

# BULLETIN DE LA S. M. F.

PHILIPPE TURPIN

## **Produits tensoriels d'espaces vectoriels topologiques**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 110 (1982), p. 3-13

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1982\\_\\_110\\_\\_3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1982__110__3_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## PRODUITS TENSORIELS D'ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

PAR

PHILIPPE TURPIN (\*)

RÉSUMÉ. — Si  $(E, \|\cdot\|)$  et  $(F, \|\cdot\|)$  sont des espaces  $(F)$ -normés, la plus grande  $(F)$ -semi-norme  $\|\cdot\|$  sur  $E \otimes F$  vérifiant  $\|x \otimes y\| \leq \sup(\|x\|, \|y\|)$  est une  $(F)$ -norme. Si  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels topologiques séparés,  $E \otimes F$  est séparé pour la topologie vectorielle  $\mathcal{T}$  la plus fine rendant continue l'application  $(x, y) \rightarrow x \otimes y$  de  $E \times F$  dans  $E \otimes F$ , et complet si  $E$  et  $F$  sont complets. Les bornés de  $(E \otimes F, \mathcal{T})$  sont en outre localisés.

ABSTRACT. — If  $(E, \|\cdot\|)$  and  $(F, \|\cdot\|)$  are  $(F)$ -normed spaces, the greatest  $(F)$ -semi-norm  $\|\cdot\|$  on  $E \otimes F$  verifying  $\|x \otimes y\| \leq \sup(\|x\|, \|y\|)$  is an  $(F)$ -norm. If  $E$  and  $F$  are Hausdorff topological vector spaces, let  $\mathcal{T}$  be the finest linear topology on  $E \otimes F$  for which the mapping  $(x, y) \rightarrow x \otimes y$  is continuous on  $E \times F$ . Then  $\mathcal{T}$  is shown to be Hausdorff, complete if  $E$  and  $F$  are complete, and  $\mathcal{T}$ -bounded sets are located.

On établit dans cet article que, sur le produit tensoriel  $E \otimes F$  de deux espaces vectoriels topologiques séparés  $E$  et  $F$  il existe une topologie tensorielle séparée, c'est-à-dire une topologie vectorielle séparée rendant continue l'application  $(x, y) \rightarrow x \otimes y$  de  $E \times F$  dans  $E \otimes F$ . On résoud ainsi un problème de L. Waelbroeck ([8], [10]).

Ce résultat n'est nullement mystérieux si par exemple  $E$  ou  $F$  est séparé par son dual (voir d'autres cas en [10]) mais il est probablement nouveau dans le cas général.

On l'obtient en prouvant que si  $(E, \|\cdot\|)$  et  $(F, \|\cdot\|)$  sont des espaces  $(F)$ -normés la plus grande  $(F)$ -semi-norme  $\|\cdot\|$  sur  $E \otimes F$  vérifiant  $\|x \otimes y\| \leq \|x\| \vee \|y\|$  est une  $(F)$ -norme.

On considère aussi la topologie tensorielle  $\mathcal{T}$  la plus fine sur  $E \otimes F$ . On localise les bornés de  $(E \otimes F, \mathcal{T})$  et on montre que  $(E \otimes F, \mathcal{T})$  est complet quand  $E$  et  $F$  sont séparés et complets.

(\*) Texte reçu le 20 juin 1980.

P. TURPIN, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, Département de Mathématique, Bâtiment 425, 91405 Orsay.

Rappelons qu'une  $(F)$ -semi-norme d'un espace vectoriel  $X$  (réel ou complexe, comme toujours dans cet article) est une application  $w$  de  $X$  dans  $\mathbf{R}_+$  vérifiant pour  $x \in X$ ,  $y \in X$  et  $t$  scalaire  $w(x+y) \leq w(x) + w(y)$ ,  $w(tx) \leq w(x)$  si  $|t| \leq 1$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} w(tx) = 0$ . On dit que  $w$  est une  $(F)$ -norme quand  $x = 0$  dès que  $w(x) = 0$ .

Un espace  $(F)$ -normé, ou  $(F)$ -semi-normé,  $(X, w)$ , noté aussi  $X$ , est un espace vectoriel  $X$  muni d'une  $(F)$ -norme, ou d'une  $(F)$ -semi-norme,  $w$  et de la topologie vectorielle définie par  $w$ .

On emploiera pour  $a$  et  $b$  réels les notations :

$$a \vee b = \sup(a, b), \quad a \wedge b = \inf(a, b).$$

### 1. La $(F)$ -semi-norme $u \otimes_{\vee} v$

1.1. Si  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels topologiques nous disons qu'une  $(F)$ -semi-norme  $w$  sur  $E \otimes F$  est  $\otimes$ -continue quand l'application  $(x, y) \rightarrow x \otimes y$  de  $E \times F$  dans  $(E \otimes F, w)$  est continue. Il suffit pour cela que  $w(x \otimes y)$  tende vers 0 quand  $x$  et  $y$  tendent vers 0 dans  $E$  et  $F$ .

1.2.  $E$  et  $F$  étant maintenant des espaces  $(F)$ -semi-normés, de  $(F)$ -semi-normes  $u$  et  $v$ , soit  $u \otimes_{\vee} v$  la  $(F)$ -semi-norme de  $E \otimes F$  définie par :

$$u \otimes_{\vee} v(z) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^N u(x_n) \vee v(y_n) \mid z = \sum_{n=1}^N x_n \otimes y_n, x_n \in E, y_n \in F, N \geq 1 \right\},$$

pour tout  $z \in E \otimes F$ .

C'est la plus grande  $(F)$ -semi-norme sur  $E \otimes F$  vérifiant  $u \otimes_{\vee} v(x \otimes y) \leq u(x) \vee v(y)$  pour tout  $(x, y) \in E \times F$ . Elle est donc  $\otimes$ -continue. Notons :

$$E \otimes_{\vee} F,$$

l'espace  $E \otimes F$  muni de la  $(F)$ -semi-norme  $\otimes$ -continue  $u \otimes_{\vee} v$ .

1.3. THÉORÈME. — Si  $u$  et  $v$  sont des  $(F)$ -normes,  $u \otimes_{\vee} v$  est aussi une  $(F)$ -norme.

On doit montrer que  $z = 0$  si  $z \in E \otimes F$  et  $u \otimes_{\vee} v(z) = 0$ . Cela est clair si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie (voir par exemple 1.6 ci-dessous). Le cas général se réduit à celui-ci grâce au lemme suivant (formule (2)).

1.4. — LEMME. — Soient  $E_0$  et  $F_0$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  et  $F$  de dimension finie  $r$  et soit  $z \in E_0 \otimes F_0$ . Si on identifie  $z$  à un élément de  $E \otimes F$  on a

alors,  $u$  et  $v$  étant des  $(F)$ -semi-normes de  $E$  et  $F$  :

$$(1) \quad \inf \left\{ \sup_{1 \leq i \leq r} u(e_i) \vee v(f_i) \mid z = \sum_{i=1}^r e_i \otimes f_i, e_i \in E_0, f_i \in F_0 \right\} \leq u \otimes_{\vee} v(z),$$

d'où, en notant  $u_0$  et  $v_0$  les restrictions de  $u$  et  $v$  à  $E_0$  et  $F_0$  :

$$(2) \quad u \otimes_{\vee} v(z) \leq u_0 \otimes_{\vee} v_0(z) \leq r(u \otimes_{\vee} v(z)).$$

*Démonstration.* — Considérons une décomposition  $z = \sum_{n=1}^N x_n \otimes y_n$  de  $z$  où  $x_n \in E$  et  $y_n \in F$ . Extrayons du système de vecteurs  $(x_n)_{1 \leq n \leq N}$ , de rang  $m$ , un  $m$ -uple  $X = (x'_h)_{1 \leq h \leq m}$  maximisant  $|\det X|$ , ce déterminant étant bien sûr calculé relativement à quelque base de l'espace vectoriel engendré par les  $x_n$ . On a alors  $x_n = \sum_{h=1}^m b_{n,h} x'_h$  pour  $1 \leq n \leq N$ , les formules de Cramer impliquant :

$$(3) \quad |b_{n,h}| \leq 1,$$

d'où  $z = \sum_{h=1}^m x'_h \otimes y'_h$  où :

$$(4) \quad y'_h = \sum_{n=1}^N b_{n,h} y_n.$$

Procédant de la même façon à partir du système de vecteurs  $(y'_h)_{1 \leq h \leq m}$ , de rang  $s$ , on trouve  $z = \sum_{i=1}^s e_i \otimes f_i$  où les  $f_i$  sont extraits des  $y'_h$  et linéairement indépendants et où les  $e_i$  vérifient :

$$(5) \quad e_i = \sum_{h=1}^s a_{h,i} x'_h, \quad |a_{h,i}| \leq 1,$$

et sont aussi linéairement indépendants. D'après (3), (4), (5) on a :

$$u(e_i) \leq \sum_{n=1}^N u(x_n), \quad v(f_i) \leq \sum_{n=1}^N v(y_n),$$

d'où  $u(e_i) \vee v(f_i) \leq \sum_{n=1}^N u(x_n) \vee v(y_n)$ . En outre  $s \leq r$  et les  $e_i$  et  $f_i$  appartiennent nécessairement à  $E_0$  et  $F_0$  (voir par exemple [1] p. 170). Cela donne (1) et par suite (2).

Poursuivons par quelques remarques;  $E$  et  $F$  sont toujours munis de  $(F)$ -semi-normes  $u$  et  $v$ .

1.5. Si  $f$  est une application bilinéaire de  $E \times F$  dans un espace  $(F)$ -semi-normé  $(X, w)$ , se factorisant canoniquement par l'application linéaire  $g : E \otimes F \rightarrow X$  et si  $a > 0$  et  $K \in \mathbb{R}_+$  les conditions de Lipschitz en zéro suivantes sont équivalentes.

(i)  $w(f(x, y)) \leq K(u(x) \vee v(y))$  dès que  $u(x) \vee v(y) < a$ ;

(ii)  $w(g(z)) \leq K(u \otimes_{\vee} v)(z)$  dès que  $u \otimes_{\vee} v(z) < a$ .

1.6. Si  $0 < p \leq 1$  une  $p$ -semi-norme (resp. une  $p$ -norme) d'un espace vectoriel  $X$  est une  $(F)$ -semi-norme (resp. une  $(F)$ -norme)  $w$  de  $X$  vérifiant  $w(tx) = t^p w(x)$  pour tout  $t > 0$  et tout  $x \in X$ .

On voit alors que si  $1/2 \leq p \leq 1$ , toute  $p$ -semi-norme  $\otimes$ -continue  $w$  sur  $E \otimes F$  est continue sur  $E \otimes_v F$ .

D'après 1.5 il suffit d'observer que l'application bilinéaire canonique de  $E \times F$  dans  $(E \otimes F, w)$  est lipschitzienne en zéro. Or soit  $a > 0$  tel que  $w(x \otimes y) < 1$  dès que  $u(x) \vee v(y) < 2a$ . Si  $0 < u(x) < a$  et  $0 < v(y) < a$  on a par sous-additivité :

$$u(au(x)^{-1}x) < (1 + au(x)^{-1})u(x) < 2a$$

et de même  $v(av(y)^{-1}y) < 2a$ . On a donc :

$$w(x \otimes y) \leq a^{-2p} u(x)^p v(y)^p \leq a^{-2p} (u(x) \vee v(y))^{2p} \leq a^{-1} (u(x) \vee v(y))$$

dès que  $u(x) \vee v(y) < a$ .

1.7. Si  $u$  et  $v$  sont des  $p$ -semi-normes, avec  $0 < p \leq 1$ , on a pour tout  $z \in E \otimes F$  :

$$(6) \quad u \otimes_v v(z) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^N (u(x_n) v(y_n))^{1/2} \mid z = \sum_{n=1}^N x_n \otimes y_n, x_n \in E, y_n \in F, N \geq 1 \right\}$$

et pour tout  $(x, y) \in E \times F$  :

$$(7) \quad u \otimes_v v(x \otimes y) = (u(x) v(y))^{1/2}.$$

La fonction  $u \otimes_v v$  est une  $p/2$ -semi-norme de  $E \otimes F$  car, pour  $t > 0$ ,  $u \otimes_v v(tz)$  est la borne inférieure des  $\sum_{n=1}^N u(t^{1/2} x_n) \vee v(t^{1/2} y_n)$  tels que  $z = \sum_{n=1}^N x_n \otimes y_n$ . Or pour une  $p/2$ -semi-norme  $w$  les conditions  $w(x \otimes y) \leq u(x) \vee v(y)$  et  $w(x \otimes y) \leq (u(x) v(y))^{1/2}$  sur  $E \otimes F$  sont équivalentes. Par suite  $u \otimes_v v$  est la plus grande  $p/2$ -semi-norme de  $E \otimes F$  vérifiant cette dernière condition, c'est-à-dire la  $p/2$ -semi-norme donnée par le second membre de (6).

Notons qu'on obtient ainsi l'existence d'une  $p/2$ -norme  $\otimes$ -continue sur  $E \otimes F$  si  $E$  et  $F$  sont des espaces  $p$ -normés. Mais on verra mieux ailleurs [6].

La formule (7) se déduit du lemme 1.4, qui donne :

$$u \otimes_v v(x \otimes y) = \inf \{ u(tx) \vee v(t^{-1}y) \mid t > 0 \}.$$

1.8. Si  $u$  et  $v$  sont maintenant des  $(F)$ -semi-normes arbitraires de  $E$  et  $F$ , la relation ci-dessus (valide dans ce cas) entraîne pour  $x \in E$  et  $y \in F$  :

$$u(x) \wedge v(y) \leq u \otimes_{\vee} v(x \otimes y) \leq u(x) \vee v(y).$$

Cela montre que si  $v(y) \neq 0$  l'application  $x \rightarrow x \otimes y$  de  $E$  dans  $E \otimes F$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques de  $E$  sur un sous-espace de  $E \otimes_{\vee} F$ .

1.9. Nous aurons besoin du lemme suivant. Pour tout entier  $r \geq 1$  posons :

$$G_r = \left\{ \sum_{n=1}^r x_n \otimes y_n \mid x_n \in E, y_n \in F \right\}.$$

LEMME. — Si  $E$  et  $F$  sont des espaces  $(F)$ -normés complets,  $G_r$  est un sous-ensemble complet de  $E \otimes_{\vee} F$ .

Il suffit de montrer que toute suite  $(z_h)_{h \geq 1}$  de  $G_r$  vérifiant  $\sum_{h=1}^{\infty} u \otimes_{\vee} v(z_{h+1} - z_h) < \infty$  converge vers un point de  $G_r$ ,  $u$  et  $v$  étant les  $(F)$ -normes de  $E$  et  $F$ .

Or en posant  $z_0 = 0$  on a  $z_h - z_{h-1} = \sum_{n=N_{h-1}}^{N_h-1} x_n \otimes y_n$  pour une suite strictement croissante d'entiers  $N_h$ , avec  $N_0 = 0$ , et pour des  $x_n \in E$ ,  $y_n \in F$  vérifiant  $\sum_{n=0}^{\infty} u(x_n) \vee v(y_n) < \infty$ . Posons :

$$H((x_n)) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} t_n x_n \mid t_n \text{ scalaire, } \sup |t_n| \leq 1 \right\}.$$

Ces séries convergent grâce aux majorations  $u(t_n x_n) \leq u(x_n)$ . Les ensembles  $H((x_n))$  et  $H((y_n))$  sont des compacts de  $E$  et  $F$  respectivement. Comme :

$$z_h = \sum_{n=0}^{N_h} x_n \otimes y_n$$

appartient à  $G_r$ , on trouve comme en 1.4 des points :

$$e_{h,i} \in H((x_n)) \quad \text{et} \quad f_{h,i} \in H((y_n)), \quad 1 \leq i \leq r,$$

vérifiant :

$$z_h = \sum_{i=1}^r e_{h,i} \otimes f_{h,i}$$

pour tout  $h \geq 1$ . Or l'ensemble des  $\sum_{i=1}^r e_i \otimes f_i$  où  $e_i \in H((x_n))$  et  $f_i \in H((y_n))$  pour tout  $i$ , avec  $r$  fixe, est un compact de  $E \otimes_{\vee} F$  puisque  $u \otimes_{\vee} v$  est une  $(F)$ -norme  $\otimes$ -continue. La suite  $(z_h)$  converge donc vers un point de ce compact, contenu dans  $G_r$ .

1.10. Si  $E$  et  $F$  sont des espaces  $(F)$ -normés, de  $(F)$ -normes  $u$  et  $v$ , soit  $E \otimes_{\vee} F$  l'espace  $(F)$ -normé complété de l'espace  $(F)$ -normé  $E \otimes_{\vee} F$ . Notons encore  $u \otimes_{\vee} v$  la  $(F)$ -norme de  $E \hat{\otimes}_{\vee} F$  (qui prolonge celle de  $E \otimes_{\vee} F$ ).

**PROPOSITION.** — *Tout  $z \in E \hat{\otimes}_v F$  admet un développement en série  $z = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n$ , avec  $x_n \in E$  et  $y_n \in F$  pour tout  $n$ , et on a :*

$$u \otimes_v v(z) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u(x_n) \vee v(y_n) \mid z = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n, x_n \in E, y_n \in F \right\}.$$

On sait bien en effet que si  $X_0$  est un sous-espace vectoriel dense d'un espace  $(F)$ -normé  $(X, \|\cdot\|)$ , alors tout  $z \in X$  admet un développement  $z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$  avec  $z_n \in X_0$ , et que  $\|z\|$  est la borne inférieure des  $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|$ ,  $z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ,  $z_n \in X_0$ . La proposition s'en déduit aisément.

*Remarque.* — Si  $E_0$  et  $F_0$  sont des sous-espaces vectoriels denses de  $E$  et  $F$  munis des  $(F)$ -normes  $u_0$  et  $v_0$  induites par  $u$  et  $v$ , l'injection canonique  $f_0$  de  $E_0 \otimes_v F_0$  dans  $E \otimes_v F$  est isométrique et se prolonge en une isométrie linéaire  $f$  de  $E_0 \hat{\otimes}_v F_0$  sur  $E \hat{\otimes}_v F$ .

Le prolongement continu  $f$  de  $f_0$  est *a priori* une contraction (application lipschitzienne avec la constante  $K=1$ ) linéaire. En outre l'application bilinéaire canonique de  $E_0 \times F_0$  dans  $E_0 \hat{\otimes}_v F_0$  se prolonge en une application bilinéaire  $b$  de  $E \times F$  dans  $E_0 \hat{\otimes}_v F_0$  vérifiant  $u_0 \otimes_v v_0(b(x, y)) \leq u(x) \vee v(y)$ . Par suite  $b$  se factorise par une contraction linéaire  $g : E \hat{\otimes}_v F \rightarrow E_0 \hat{\otimes}_v F_0$  inverse de  $f$ .

## 2. La topologie tensorielle la plus fine

2.1. Une *topologie tensorielle* sur le produit tensoriel  $E \otimes F$  de deux espaces vectoriels topologiques  $E$  et  $F$  est une topologie vectorielle sur  $E \otimes F$  telle que l'application  $(x, y) \rightarrow x \otimes y$  de  $E \times F$  dans  $E \otimes F$  soit continue.

2.2. **THÉORÈME.** — *Si  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels topologiques séparés, il existe une topologie tensorielle séparée sur  $E \otimes F$ .*

Plus précisément soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de  $(F)$ -semi-normes de  $E$  telle que l'ensemble des  $\{x \in E \mid u_i(x) < a\}$ ,  $i \in I$ ,  $a > 0$ , constitue une base de voisinages de l'origine dans  $E$ . Soit  $(v_j)_{j \in J}$  une famille de  $(F)$ -semi-normes de  $F$  vérifiant la même propriété pour  $F$ .

Alors l'ensemble des  $(F)$ -semi-normes  $u_i \otimes_v v_j$ ,  $i \in I$ ,  $j \in J$ , définit sur  $E \otimes F$  une topologie tensorielle séparée  $\mathcal{S}$ .

Comme pour le théorème 1.3 on se ramène au cas où  $E$  et  $F$  sont de dimension finie. Si alors  $w$  est une norme de  $E \otimes F$  on peut trouver  $i \in I$  et  $j \in J$  tels que  $w$  soit  $\otimes$ -continue pour  $u_i$  et  $v_j$  et  $u_i \otimes_v v_j$  est alors une  $(F)$ -norme de  $E \otimes F$  d'après 1.6.

2.3. Soit  $\mathcal{S}$  la topologie tensorielle la plus fine sur le produit tensoriel  $E \otimes F$  de deux espaces vectoriels topologiques  $E$  et  $F$ .

Il est clair qu'une application linéaire de  $E \otimes F$  dans un espace vectoriel topologique  $X$  est continue pour  $\mathcal{T}$  si et seulement si l'application bilinéaire associée de  $E \times F$  dans  $X$  est continue.

Donnons une famille de  $(F)$ -semi-normes de  $E \otimes F$  définissant la topologie  $\mathcal{T}$ .

Soit  $\mathcal{U}$  (resp.  $\mathcal{V}$ ) un ensemble de  $(F)$ -semi-normes continues de  $E$  (resp.  $F$ ) tel que toute  $(F)$ -semi-norme continue de  $E$  (resp.  $F$ ) soit continue par rapport à quelque  $(F)$ -semi-norme  $u \in \mathcal{U}$  (resp.  $v \in \mathcal{V}$ ).

Et soit  $\Phi$  l'ensemble de toutes les fonctions  $\varphi : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$  croissantes, concaves, continues et nulles en 0.

Pour tous  $u \in \mathcal{U}$ ,  $v \in \mathcal{V}$  et  $\varphi \in \Phi$  les fonctions  $\varphi(u) : x \rightarrow \varphi(u(x))$  et  $\varphi(v)$  sont des  $(F)$ -semi-normes continues de  $E$  et  $F$ .

PROPOSITION. — *La topologie tensorielle  $\mathcal{T}$  la plus fine sur  $E \otimes F$  peut être définie par l'ensemble des  $(F)$ -semi-normes  $\varphi(u) \otimes_\vee \varphi(v)$ ,  $u \in \mathcal{U}$ ,  $v \in \mathcal{V}$ ,  $\varphi \in \Phi$ .*

Soit en effet  $w$  une  $(F)$ -semi-norme  $\otimes$ -continue (c'est-à-dire  $\mathcal{T}$ -continue) de  $E \otimes F$ . Il existe alors  $u \in \mathcal{U}$  et  $v \in \mathcal{V}$  telles que l'application  $(x, y) \rightarrow x \otimes y$  de  $(E, u) \times (F, v)$  dans  $(E \otimes F, w)$  soit continue. La fonction :

$$\psi(t) = \sup \{ w(x \otimes y) \mid x \in E, y \in F, u(x) \vee v(y) \leq t \},$$

$$t \in \mathbf{R}_+,$$

à valeurs dans  $[0, \infty]$ , est nulle et continue en 0. Il existe une fonction  $\varphi \in \Phi$  majorant  $1 \wedge \psi$ . On a alors, pour tout  $(x, y) \in E \times F$ ,  $1 \wedge w(x \otimes y) \leq \varphi(u(x)) \vee \varphi(v(y))$  d'où  $1 \wedge w \leq \varphi(u) \otimes_\vee \varphi(v)$  ce qui montre que  $w$  est continue relativement à  $\varphi(u) \otimes_\vee \varphi(v)$ .

Observons aussi que  $\mathcal{T}$  est la topologie vectorielle la plus fine sur  $E \otimes F$  faisant tendre vers 0 la base de filtres des :

$$U \otimes V = \{ x \otimes y \mid x \in U, y \in V \},$$

où  $U$  et  $V$  parcourent les filtres des voisinages de l'origine de  $E$  et de  $F$ . La topologie  $\mathcal{T}$  admet donc pour système fondamental de voisinages de zéro les ensembles de la forme :

$$\bigcup_{N \geq 0} \sum_{n=0}^N U_n \otimes V_n,$$

où les  $U_n$  et  $V_n$  sont des voisinages de l'origine dans  $E$  et  $F$  (voir [9], p. 6).

2.4. THÉORÈME. — *Si  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels topologiques séparés et complets,  $E \otimes F$  est un espace vectoriel topologique séparé et complet pour la topologie tensorielle  $\mathcal{T}$  la plus fine.*



*Démonstration.* — Soient  $(u_i)_{i \in I}$  et  $(v_j)_{j \in J}$  des familles de  $(F)$ -semi-normes de  $E$  et  $F$  définissant respectivement les topologies de  $E$  et  $F$ . On suppose (c'est toujours possible) que si  $\alpha \in I$  et  $\beta \in I$  on peut trouver  $i \in I$  vérifiant  $u_\alpha(x) \vee u_\beta(x) \leq u_i(x)$  pour tout  $x \in E$  et que  $(v_j)_{j \in J}$  remplit la même condition pour  $F$ .

D'après 2.2 la topologie tensorielle  $\mathcal{S}$  sur  $E \otimes F$  définie par les  $(F)$ -semi-normes  $u_i \otimes v_j$ ,  $i \in I, j \in J$ , est séparée.

Les ensembles équilibrés  $G_r \subset E \otimes F$ ,  $r \geq 1$  entier, définis en 1.9 (ensembles des tenseurs de rang au plus égal à  $r$ ) vérifient  $G_r + G_r \subset G_{2r}$ , et  $E \otimes F = \bigcup_{r \geq 1} G_r$ . Le théorème résulte alors des lemmes (a) et (b) suivants (voir [5], p. 42).

LEMME (a). — *La topologie  $\mathcal{S}$  est la topologie vectorielle la plus fine sur  $E \otimes F$  coïncidant avec  $\mathcal{S}$  sur chaque  $G_r$ .*

Soit en effet  $z_0 \in G_r$ , soit  $|\cdot|$  une  $(F)$ -semi-norme continue de  $(E \otimes F, \mathcal{S})$  et soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\eta > 0$ ,  $i \in I$  et  $j \in J$  tels que  $|x \otimes y| \leq \varepsilon/2r$  dès que  $x \in E, y \in F$  et  $u_i(x) \vee v_j(y) \leq \eta$ . Soit  $z \in G_r$ , tel que  $u_i \otimes v_j(z - z_0) < \eta$ . Alors  $z - z_0 \in G_{2r}$  et (lemme 1.4)  $z - z_0 = \sum_{n=1}^{2r} e_n \otimes f_n$  pour des  $e_n \in E$  et  $f_n \in F$  vérifiant  $u_i(e_n) \vee v_j(f_n) < \eta$  d'où  $|e_n \otimes f_n| \leq \varepsilon/2r$  et  $|z - z_0| \leq \varepsilon$ . La restriction de  $|\cdot|$  à  $G_r$  est donc continue pour la topologie induite par  $\mathcal{S}$ .

LEMME (b). — *Chacun des  $G_r$  est complet dans  $(E \otimes F, \mathcal{S})$ .*

En écrivant  $i \leq i'$  quand  $u_i \leq u_{i'}$  pour  $i$  et  $i'$  dans  $I$ , et de même pour  $J$ ,  $E$  (resp.  $F$ ) est la limite projective du système projectif filtrant des espaces  $(F)$ -normés complets  $(E_i, u_i)$ ,  $i \in I$  (resp.  $(F_j, v_j)$ ,  $j \in J$ ), séparés-complétés des  $(E, u_i)$  (resp.  $(F, v_j)$ ), pour des contractions linéaires  $p_{i' i} : E_{i'} \rightarrow E_i$ ,  $i \leq i'$  (resp.  $q_{j' j} : F_{j'} \rightarrow F_j$ ,  $j \leq j'$ ).

Soit  $T$  l'espace vectoriel topologique limite projective des espaces  $(F)$ -normés  $E_i \otimes v_j F_j$  pour les applications linéaires  $p_{i' i} \otimes q_{j' j}$  de  $E_{i'} \otimes v_j F_{j'}$  dans  $E_i \otimes v_j F_j$ ,  $i \leq i'$  dans  $I$ ,  $j \leq j'$  dans  $J$ , qui sont continues d'après 1.5.

Les applications linéaires canoniques  $p_i : E \rightarrow E_i$  et  $q_j : F \rightarrow F_j$  vérifient :

$$\begin{aligned} u_i^*(p_i(x)) &= u_i(x), & x \in E; \\ v_j^*(q_j(y)) &= v_j(y), & y \in F. \end{aligned}$$

Les applications linéaires continues  $p_i \otimes q_j$  de  $(E \otimes F, \mathcal{S})$  dans  $E_i \otimes v_j F_j$ ,  $i \in I, j \in J$ , se factorisent par une injection linéaire continue  $f$  de  $(E \otimes F, \mathcal{S})$  dans  $T$ .

Si  $G_{i,j,r}$  est l'ensemble des tenseurs de  $E_i \otimes F_j$  de rang au plus égal à  $r$  et si  $T_r = T \cap \prod_{i,j} G_{i,j,r}$ , alors  $f(G_r) = T_r$  pour tout  $r \geq 1$ . Car si  $T_r$  contient  $t = (t_{i,j})$  on peut trouver  $h \in I$  et  $k \in J$  tels que, pour  $i \geq h$  et  $j \geq k$ , les  $t_{i,j}$  aient tous même rang  $s \leq r$ , d'où  $t_{i,j} \in E_i^0 \otimes F_j^0$  pour des espaces vectoriels  $E_i^0 \subset E_i$  et  $F_j^0 \subset F_j$  de dimension  $s$ . On voit alors (cf. [1], p. 170) que les  $p_{hi}$  et  $q_{kj}$ ,  $i \geq h$ ,  $j \geq k$ , induisent des bijections de  $E_i^0$  sur  $E_h^0$  et de  $F_j^0$  sur  $F_k^0$  : d'une décomposition  $t_{h,k} = \sum_{n=0}^s x_n^h \otimes y_n^k$  dans  $E_h^0 \otimes F_k^0$  on déduit aisément un système cohérent de décompositions  $t_{i,j} = \sum_{n=0}^s x_n^i \otimes y_n^j$ ,  $i \in I$ ,  $j \in J$ , d'où  $t \in f(G_r)$ .

En vertu du lemme 1.9 les  $G_{i,j,r}$  sont complets dans  $E_i \otimes_\vee F_j$  donc  $T_r$  est complet dans  $T$ .

Il suffit alors de constater que la topologie  $\mathcal{S}$  sur  $E \otimes F$  est l'image réciproque par  $f$  de la topologie de  $T$ , grâce à :

$$(8) \quad u_i \otimes_\vee v_j = (u_i^* \otimes_\vee v_j^*) \circ p_i \otimes q_j.$$

La  $(F)$ -semi-norme du premier membre majore celle du second car :

$$(u_i^* \otimes_\vee v_j^*)(p_i(x) \otimes p_j(y)) \leq u_i(x) \vee v_j(y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in E \times F.$$

Inversement soit  $z \in E \otimes F$  et soit  $a > u_i^* \otimes_\vee v_j^*(p_i \otimes q_j(z))$ . Comme  $p_i(E)$  et  $q_j(F)$  sont denses dans  $E_i$  et  $F_j$  il résulte de la remarque 1.10 que  $a > \sum_{n=1}^N u_i^*(x_n) \vee v_j^*(y_n)$  pour des  $x_n \in p_i(E)$  et des  $y_n \in q_j(F)$  vérifiant :

$$p_i \otimes q_j(z) = \sum_{n=1}^N x_n \otimes y_n,$$

d'où  $a > u_i \otimes_\vee v_j(z')$  si :

$$z' = \sum_{n=1}^N x'_n \otimes y'_n$$

avec :

$$x_n = p_i(x'_n) \quad \text{et} \quad y_n = q_j(y'_n), \quad x'_n \in E, \quad y'_n \in F.$$

Mais  $z - z'$  est dans le noyau  $p_i^{-1}(0) \otimes F + E \otimes q_j^{-1}(0)$  de  $p_i \otimes q_j$ , d'où  $u_i \otimes_\vee v_j(z - z') = 0$  et donc  $a > u_i \otimes_\vee v_j(z)$  ce qui donne (8).

*Remarque.* — Si, sous les hypothèses du théorème 2.4,  $E_0$  et  $F_0$  sont des sous-espaces vectoriels topologiques denses de  $E$  et  $F$  et si  $E_0 \otimes F_0$  est muni de la topologie tensorielle la plus fine, alors  $(E \otimes F, \mathcal{S})$  est l'espace vectoriel topologique complété de  $E_0 \otimes F_0$ .

En effet, pour tout espace vectoriel topologique séparé complet  $X$ , toute application bilinéaire continue de  $E_0 \times F_0$  dans  $X$  admet un prolongement bilinéaire continu unique à  $E \times F$  [2].

2.5. THÉORÈME. — Si  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels topologiques séparés et si  $B$  est un borné de  $E \otimes F$  pour la topologie tensorielle  $\mathcal{T}$  la plus fine, alors  $\sup \{ \text{rang}(z) \mid z \in B \} < \infty$ .

*Démonstration.* — Soient  $\hat{E}$  et  $\hat{F}$  les complétés de  $E$  et  $F$  et soit  $G_r$  (resp.  $G_r$ ) l'ensemble des tenseurs de  $\hat{E} \otimes \hat{F}$  (resp.  $E \otimes F$ ) de rang au plus égal à  $r$ . D'après le lemme 2.4 (b),  $G_r$  est fermé dans  $\hat{E} \otimes \hat{F}$  pour la topologie tensorielle la plus fine. La remarque ci-dessus montre donc que  $G_r = E \otimes F \cap G_r$  est fermé dans  $(E \otimes F, \mathcal{T})$ , et le lemme 2.4 (a) donne alors le résultat (voir (5), p. 42).

Cela montre que  $(E \otimes F, \mathcal{T})$  n'est pas localement convexe si  $E$  et  $F$  sont de dimension infinie et métrisables.

En effet si  $A$  et  $B$  sont des bornés de  $E$  et  $F$  engendrant des sous-espaces de dimension infinie,  $C = A \otimes B$  est borné pour  $\mathcal{T}$  mais d'après le théorème 2.5 l'enveloppe convexe de  $C$  n'est pas bornée pour  $\mathcal{T}$ .

2.6. Disons qu'un espace vectoriel topologique  $H$  est *evt-tonnelé* quand, pour tout espace vectoriel topologique  $X$ , tout ensemble simplement borné d'applications linéaires continues de  $H$  dans  $X$  est équicontinu ou, de façon équivalente ([9], p. 10-15) quand, pour tout espace vectoriel topologique métrisable et complet  $X$ , toute application linéaire de  $H$  dans  $X$  à graphe fermé est continue.

Si  $E$  et  $F$  sont métrisables et complets,  $E \otimes F$  est *evt-tonnelé* pour la topologie tensorielle  $\mathcal{T}$  la plus fine.

En effet, tout ensemble simplement borné d'applications bilinéaires continues de  $E \times F$  dans un espace vectoriel topologique  $X$  est équicontinu.

On a vu en [5], p. 157, qu'un espace vectoriel topologique  $H$  est *evt-tonnelé* s'il est complet, *evt-bornologique* (autrement dit si toute application linéaire bornée de  $H$  dans un espace vectoriel topologique quelconque  $X$  est continue) et si, pour tout borné  $B$  de  $H$ , il existe une suite de nombres  $a_n > 0$  telle que  $\bigcup_{N \geq 0} \sum_{n=0}^N a_n B$  soit encore borné dans  $H$ .

L'espace  $(E \otimes F, \mathcal{T})$  ci-dessus est *evt-tonnelé* (et également complet et *evt-bornologique*) mais ses bornés ne vérifient pas cette dernière propriété quand  $E$  et  $F$  sont de dimension infinie, d'après le théorème 2.5.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURBAKI (N.). — *Éléments de Mathématique*, Algèbre, chap. 2, Hermann, Paris, 1962.
  - [2] BOURBAKI (N.). — *Éléments de Mathématique*, Topologie générale, chap. 3, Hermann, Paris, 1960.
  - [3] GRAMSCH (B.). — Integration und holomorphe Funktionen in lokalbeschränkten Räumen. *Math. Annalen*, vol. 162, 1965, p. 190-210.
  - [4] GRAMSCH (B.). — Tensorprodukte und Integration vektorwertige Funktionen, *Math. Zeitschrift*, vol. 100, 1967, p. 108-122.
  - [5] TURPIN (Ph.). — Convexités dans les espaces vectoriels topologiques généraux. *Dissertationes Math.*, vol. 131, PWN, Varsovie, 1976.
  - [6] TURPIN (Ph.). — *Représentation fonctionnelle des espaces vectoriels topologiques* (à paraître).
  - [7] VOGT (D.). — Integrationstheorie in  $p$ -normierten Räumen, *Math. Annalen*, vol. 173, 1967, p. 219-232.
  - [8] WAELEBROECK (L.). — The tensor product of a locally pseudo-convex and a nuclear space. Colloquium on Nuclear Spaces and Ideals in Operator Algebras, *Studia Math.*, vol. 38, 1970, p. 101-104.
  - [9] WAELEBROECK (L.). — Topological Vector Spaces and Algebras, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 230, Springer, Berlin, 1971.
  - [10] WAELEBROECK (L.). — Topological vector spaces, Summer School on Topological Vector Spaces, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 331, p. 1-40, Springer, Berlin, 1973.
-