\Omega)$ et $\mathscr{E}(\Omega)$ sont des espaces de Fréchet-Schwartz (*voir* [3], [4], [5]).

Pour chaque entier p nous notons $\Lambda_p(E)$ l'espace des formes antisymétriques p-antilinéaires continues ω sur E. $\Lambda_p(E)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E. $\Lambda_p(E)$ est ainsi la limite projective des espaces de Banach $\Lambda_p(E_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Par définition une forme différentielle F, C^∞ de type $(0, p)$, est une fonction C^∞ de Ω dans $\Lambda_p(E)$. C^∞ signifie que, pour chaque couple $(n, k)\in\mathbb{N}^2$, l'application composée :

$$\Omega\cap E_n \xrightarrow[\text{canonique}]{\text{injection}} \Omega \xrightarrow{F} \Lambda_p(E) \xrightarrow[\text{canonique}]{\text{application}} \Lambda_p(E_k),$$

est C^∞ (entre les topologies d'espaces normés $\Omega\cap E_n\subset E_n$ et $\Lambda_p(E_k)$). On a déjà signalé que, dans le cas présent où E est un DFN, les principales notions d'application C^∞ coïncident avec celle-ci. On note $\mathscr{E}_{0,p}(\Omega)$ l'espace des formes différentielles C^∞ de type $(0, p)$ sur Ω, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω pour les applications et leurs dérivées successives (on peut noter $\mathscr{E}_{0,0}(\Omega)=\mathscr{E}(\Omega)$ avec la convention $\Lambda_0(E)=\mathbb{C}$).

Pour chaque entier $p\in\mathbb{N}$ on définit l'opérateur $\bar\partial_p$ sur $\mathscr{E}_{0,p}(\Omega)$, à valeurs dans $\mathscr{E}_{(0,p+1)}(\Omega)$ par la formule :

$$\bar\partial_p\omega(x)(y_1, \ldots, y_{p+1})=\frac{1}{p+1}$$
$$\times\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k+1}\frac{1}{2}[\omega'(x)\{y_k\}+i\,\omega'(x)\{iy_k\}](y_1, \ldots, \hat y_k, \ldots, y_{p+1}),$$

où $\omega\in\mathscr{E}_{(0,p)}(\Omega)$, $x\in\Omega$, $y_i\in E$ si $1\leqslant i\leqslant p+1$ et où le chapeau sur y_k signifie qu'on omet y_k.

Par définition une forme F dans $\mathscr{E}_{0,p}(\Omega)$ est dite fermée si $\bar\partial_p F=0$. On note $\mathscr{E}_{(0,p),\text{fermé}}(\Omega)$ le sous-espace des formes fermées. Dans la suite on note seulement $\bar\partial$ à la place de $\bar\partial_p$ car aucune confusion n'est possible.

On réfère à NOVERRAZ [15] pour la définition des ouverts pseudo-convexes en dimension infinie. En fait il suffit de savoir que Ω est pseudo-convexe si et seulement si son intersection avec tout sous-espace vectoriel (de E) de dimension finie est pseudo-convexe.

3. Énoncé du théorème

THÉORÈME. — *Soit E un espace DFN complexe et soit Ω un ouvert pseudo-convexe de E. Alors pour toute forme différentielle F, C^∞ de type* $(0, 1)$ *et fermée définie sur Ω, il existe une fonction f, C^∞ sur Ω, telle que $\bar\partial f=F$.*

En d'autres termes la suite ci-dessous d'espaces de Fréchet-Schwartz est exacte :

$$0 \to \mathscr{H}(\Omega) \to \mathscr{E}(\Omega) \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{E}_{(0,1)\,\text{fermée}}(\Omega) \xrightarrow{\bar\partial} 0.$$

Remarque. — Après que ce papier fut rédigé, nous avons été informés que NOSSKE, à Munich, a obtenu le même résultat indépendamment, avec une preuve différente.

La suite de l'article est consacrée à la preuve du théorème. Pour ceci nous avons tout d'abord besoin de trois lemmes.

4. Lemme 1 sur l'équation $\bar\partial$ dans les espaces de Hilbert séparables

Soit H un espace de Hilbert complexe séparable et soit T un opérateur sur H nucléaire, injectif, auto-adjoint, donc à image dense. On appelle H_T le sous-espace de H image de T muni de la forme hermitienne : $\langle Tx, Ty\rangle_{H_T} = \langle x, y\rangle_H$.

De la même manière, en utilisant la restriction de T à H_T (respectivement à H_{T^2}) on définit l'espace H_{T^2} (resp. H_{T^3}).

Soit G un espace de Hilbert complexe séparable qui contienne H avec inclusion compacte. Soient Ω un ouvert pseudo-convexe de G et F une forme différentielle sur Ω de type (0, 1) fermée et de classe C^∞.

Pour $r>0$ on pose : $\Omega_r = \{x \in \Omega \cap H \text{ tel que } \|x\|_H < r\}$.

On suppose aussi qu'il existe une base orthonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H, formée de vecteurs propres pour T, qui soit aussi un système orthogonal total de G.

LEMME 1. — *Pour tout $r>0$ il existe une fonction f^* de classe C^∞ sur $\Omega_r \cap H_{T^3}$ (pour la topologie induite par H_{T^3}) telle que $\bar\partial f^* = F$ sur $\Omega_r \cap H_{T^3}$.*

Preuve. — Notons d la distance dans G. La fermeture dans G des ensembles $\{x \in \Omega_r \text{ tel que } d(x, C_G\Omega) \geq \varepsilon\}$ est compacte dans G et contenue dans Ω (où $C_G\Omega$ désigne le complémentaire de Ω dans G). Donc F est bornée sur ces ensembles et on peut construire une fonction convexe, croissante, continue χ sur $\mathbb{R}$ assez grande pour que :

$$\|F(x)\|^2_{\Lambda(H)} \leq \exp[\chi(-\log d(x, C_G\Omega))].$$

Maintenant on peut utiliser la preuve du théorème 2 de RABOIN [20] avec la fonction χ telle que nous venons de la définir ci-dessus (le fait que F soit de type borné dans cette preuve est remplacé dans notre cas présent par le fait (facile à vérifier) qu'une boule fermée de H est aussi fermée dans G donc compacte dans G). Ainsi nous obtenons l'existence d'une fonction continue f^* sur $\Omega_r \cap H_{T^s}$ qui vérifie $\bar{\partial} f^* = F$ au sens des distributions (en fait d'après la preuve de Raboin utilisée ci-dessus, f^* est de classe C^1, mais on n'a pas besoin ici de cette propriété plus forte, c'est-à-dire que l'on utilise uniquement le début de la preuve de Raboin). D'après des propriétés classiques en dimension finie, f^* est alors Gateaux C^∞ sur $\Omega_r \cap H_{T^s}$. Pour obtenir maintenant que f^* est de classe C^∞ sur $\Omega_r \cap H_{T^s}$ nous utiliserons le résultat suivant qui nous a été communiqué par P. MAZET.

PROPOSITION (P. MAZET [14]). — *Soit E un espace de Banach complexe, soit F une forme différentielle de type* $(0, 1)$ *de classe C^∞ sur une boule ouverte $B(0, \alpha)$ de E, qui est bornée ainsi que ses dérivées successives sur $B(0, \alpha)$ et soit f^* une fonction Gateaux-C^∞ sur cette boule telle que $\bar{\partial} f^* = F$ sur l'intersection de la boule $B(0, \alpha)$ avec tout sous-espace vectoriel, de dimension finie, de E. Alors f^* est de classe C^∞ sur $B(0, \alpha)$ et $\bar{\partial} f^* = F$. De plus pour tout $\rho < \alpha$ les dérivées successives de f^* sont bornées sur $B(0, \rho)$.*

Preuve. — f^* est C^∞ au sens de Gateaux ce qui permet de définir une dérivée n-ième $D^n f^*$ et, pour établir la proposition, il suffit de prouver que $D^n f^*(x).y^n$ est bornée pour x dans $B(0, \rho)$ et y dans $B(0, 1)$. Cette majoration se fait par récurrence. Posant $g = D^{n-1} f^*$, la majoration permet d'assurer que g est à valeur dans $L(^{(n-1)} E)$ et est différentiable. Tout revient alors à majorer $g'(x).y$. Cette majoration est vraie pour la partie $\mathbb{C}$-antilinéaire de g' d'après les hypothèses faites sur F, donc il suffit de la montrer pour la partie $\mathbb{C}$-linéaire de g' c'est-à-dire : $\partial g/\partial z(x)y$. Pour ceci, considérons sur la boule ouverte de $\mathbb{C}$, $\Delta(0, \alpha-\beta) = \{z \in \mathbb{C}$ telle que $|z| < \alpha - \beta\}$, la fonction φ de classe C^∞ définie par $\varphi(z) = g(x+zy)$. Pour $r' < \alpha - \beta$ posons $\Delta = \Delta(0, r')$ et $\partial\Delta$ son bord orienté dans le sens direct :

$$\varphi(z) = \frac{1}{2i\pi}\left[\int_{\partial\Delta} \varphi(t)\frac{dt}{t-z} + \int_{\Delta} \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{t}}(t)\frac{dt \wedge d\bar{t}}{t-z}\right],$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x).y = \frac{\partial\varphi}{\partial z}(0) = \frac{1}{2i\pi} \times \left[\int_{\partial\Delta} \varphi(t)\frac{dt}{t^2} - \int_{\partial\Delta} \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{t}}(t)\frac{d\bar{t}}{t} + \int_{\Delta} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial\bar{t}}(t)\frac{dt \wedge d\bar{t}}{t}\right].$$

D'après l'hypothèse de récurrence il existe $M > 0$ (dépendant de r' mais non de x et y) majorant $|\varphi(t)|$, $|\partial\varphi/\partial\bar{t}(t)|$ et $|\partial^2\varphi/\partial t\,\partial\bar{t}(t)|$ pour $t \in \Delta$ ou $\partial\Delta$.

On obtient :

$$\left|\frac{\partial g}{\partial z}(x).y\right| \leqslant M\left(\frac{1}{r'}+1+2r'\right). \quad \square$$

Remarque 1. — Le résultat de P. MAZET [14] est plus général, nous n'avons donné ici que le cas particulier que nous utilisons.

Remarque 2. — Notre première preuve de ce lemme 1 était une adaptation de notre preuve du lemme 1 de [6] où Ω était égal à E. Ce résultat de P. MAZET permet de la même manière de simplifier aussi cette preuve de [6].

5. Lemme 2 sur l'équation $\overline{\partial}$ dans une suite d'espaces de Hilbert avec injections nucléaires

Soit $H_0 \to H_1 \to H_2 \to H_3 \to H_4$ une suite croissante d'espaces de Hilbert séparables avec injections nucléaires. Soit Ω un ouvert pseudo-convexe de H_4 et F une forme différentielle sur Ω de type (0, 1), fermée de classe C^∞. Soit $\Omega_r^0 = \{x \in \Omega \cap H_0 \text{ tel que } \|x\|_{H_0} < r\}$, Ω_r^0 est un ouvert de H_0. Nous le munissons de la topologie induite par H_0.

LEMME 2. — *Il existe une fonction f^* de classe C^∞ sur Ω_r^0 telle que $\overline{\partial} f^* = F$.*

Preuve. — Considérons la suite $H_0 \to \overline{H}_0^{H_1} \to \overline{H}_0^{H_2} \to \overline{H}_0^{H_3} \to \overline{H}_0^{H_4} = G$ (où $\overline{H}_0^{H_i}$ désigne la fermeture de H_0 dans H_i, muni de la forme hermitienne induite par H_i). Les injections canoniques sont nucléaires avec image dense car composées d'une application nucléaire et d'une projection.

L'injection U de H_0 dans G est de type $l^{1/4}$ (comme composée de quatre opérateurs de type l^1 : *voir* théorèmes 8.3.3 et 8.2.7 de [17]).

Les théorèmes 8.3.1 et 8.3.2 de [17] appliqués à U montrent qu'il existe deux bases orthonormales $(e_n')_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H_0 et G respectivement, telles que $U(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n' \langle x, e_n' \rangle_{H_0} f_n$ pour tout $x \in H_0$; où les λ_n' sont les nombres d'approximation de U (qui est de type $l^{1/4}$). Donc si on pose $\lambda_n = \lambda_n'^{1/4}$ la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans l^1. Posons $e_n = e_n'/\lambda_n^3$. Cela donne $e_n' = \lambda_n' f_n$ et $f_n = e_n/\lambda_n$. Soit $H = \{\sum x_n e_n \in G \text{ tels que } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2\}$ muni de la forme hermitienne $\langle \sum x_n e_n, \sum y_n e_n \rangle = \sum x_n \overline{y}_n$. Alors H est un espace de Hilbert admettant la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme base orthonormale. La suite $(e_n/\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de G et l'injection de H dans G est nucléaire.

Considérons maintenant l'opérateur T défini sur H par $T(e_n) = \lambda_n e_n$. T est nucléaire (car $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$), injectif, auto-adjoint, avec image dense, et l'espace

H_{T^3} (défini comme dans le lemme 1) coïncide avec H_0. F est une forme différentielle sur $\Omega \cap G$ qui vérifie toutes les hypothèses du lemme 1, alors ce lemme donne le résultat désiré (en remarquant que Ω_r^0 est contenu dans l'ouvert Ω_r défini dans ce lemme 1).

6. Un lemme d'approximation

LEMME 3. — *Soient E et F deux espaces de Hilbert séparables avec $E \to F$ inclusion compacte. Soit Ω un ouvert pseudo-convexe de F tel que $\Omega \cap E \neq \emptyset$. Pour tout $h \in \mathcal{H}(\Omega \cap E)$, tout K compact de E contenu dans Ω et tout $\varepsilon > 0$; il existe $\tilde{h} \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que* $\sup_{x \in K} |\tilde{h}(x) - h(x)| < \varepsilon$.

Preuve. — Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormale de E qui est aussi un système orthogonal dans F (une telle base existe d'après le théorème 8.3.1 de [17]). Notons P_n la projection orthogonale de E sur le sous-espace engendré par les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$.

Il existe trois entiers N_1, N_2, N_3 tels que : pour tout $x \in K$:

$$(1) \qquad n \geqslant N_1 \quad \Rightarrow \quad P_n(x) \in \Omega;$$

$$(2) \qquad n \geqslant N_2 \quad \Rightarrow \quad \| x - P_n(x) \|_F \leqslant \frac{1}{4} d_F(K, C_F \Omega)$$

(où d_F désigne la distance dans F déduite de la norme de F);

$$(3) \qquad n \geqslant N_3 \quad \Rightarrow \quad | h(x) - h(P_n(x) | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit N un entier plus grand que N_1, N_2, N_3, $[(3/4)\, d_F\, (K, C_F \Omega)]^{-1}$ et $\sup_{x \in K} \| x \|_F$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormale de F telle que : $f_i = e_i / \| e_i \|_F$ pour $i = 1, 2, \ldots, N$ et qui contienne la famille $\{ e_j / \| e_j \|_F \}_{j \in \mathbb{N}}$. Notons Q_n la projection orthogonale de F sur le sous-espace engendré par $f_1, \ldots, f_n$. Alors pour tout $x \in E$ et tout entier $n \leqslant N$ on a : $Q_n(x) = P_n(x)$. Si $n > N$ il existe un entier $n'_{(n)}$ compris entre N et n tel que $Q_n(x) = P_{n'_{(n)}}(x)$ pour tout $x \in E$.

Pour $n \geqslant N$ et $x \in K$ on a d'après (2) :

$$(4) \qquad d_F(Q_n(x), C_F \Omega) \geqslant d_F(x, C_F \Omega) - d_F(x, P_{n'_{(n)}}(x)) \geqslant \frac{3}{4} d_F(K, C_F \Omega).$$

Donc d'après le choix de N il s'ensuit :

$$(5) \qquad d_F(Q_n(x), C_F \Omega) \geqslant \frac{1}{N} \qquad \text{pour} \quad n \geqslant N \quad \text{et} \quad x \in K.$$

Posons :

$$K_n=\left\{x\in\Omega \text{ tels que } \|x\|_F\leqslant n \text{ et } d_F(x,\, C_F\Omega)\geqslant\frac{1}{n}\right\},$$

alors d'après (5) on a :

(6) $$Q_n(K)\subset K_n \qquad \text{pour} \quad n\geqslant N.$$

Posons :

$$L_n=\left\{x\in\Omega \text{ tel que } \|x-Q_n(x)\|_F\leqslant\frac{1}{2}d_F(x,\, C_F\Omega)\right\},$$

alors pour $n\geqslant N$ et $x\in K$ on a :

$$\|Q_{n+1}(x)-Q_n(x)\|_F\leqslant\|x-Q_n(x)\|_F\leqslant\|x-P_{n'_{(n)}}\|_F\leqslant\frac{1}{4}d_F(K,\, C_F\Omega),$$

ce qui donne d'après (4) :

$$\|Q_{n+1}(x)-Q_n(x)\|_F\leqslant\frac{1}{3}d_F(Q_{n+1}(x),\, C_F\Omega),$$

ce qui entraîne :

(7) $$Q_{n+1}(K)\subset L_n \qquad \text{pour} \quad n\geqslant N.$$

Posons $\Omega_n=\Omega\cap Q_n(F)$. Pour $n\geqslant N$ on a d'après (6) et (7) :

(8) $$Q_{n+1}(K)\subset\Omega_{n+1}\cap L_n\cap K_{n+1}.$$

Maintenant nous utilisons la construction de GRUMAN et KISELMAN [9] (*voir* aussi NOVERRAZ [16], p. 101) dans l'espace de Hilbert F, pour la base $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en commençant à l'indice N. Cette construction nous donne une suite de fonctions h_n holomorphes sur Ω_n telles que $h_{n+1}/\Omega_n=h_n$ pour tout $n>N$, $h_N=h/\Omega_N$ et :

(9) $$|h_n(x)-h_{n-1}(Q_{n-1}(x))|\leqslant\frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$\text{pour} \quad x\in\Omega_n\cap K_n\cap L_{n-1} \qquad (n>N).$$

Comme dans la construction de Gruman et Kiselman on pose :

(10) $$\tilde{h}(x)=\lim_{n\to\infty}h_n(Q_n(x)) \quad \text{pour tout } x\in\Omega.$$

Il s'ensuit que $\tilde{h} \in \mathscr{H}(\Omega)$. Pour tout $x \in K$ on a d'après (8), (9), et (10) :

$$|\tilde{h}(x) - h(Q_N(x))| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $Q_N = P_N$ sur K, la majoration ci-dessus et (3) impliquent :

$$|\tilde{h}(x) - h(x)| < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad x \in K.$$

7. Preuve du théorème

Comme il est bien connu (structure d'un DFN) E est une limite inductive d'une suite croissante d'espaces de Hilbert séparables E_n avec injection canonique $E_n \to E_{n+1}$ nucléaire pour tout n. On peut supposer que pour chaque entier n l'inclusion $E_n \to E_{n+1}$ se factorise de la manière suivante :

$$E_n = H_{0,\,n} \to H_{1,\,n} \to H_{2,\,n} \ldots \to H_{4,\,n} = E_{n+1},$$

où toutes les injections sont nucléaires et où les $H_{i,\,n}$ sont des espaces de Hilbert séparables. E étant un DFN il existe une suite exhaustive de compacts K_n dans Ω; on peut supposer K_n compact dans E_n.

Nous notons $\hat{K}_n^{\Omega \cap E_n}$ l'enveloppe holomorphiquement convexe de K_n pour $\mathscr{H}(\Omega \cap E_n)$. Comme $\Omega \cap E_n$ est pseudo-convexe il est connu (NOVERRAZ [16], p. 99 ou SCHOTTENHOLER [22]) que $\hat{K}_n^{\Omega \cap E_n}$ est un compact de $\Omega \cap E_n$. Donc il existe $r_n > 0$ tel que : $\hat{K}_n^{\Omega \cap E_n} \subset \{ x \in \Omega \cap E_n \text{ tel que } \|x\|_{E_n} < r_n \}$; on notera $\Omega(n)$ cet ensemble.

Maintenant considérons la restriction de F à $\Omega \cap E_{n+1}$. Toutes les hypothèses du lemme 2 sont satisfaites. Donc il existe une fonction f_n^* de classe C^∞ sur $\Omega(n)$ considéré comme un ouvert de E_n, telle que :

$$\bar{\partial} f_n^* = F \quad \text{sur } \Omega(n).$$

Posons $f_2 = f_2^*.f_3^* - f_2$ est définie et de classe C^∞ sur $\Omega(2)$ et $\bar{\partial}(f_3^* - f_2) = 0$ sur $\Omega(2)$ donc $f_3^* - f_2$ est holomorphe sur $\Omega(2)$ qui est un voisinage de $\hat{K}_2^{\Omega \cap E_2}$. Donc d'après le théorème d'approximation appliqué dans l'espace de Hilbert séparable E_2 (*voir* NOVERRAZ [15]) $f_3^* - f_2$ peut être approchée uniformément sur $\hat{K}_2^{\Omega \cap E_2}$ par une fonction holomorphe sur $\Omega \cap E_2$. D'après le lemme 3 cette dernière fonction peut être, elle-même, approchée uniformément sur $\hat{K}_2^{\Omega \cap E_2}$ par une fonction holomorphe sur $\Omega \cap E_3$. Ainsi il existe une fonction holomorphe P_2 sur $\Omega \cap E_3$ telle que :

$$\sup_{x \in K_2} |f_3^*(x) - f_2(x) - P_2(x)| < \frac{1}{2^2}.$$

On pose $f_3 = f_3^* - P_2$ et cela donne :

$$\begin{cases} f_3 \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \Omega\,(3) \subset \Omega \cap E_3, \\ \bar\partial f_3 = F \text{ sur } \Omega\,(3) \quad (\text{car } \bar\partial P_2 = 0), \\ \sup_{x \in K_2} |f_3(x) - f_2(x)| \leq \dfrac{1}{2^2}. \end{cases}$$

Par une récurrence évidente on obtient une suite de fonctions f_n de classe C^∞ sur $\Omega(n)$ telles que $\bar\partial f_n = F$ sur $\Omega(n)$ et telles que :

$$\sup_{x \in K_{n-1}} |f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Pour tout $x \in \Omega$ il existe n_x tel que $\forall n \geqslant n_x \Rightarrow x \in K_n \subset \Omega(n)$.

Donc $f_n(x)$ est défini pour n suffisamment grand et :

$$|f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Posons $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. Les fonctions $(f_{n+l} - f_n)$ sont holomorphes sur $\Omega(n)$ et lorsque $l \to \infty$ la suite converge dans $\mathscr{H}(\Omega(n))$ (muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts) vers $(f - f_n)$ car tout compact de $\Omega(n)$ est contenu dans un K_p pour p assez grand. Donc $f = (f - f_n) + f_n$ est de classe C^∞ sur $\Omega(n)$. Comme ceci est vrai pour tout n on obtient que f est C^∞ sur Ω.

L'égalité $\bar\partial f = F$ provient directement de la construction de f : si $x \in \Omega$ et $y \in E$ alors $x \in \Omega(n)$ et $y \in E_n$ pour un n assez grand; mais $(f - f_n) \in \mathscr{H}(\Omega(n))$ donc :

$$\bar\partial f(x).y = \bar\partial f_n(x).y = F(x).y.$$

8. Applications

Une application est donnée dans Colombeau, Gay et Perrot [7] dans le cas où Ω est un disque. Parmi d'autres applications, citons les deux corollaires suivants qui améliorent des résultats de Raboin [20].

Corollaire 1. — *Le premier problème de Cousin admet une solution sur tout ouvert pseudo-convexe d'un DFN.*

La preuve est la même qu'en dimension finie [13], elle est basée sur le théorème de surjection du $\bar{\partial}$ et sur le lemme de partition de l'unité suivant dont la démonstration peut être adaptée de celle de BONIC et FRAMPTON dans [1].

LEMME. — *Soit E un elcs réel avec une base de voisinages de* 0 *préhilbertiens et soit U un ouvert de E qui est de Lindelöf pour la topologie induite. Soit* $\mathcal{U}$ *un recouvrement ouvert de U. Alors il existe une suite* $(\Psi_n)_n$ *de fonctions de classe* C^∞ *sur E,* $0 \leqslant \Psi_n \leqslant 1$ *telles que :*

(1) *Pour tout n, support* Ψ_n *est contenu dans un élément du recouvrement* $\mathcal{U}$.

(2) *Tout* $x \in U$ *admet un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini des ensembles* $\{x \in U \text{ tel que } \Psi_n(x) > 0\}$.

(3) $\sum_n \Psi_n(x) = 1, \quad \forall x \in U.$

COROLLAIRE 2. — *Soient E un DFN complexe et* Ω *un ouvert pseudo-convexe de E. Soit H un hyperplan fermé de E qui coupe* Ω. *Alors toute fonction holomorphe sur* $\Omega \cap H$ *peut se prolonger en une fonction holomorphe sur* Ω.

On peut appliquer la preuve de RABOIN [20], p. 239.

Remerciements. — Les auteurs sont très reconnaissants à P. MAZET de leur avoir communiqué la simplification dans la preuve du lemme 1. Ils remercient aussi R. GAY, A. HERTLE, P. KRÉE, M. SCHOTTENLOHER et E. THOMAS pour discussions ou correspondances, ainsi que le Referee pour ses critiques utiles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BONIC (R.) et FRAMPTON (J.). — Smooth functions on Banach manifolds, *journal of Math. and Mech.*, t. 15, 1966, p. 877-898.

[2] COLOMBEAU (J. F.). — Sur les applications différentiables et analytiques au sens de J. S. e Silva. *Portugaliae Mathematica*, vol. 36, fasc. 2, 1977, p. 103-118.

[3] COLOMBEAU (J. F.). — *Spaces of* C^∞ *mappings in infinitely many dimension and applications*, Bordeaux, 1977 (preprint).

[4] COLOMBEAU (J. F.) et MEISE (R.) — C^∞ *functions on locally convex and on bornological vector spaces. Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory*, [MACHADO (S.)], Ed., Lecture Notes in Math. Springer, n° 843, 1981, p. 195-216.

[5] COLOMBEAU (J. F.) et PERROT (B.). — Reflexivity and kernels in infinite dimensional holomorphy, *Portugaliae Mathematica*, vol. 46, n° 3-4, 1977, p. 291-300.

[6] COLOMBEAU (J. F.) et PERROT (B.). — The $\bar{\partial}$ equation in DFN spaces, *Journal of Math. Analysis and Application*. vol. 78, n° 2, 1980, p. 466-487.

[7] COLOMBEAU (J. F.), GAY (R.) et PERROT (B.). — Division by holomorphic functions and convolution equations in infinite dimensions. *Transactions of the A.M.S.*, vol. 264, n° 2, 1981, p. 381-391.

[8] GRUMAN (L.). — The Lévi problem in certain infinite dimensional vector spaces, *Illinois Journal of Math.*, t. 18, 1974, p. 20-26.

[9] GRUMAN (L.) et KISELMAN (C. O.). — Le problème de Lévi dans les espaces de Banach à base, *C. R. Acad. Sc.* Paris, t. 274, série A, 1972, p. 1296-1298.

[10] HENRICH (C. J.). — The $\bar{\partial}$ equation with polynomial growth on a Hilbert space, *Duke Math. Journal*, vol. 40, n° 2, 1973, p. 279-306.

[11] HOGBE-NLEND (H.). — Théorie des Bornologies et Applications, *Lecture Notes in Math.*, n° 213, Springer, 1971.

[12] HOGBE-NLEND (H.). — Bornologies and Functional Analysis, *North Holland Math. Studies*, 26, 1978.

[13] HORMANDER (L.). — *An introduction to complex analysis in several variable*, North Holland, 1973.

[14] MAZET (P.). — Communication personnelle, avril 1980.

[15] NOVERRAZ (P.). — Approximation of holomorphic or plurisubharmonic function in certain Banach spaces. Proceedings on Infinite Dimensional holomorphy, *Lecture Notes in Math.*, n° 364, Springer, 1974, p. 178-18 .

[16] NOVERRAZ (P.). — Pseudo convexité, Convexité Polynomiale et Domaines d'Holomorphie en Dimension Infinie, *North Holland Math Studies*, t. 3, 1973.

[17] PIETSCH (A.). — Nuclear Locally convex spaces, *Ergebnisse der math.*, t. 66, Springer, 1972.

[18] RABOIN (P.). — Le problème du $\bar{\partial}$ sur un espace de Hilbert, Séminaire Lelong-Skoda, 1976-1977, *Lecture Notes in Math.*, n° 694, Springer, 1978, p. 214-227.

[19] RABOIN (P.). — The $\bar{\partial}$ equation on a Hilbert space and some applications Advances in Holomorphy, BARROSO (J. A.), Ed., *North Holland Math Studies*, t. 34, 1979, p. 713-734.

[20] RABOIN (P.). — Le problème du $\bar{\partial}$ sur un espace de Hilbert, *Bulletin de la Soc. Math. de France*, t. 107, 1979, p. 225-240.

[21] RAPP (A.). — L'équation $\bar{\partial}$ avec décroissance au bord sur certains ouverts convexes d'un espace de Banach, *Bulletin de la Soc. Math. de France*, Suppl. Mémoire, n° 46, 1976, p. 67-72.

[22] SCHOTTENLOHER (M.) — The Lévi problem for domains spread over locally convex spaces with a finite dimensional Schauder decomposition, *Annales de l'Institut Fourier*, vol. 26, n° 4, 1976, p. 207-237.