

BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-PAUL ALLOUCHE

Somme des chiffres et transcendance

Bulletin de la S. M. F., tome 110 (1982), p. 279-285

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1982__110__279_0

© Bulletin de la S. M. F., 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOMME DES CHIFFRES ET TRANSCENDANCE

PAR

JEAN-PAUL ALLOUCHE (*)

RÉSUMÉ. — Soit p un nombre premier, et soit $s_p(n)$ la somme des chiffres de n en base p .

Nous montrons les résultats suivants :

Si R est un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ tel que $R(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$, la série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} s_p(R(n)) X^n$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(X)$ si et seulement si le degré de R est inférieur ou égal à 1.

Soit $s_p^{(k)}$ la k -ième itérée de s_p , alors la série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} s_p^{(k)}(n) X^n$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(X)$ si et seulement si $k=0$ ou $k=1$.

ABSTRACT. — Let p be a prime number, and let $s_p(n)$ be the sum of the digits of n in the p -adic expansion.

We prove the following results:

Let R be a polynomial in $\mathbb{Q}[X]$ with $R(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$. The formal series $\sum_{n=0}^{\infty} s_p(R(n)) X^n$ is algebraic over $\mathbb{F}_p(X)$ if and only if the degree of R is less than or equal to 1.

Let $s_p^{(k)}$ be the iterates of s_p , then the formal series $\sum_{n=0}^{\infty} s_p^{(k)}(n) X^n$ is algebraic over $\mathbb{F}_p(X)$ if and only if $k=0$ or $k=1$.

Soit (ε_n) une suite d'entiers relatifs; on note \mathbb{F}_p le corps à p éléments et $\mathbb{F}_p(X)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients dans \mathbb{F}_p . Un résultat récent de G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDES FRANCE et G. RAUZY (cf. [1]) établit notamment que la série formelle $\sum_0^\infty \varepsilon_n X^n$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(X)$ si et seulement si la suite (ε_n) réduite modulo p est reconnue par un p -automate, ce qui est une façon de concevoir que la suite (ε_n) n'est pas répartie « au hasard ».

Si l'on note $s_p(n)$ la somme des chiffres de n en base p , on sait que la série $\sum_0^\infty s_p(n) X^n$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(X)$; il est donc intéressant de considérer par exemple les séries $\sum_0^\infty s_p(n^2) X^n$ ou $\sum_0^\infty s_p^{(2)}(n) X^n$, (où $s_p^{(k)}$ est la k -ième itérée de s_p) : les suites $(s_p(n^2))$ et $(s_p^{(2)}(n))$ sont données par des calculs effectifs (algorithmes?) mais nous allons démontrer qu'elles sont réparties « au

(*) Texte reçu le 17 mars 1981, révisé le 25 janvier 1982.

Jean-Paul ALLOUCHE, Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 226, U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique, Université de Bordeaux-I, 33405 Talence Cedex.

hasard » au sens défini plus haut; ces suites sont donc plus « complexes » que $(s_p(n))$; est-ce la raison qui rend difficile la question posée par Gelfond dans [2] : soit R un polynôme à coefficients entiers, estimer :

$$\text{card} \{ n \leq x, s_p(R(n)) \equiv l \pmod m \} ?$$

Cet article est divisé en cinq parties; dans la première nous étudions la série $\sum_0^\infty s_p(\alpha n + \beta) X^n$; dans la seconde nous établissons un lemme fondamental sur les propriétés de la suite (ε_n) lorsque la série $\sum_0^\infty \varepsilon_n X^n$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(X)$; dans la troisième, nous montrons que, si le polynôme R est dans $\mathbb{N}[X]$ et si la série $\sum_0^\infty s_p(R(n)) X^n$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(X)$, alors « il y a des relations » entre les sommes des chiffres de certains coefficients de R ; dans la quatrième nous montrons que la série $\sum_0^\infty s_p(R(n)) X^n$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(X)$ si et seulement si le degré du polynôme R est inférieur ou égal à 1; dans la dernière partie nous prouvons que la série $\sum s_p^{(k)}(n) X^n$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(X)$ si et seulement si k vaut 0 ou 1.

1. Étude de la série formelle $\sum_0^\infty s_p(\alpha n + \beta) X^n$

1. THÉORÈME. — Soit $(\varepsilon(n))$ une suite d'entiers telle que la série $\sum_0^\infty \varepsilon(n) X^n$ soit algébrique sur $\mathbb{F}_p(X)$, alors quels que soient α et β dans \mathbb{N} , la série $\sum_0^\infty \varepsilon(\alpha n + \beta) X^n$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(X)$.

Posons d'abord $\beta = \alpha q + r$, $0 \leq r < \alpha$, alors $\varepsilon(\alpha n + \beta) = \varepsilon(\alpha(n+q) + r)$, et la série $\sum_0^\infty \varepsilon(\alpha n + \beta) X^n$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(X)$ si et seulement si la série $\sum \varepsilon(\alpha n + r) X^n$ l'est.

On pose alors $t(n) = \varepsilon(\alpha n + r)$ et on va montrer qu'il y a un nombre fini de suites $t_{k,a}(n) = t(p^k n + a)$ modulo p , $k \geq 0$, $0 \leq a \leq p^k - 1$ ce qui montrera le résultat d'après [1].

Écrivons $\alpha a + r = up^k + v$, avec $0 \leq v \leq p^k - 1$, alors u appartient à $[0, \alpha - 1]$ et $t(p^k n + a) = \varepsilon((\alpha n + u)p^k + v) = \varepsilon_{k,v}(\alpha n + u)$. Comme la série $\sum_0^\infty \varepsilon(n) X^n$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(X)$, il y a un nombre fini de suites $\varepsilon_{k,v}(n) = \varepsilon(p^k n + v)$ modulo p , $k \geq 0$, $0 \leq v \leq p^k - 1$, donc un nombre fini de suites $\varepsilon_{k,v}(\alpha n + u)$ pour chaque u .

Mais u décrit $[0, \alpha - 1]$, il y a donc un nombre fini de suites $t_{k,a}(n)$ modulo p , $0 \leq k$, $0 \leq a \leq p^k - 1$ et le résultat est démontré.

2. COROLLAIRE. — Soit $R(X)$ un polynôme du premier degré dans $\mathbb{Q}[X]$, $R(X) = aX + b$, tel que $R(\mathbb{N})$ soit contenu dans \mathbb{N} , alors la série $\sum_0^\infty s_p(R(n)) X^n$ est algébrique sur le corps $\mathbb{F}_p(X)$.

L'hypothèse $R(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ implique facilement $a, b \in \mathbb{N}$. Il suffit donc de montrer que $\sum_0^\infty s_p(n) X^n$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(X)$; rappelons une démonstration de ce résultat :

$$\begin{aligned} G(X) &= \sum_0^\infty s_p(n) X^n = \sum_{a=0}^{p-1} \sum_{n=0}^{+\infty} s_p(pn+a) X^{pn+a} \\ &= \sum_{a=0}^{p-1} X^a \sum_{n=0}^{+\infty} (s_p(n) + a) X^{np} \\ &= \sum_{a=0}^{p-1} X^a (G(X))^p + \sum_{a=0}^{p-1} a X^a \sum_{n=0}^\infty X^{np}, \end{aligned}$$

d'où :

$$G(X) = \frac{X^p - 1}{X - 1} G^p(X) + \frac{X}{(X - 1)^2}.$$

2. Propriétés des coefficients d'une série algébrique

LEMME FONDAMENTAL. — Soit $\varepsilon(n)$ une suite d'entiers telle que la série $\sum_0^\infty \varepsilon(n) X^n$ soit algébrique sur $\mathbb{F}_p(X)$; alors il existe $n_0 \geq 1$ et $T \geq 1$ tels que :

$$\forall j \geq 1, \quad \forall i \in [1, p], \quad \forall n \geq n_0,$$

$$\varepsilon\left(p^n \left(j - \frac{p-i}{p-1}\right) + \frac{p-i}{p-1}\right) \equiv \varepsilon\left(p^{n+T} \left(j - \frac{p-i}{p-1}\right) + \frac{p-i}{p-1}\right) \pmod{p}.$$

La série $\sum_0^{+\infty} \varepsilon(n) X^n$ étant algébrique sur $\mathbb{F}_p(X)$, il en est de même de la série $\sum_0^\infty \varepsilon(n+1) X^n$.

D'après [1] il existe un alphabet $Y = \{y_1, \dots, y_l\}$, une p -substitution σ sur Y , une suite $(\lambda(n))_{n \geq 1}$ d'éléments de Y , et une application φ de Y vers $\{0, \dots, p-1\}$ tels que :

- la suite $(\lambda(n))$ est point fixe de σ ;
- pour $n \geq 1$, $\varphi(\lambda(n)) \equiv \varepsilon(n) \pmod{p}$.

Il suffit donc de montrer le résultat annoncé dans le lemme pour la suite $\lambda(n)$ (avec $=$ au lieu de \equiv).

Soit $\sigma = (\tau_1, \dots, \tau_p)$, où les τ_j sont des applications de Y dans lui-même, c'est-à-dire $\sigma(y) = \tau_1(y) \tau_2(y) \dots \tau_p(y)$. Dire que $\lambda(n)$ est point fixe de σ , c'est dire que les suites $\lambda(1) \dots \lambda(n) \dots$ et $\tau_1(\lambda(1)) \dots \tau_p(\lambda(1)) \tau_1(\lambda(2)) \dots \tau_p(\lambda(2)) \dots$ sont égales, autrement dit :

$$\forall i \in [1, p], \quad \forall j \geq 1, \quad \tau_i(\lambda(j)) = \lambda(i + p(j-1)),$$

d'où en itérant τ_i :

$$\tau_i^a(\lambda(j)) = \lambda\left(p^a \left(j - \frac{p-i}{p-1}\right) + \frac{p-i}{p-1}\right).$$

Comme τ_i est une application de Y dans Y et que Y a l éléments, il existe une période $T_{ij} \leq l$ telle que :

$$\forall a \geq l+1, \quad \tau_i^a(\lambda(j)) = \tau_i^{a+T_{ij}}(\lambda(j)).$$

Posons $T = \text{ppcm}(1, 2, \dots, l)$, alors T_{ij} divise T , d'où :

$$\forall i \in [1, p], \quad \forall j \geq 1, \quad \forall n \geq n_0 = l+1,$$

$$\lambda\left(p^n \left(j - \frac{p-i}{p-1}\right) + \frac{p-i}{p-1}\right) = \lambda\left(p^{n+T} \left(j - \frac{p-i}{p-1}\right) + \frac{p-i}{p-1}\right).$$

3. Relations entre les coefficients de R si la série $\sum_0^\infty s_p(R(n))X^n$ est algébrique

PROPOSITION. — Soit $R(X) = \sum_0^d a_k X^k$, avec $a_k \in \mathbb{N}$, $a_d \neq 0$, $d \geq 2$. Si la série $\sum_0^\infty s_p(R(n))X^n$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(X)$, alors :

$$s_p(a_{d-1} + (d+1)a_d) \equiv s_p(a_{d-1} + da_d) + s_p(a_d) \pmod{p}.$$

Appliquons en effet le lemme de la deuxième partie, avec $i=1$, $j = p^{(d-1)n} + p^{(d-2)n} + 1$, à la suite $s_p(R(n))$: il existe $n_0 \geq 1$ et $T \geq 1$ tels que :

$$\forall n \geq n_0,$$

$$s_p(R(p^n(p^{(d-1)n} + p^{(d-2)n} + 1))) \equiv s_p(R(p^{n+T}(p^{(d-1)n} + p^{(d-2)n} + 1))).$$

Posons $b_{j,l} = \sum_{k=j}^d \binom{k}{j} \binom{j}{l} a_k$.

Calculons alors, pour $x=n$, puis $x=n+T$, la quantité :

$$\begin{aligned} f(x) &= s_p[R(p^x(p^{(d-1)n} + p^{(d-2)n} + 1))] \\ &= s_p[R(p^{x+(d-2)n}(p^n + 1) + 1)] \\ &= s_p\left[\sum_{k=0}^d a_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} p^{(x+(d-2)n)j} (p^n + 1)^j\right] \\ &= s_p\left[\sum_{k=0}^d \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^j a_k \binom{k}{j} \binom{j}{l} p^{(x+(d-2)n)j+nl}\right] \\ &= s_p\left[\sum_{j=0}^d \sum_{l=0}^j b_{j,l} p^{(x+(d-2)n)j+nl}\right] \end{aligned}$$

pour $x=n$:

$$f(n) = s_p\left(\sum_{j=0}^d \sum_{l=0}^j b_{j,l} p^{(d-1)nj+nl}\right),$$

deux exposants $(d-1)nj + nl$ et $(d-1)nj' + nl'$, avec $(j, l) \neq (j', l')$ et par exemple $l' \geq l$, sont égaux si et seulement si $(d-1)(j-j') = l' - l$, avec $0 \leq l \leq j \leq d$ et $0 \leq l' \leq j' \leq d$, ce qui donne l'unique solution $l' = d-1$, $l = 0$, $j' = d-1$, $j = d$. Par conséquent,

$$f(n) = s_p \left[\sum' b_{j,l} p^{(d-1)nj + nl} + (b_{d,0} + b_{d-1,d-1}) p^{(d-1)dn} \right],$$

où \sum' porte sur j, l avec $0 \leq j \leq d$, $0 \leq l \leq j$, $(j, l) \notin \{(d, 0), (d-1, d-1)\}$ et où tous les exposants de p sont distincts donc différent d'au moins n ; si l'on choisit n assez grand ($p^n > 2 \sup_{j,l} (b_{j,l})$), on a donc :

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum' s_p(b_{j,l}) + s_p(b_{d,0} + b_{d-1,d-1}) \\ &= \sum_{j=0}^d \sum_{l=0}^j s_p(b_{j,l}) - s_p(b_{d,0}) - s_p(b_{d-1,d-1}) + s_p(b_{d,0} + b_{d-1,d-1}). \end{aligned}$$

pour $x = n + T$:

$$f(n+T) = s_p \left[\sum_{j=0}^d \sum_{l=0}^j b_{j,l} p^{(d-1)(n+T)j + nl} \right].$$

Ici, tous les exposants de p sont distincts si T est convenablement choisi et si n est suffisamment grand : en effet, si

$$((d-1)n + T)j + nl = ((d-1)n + T)j' + nl',$$

alors

$$T(j' - j) = n((l - l') + (d-1)(j - j')).$$

Si le coefficient de n est nul, alors $j' = j$ d'où $l' = l$; si le coefficient de n est non nul, alors :

$$|T(j' - j) - n((l - l') + (d-1)(j - j'))| \geq n - |T(j' - j)| \geq n - Td \geq T$$

pour n assez grand.

Les exposants de p diffèrent ainsi d'au moins T ; comme on peut, quitte à remplacer T par un multiple, supposer $p^T > \sup_{j,l} (b_{j,l})$, on a donc :

$$f(n+T) = \sum_{j=0}^d \sum_{l=0}^j s_p(b_{j,l}).$$

Comme $f(n) \equiv f(n+T) \pmod{p}$ pour n assez grand, on a par conséquent :

$$s_p(a_{d-1} + (d+1)a_d) \equiv s_p(a_{d-1} + da_d) + s_p(a_d) \pmod{p}.$$

4. Fin de l'étude de la série $\sum_0^\infty s_p(R(n)) X^n$

THÉORÈME. — Soit R un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ tel que $R(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$, et $d^0 R \geq 2$; alors la série $\sum_0^\infty s_p(R(n)) X^n$ n'est pas algébrique sur $\mathbb{F}_p(X)$.

L'hypothèse $R(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ implique que le coefficient du terme de plus haut degré de R est positif et que le terme constant est entier positif.

Posons :

$$R(X) = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^d a_k X^k,$$

où $a_k \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $a_d \in \mathbb{N}^*$ et $a_0 q^{-1} \in \mathbb{N}$. Si la série formelle $\sum_0^\infty s_p(R(n)) X^n$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(X)$, il en est de même, d'après la première partie, pour la série $\sum_0^\infty s_p(R(qun + qv)) X^n$ quels que soient u et v dans \mathbb{N}^* .

On écrit alors :

$$\sum_0^\infty s_p(R(qun + qv)) X^n = \sum_0^\infty s_p \left(R(qv) + \sum_{k=1}^d (qu)^k \left(\frac{R^{(k)}(qv)}{k!} \right) n^k \right) X^n;$$

Si v est choisi assez grand, les $q(R^{(k)}(qv)/k!)$ appartiennent à \mathbb{N} ; on applique alors le résultat de la troisième partie, et l'on obtient : quel que soit v assez grand, $s_p(\alpha v + \beta) - s_p(\alpha v + \gamma) = \delta$, mod p , avec :

$$\alpha = da_d q^{d-1} u^{d-1},$$

$$\beta = a_{d-1} q^{d-2} u^{d-1} + (d+1) a_d q^{d-1} u^d,$$

$$\gamma = a_{d-1} q^{d-2} u^{d-1} + da_d q^{d-1} u^d,$$

$$\delta = s_p(a_d q^{d-1} u^d).$$

Fixons alors $u > d$, ceci entraîne $\beta - \gamma > \alpha$, d'où une contradiction grâce au lemme suivant :

LEMME. — Soient α , β , γ , trois entiers, tels que $\beta - \gamma > \alpha$. Alors $s_p(\alpha v + \beta) - s_p(\alpha v + \gamma)$ n'est pas constant modulo p pour v voisin de $+\infty$.

Choisissons en effet un entier r tel que $\gamma/\alpha < r < \beta/\alpha$ (c'est possible car $\beta - \gamma > \alpha$), et soit $v = p^t - r$ où t tend vers $+\infty$. Alors, pour t assez grand, on a :

$$\begin{aligned} s_p(\alpha v + \beta) - s_p(\alpha v + \gamma) \\ \equiv s_p(\alpha p^t + \beta - \alpha r) - s_p(\alpha p^t + \gamma - \alpha r) \\ \equiv s_p(\alpha) + s_p(\beta - \alpha r) - s_p(\alpha p^t + \gamma - \alpha r). \end{aligned}$$

Fixons un s tel que $p^s > \alpha r - \gamma$, on en déduit donc :

$$\begin{aligned} s_p(\alpha v + \beta) - s_p(\alpha v + \gamma) \\ \equiv s_p(\alpha) + s_p(\beta - \alpha r) - s_p((\alpha - 1)p^t + p^t - p^s + p^s + \gamma - \alpha r) \\ \equiv s_p(\alpha) + s_p(\beta - \alpha r) - s_p(\alpha - 1) - s_p(p^t - p^s) - s_p(p^s + \gamma - \alpha r), \end{aligned}$$

on conclut en remarquant que :

$$s_p(p^t - p^s) = s_p(p^{t-s} - 1) = s_p((p-1)(1+p+\dots+p^{t-s-1})) = (p-1)(t-s),$$

n'est pas constant modulo p lorsque t tend vers $+\infty$.

5. Étude de la série $\sum_0^\infty s_p^{(k)}(n) X^n$

THÉORÈME. — Pour $k \geq 2$, la série formelle $\sum_{n=0}^{+\infty} s_p^{(k)}(n) X^n$ n'est pas algébrique sur $\mathbb{F}_p(X)$.

Il résulte du lemme ci-dessus que la suite $s_p(n)$ n'est pas périodique à partir d'un certain rang (sinon pour n assez grand, $s_p(n+T) - s_p(n) \equiv 0 \pmod p$ ce qui correspond avec les notations ci-dessus à $\alpha=1, \beta=T, \gamma=0$), donc la série $\sum_0^\infty s_p(n) X^n$ n'est pas dans $\mathbb{F}_p(X)$.

Pour montrer le résultat annoncé, il suffit donc de prouver que si la série $\sum_0^\infty s_p^{(k+1)}(n) X^n$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(X)$, alors $\sum_0^\infty s_p^{(k)}(n) X^n$ est dans $\mathbb{F}_p(X)$:

Si la série $\sum_0^\infty s_p^{(k+1)}(n) X^n$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(X)$, il en est de même de la série $\sum_0^\infty \varepsilon(n) X^n$, où $\varepsilon(0)=0$ et $\varepsilon(n) = s_p^{(k+1)}(n-1)$ pour $n \geq 1$.

On applique alors à la suite $\varepsilon(n)$ le lemme fondamental de la deuxième partie, avec $j=1, i=2$, donc il existe $T \geq 1$ tel que, pour n assez grand :

$$\varepsilon\left(\frac{p^n-1}{p-1} + 1\right) \equiv \varepsilon\left(\frac{p^{n+T}-1}{p-1} + 1\right) \pmod p,$$

soit :

$$s_p^{(k+1)}(1+p+\dots+p^{n-1}) \equiv s_p^{(k+1)}(1+p+\dots+p^{n+T-1}),$$

d'où :

$$s_p^{(k)}(n) \equiv s_p^{(k)}(n+T),$$

pour n assez grand, ce qui signifie que la série $\sum_0^\infty s_p^{(k)}(n) X^n$ est dans $\mathbb{F}_p(X)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHRISTOL (G.), KAMAE (T.), MENDÈS FRANCE (M.) et RAUZY (G.). — Suites algébriques, automates et substitutions, *Bull. Soc. math. France*, vol. 108, fasc. 4, 1980, p. 401-420.
 [2] GELFOND (A. O.). — Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données, *Acta Arithmetica*, vol. XIII, 1968.