BULLETIN DE LA S. M. F.

FRANÇOIS LAUDENBACH

Relèvement linéaire des cobords

Bulletin de la S. M. F., tome 111 (1983), p. 147-150

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1983__111__147_0>

Bull. Soc. Math. France,
111, 1983, p. 147-150.

RELÈVEMENT LINÉAIRE DES COBORDS

PAR

FRANÇOIS LAUDENBACH (*)

RÉSUMÉ. — Sur l'espace des formes différentielles d'une variété lisse, l'opérateur cobord admet une section linéaire au-dessus de son image.

ABSTRACT. — The coboundary operator has a linear section above its image.

Soient M une variété lisse et Ω_c^k l'espace des formes différentielles sur M de degré k à support compact, muni de la topologie fine limite inductive stricte de Fréchet. On s'intéresse à l'opérateur cobord $d : \Omega_c^k \to \Omega_c^{k+1}$. Son image, l'espace des cobords, est un fermé d'après le théorème de de Rham : une forme est un cobord si et seulement si son intégrale sur les cycles simpliciaux (infinis, lorsque M est non compacte) est nulle.

Le problème de sélectionner un antécédent à un cobord, de façon régulière, est souvent rencontré en topologie des formes différentielles. Il est, par exemple, utile dans le théorème d'isotopie de MOSER [Mo]. On peut songer au théorème de sélection continue de Michaël : Une surjection linéaire de Fréchet admet une section continue [BP, prop. 7.1, p. 87]. Mais d'une part l'image de d n'est qu'un fermé dans une limite inductive de Fréchet et il n'est pas clair que le théorème de Michaël s'y applique, d'autre part il n'y a pas de théorème d'approximation permettant de récupérer la régularité.

La théorie des espaces nucléaires permet à Banyaga le relèvement des familles à un nombre fini de paramètres [Ba]. Dans le cas des variétés fermées, la théorie des formes harmoniques [Wa, chap. 6] donne une sélection linéaire.

Nous proposons ici une sélection linéaire en toute généralité. Notre construction utilise comme chez DE RHAM [Rh, § 22] les simplexes d'une triangulation. Elle paraphrase celle du livre de SINGER et THORPE [ST, p. 148 et suivantes] pour démontrer le théorème de DE RHAM, à la différence que les surjectivités sont remplacées par des sections linéaires continues.

(*) Texte reçu le 27 septembre 1982, révisé le 4 mars 1983.

F. LAUDENBACH, Université de Paris-Sud, Mathématique, Bâtiment n° 425, 91405 Orsay Cedex.

Soit K une structure simpliciale sur M, dont l'existence est assurée par le théorème de J. H. C. WHITEHEAD [Wh]; chaque simplexe est équipée d'une orientation. L'espace des chaînes simpliciales (infinies) de dimension k, $C_k(K)$, est l'espace vectoriel réel des combinaisons linéaires infinies des k-simplexes. On a un bord naturel $\partial : C_k(K) \to C_{k-1}(K)$, dont le noyau est l'espace des cycles (sous-entendu de K). Soit B_c^k le sous-espace de Ω_c^k constitué par les k-formes fermées d'intégrales nulles sur tous les cycles; c'est un sous-espace fermé. Par la formule de Stokes, B_c^k contient $d(\Omega_c^{k-1})$.

PROPOSITION. — *Il existe une application linéaire continue $\sigma_k : B_c^k \to \Omega_c^{k-1}$ qui est un inverse à droite de d.*

Pour la démonstration, introduisons l'espace des k-cochaînes à support compact $C_c^k(K)$; une k-cochaîne à support compact associe un réel à chaque k-simplexe, qui est nul sauf pour un nombre fini de simplexes. En transposant le bord des simplexes, on définit le cobord $d : C_c^k(K) \to C_c^{k+1}(K)$. Il est immédiat de vérifier que $C_*(K)$ s'identifie au dual algébrique de $C_c^*(K)$ et que ∂ est la transposée de d. Par les théorèmes généraux de la dualité algébrique [Bo 1, chap. II, § 2, n° 5 et § 7, n° 5], l'image de d et le noyau de ∂ sont chacun l'orthogonal de l'autre. Donc si :

$$B_c^k(K) = \{ f \in C_c^k(K) \mid \langle f, \gamma \rangle = 0 \text{ pour tout cycle } \gamma \},$$

on a $B_c^k(K) = d(C_c^{k-1}(K))$.

D'autre part une topologie naturelle sur $C_c^k(K)$ est la topologie limite inductive des sous-espaces de dimension finie. Si K_n est une suite exhaustive de compacts et si on note $C_{K_n}^k$ l'espace des cochaînes à support dans K_n, $C_c^k(K)$ est la limite inductive topologique des $C_{K_n}^k$. Le cobord est continu.

LEMME 1. — *Il existe une application linéaire continue $\sigma_k(K) : B_c^k(K) \to C_c^{k-1}(K)$ qui est un inverse à droite du cobord.*

Preuve. — On construit $\sigma_k(K)$ par récurrence sur les espaces de dimension finie $C_{K_n}^k$. ■

L'intégrale sur les simplexes donne une application $I^k : \Omega_c^k \to C_c^k(K)$ qui commute avec d et qui donc envoie B_c^k dans $B_c^k(K)$. De plus elle est continue sur les espaces de formes ayant leur support dans un compact fixe et la topologie fine de Ω_c^k est leur inductive [Sc, chap. III, § 1].

LEMME 2. — *Il existe une application linéaire continue $\alpha^* : C_c^*(K) \to \Omega_c^*$ qui est un inverse à droite de I^* et qui commute avec d.*

Preuve. — Supposons que α^{k-1} soit construite. Alors α^k est déterminée sur $B_c^k(K)$ et y est continue d'après le lemme 1. D'après [ST, p. 148, lemme 1], I^* est surjectif de l'espace des formes fermées à valeurs dans les cocycles. On peut donc étendre α^k aux cocycles avec valeurs dans l'espace des formes fermées, puis à toutes les cochaînes. Chacune de ces extensions se fait par récurrence sur les sous-espaces de dimension finie $B_{K_n}^k$. ■

Dans la suite, le k-squelette de K sera muni d'un voisinage régulier ouvert U_k et de deux autres V_k et W_k avec $\overline{W}_k \subset \overline{V}_k \subset U_k$. « Défini au voisinage du k-squelette » signifie « défini sur U_k », « à support compact » = « nul hors d'un compact de M », « nul au voisinage du k-squelette » = « nul sur $\overline{W}_k$ » et « $\tilde{\omega}$ est un prolongement de ω défini au voisinage du k-squelette » = « $\tilde{\omega}-\omega$ est nulle sur $\overline{W}_k$ ». Sur l'espace des formes différentielles définies sur U_k, on met la topologie limite inductive de la topologie de la convergence C^∞ sur $\overline{V}_k \cap K_n$. Choisissant une fois pour toutes une fonction C^∞ valant 1 sur $\overline{W}_k$ et à support dans V_k, on obtient la première partie du lemme suivant.

LEMME 3. — (1) *Il existe un opérateur linéaire continu P_q^k à valeurs dans Ω_c^k de prolongement des k-formes définies au voisinage du q-squelette à support compact.*

(2) *De plus, si $q<k$, on peut imposer $I^k \circ P_q^k = 0$.*

Preuve de (2). — Comme au lemme 2, on peut construire un inverse à droite β^k de I^k de sorte que $\beta^k(f)$ soit une forme à support dans le complémentaire de U_{k-1}. Si P_q^k satisfait (1), alors $P_q^k - \beta^k \circ I^k \circ P_q^k$ satisfait aussi (2). ■

Dans la situation du simplexe standard $\Delta^k \subset R^n$, le mot « voisinage » est utilisé comme plus haut.

LEMME 4. — *Soit $\mathscr{F}^q$ l'espace des q-formes fermées ω définies au voisinage de Δ^k, nulles au voisinage du bord $\partial\Delta^k$ et vérifiant $\int_\Delta \omega = 0$ si $q=k$. Soit $\mathscr{G}^{q-1}$ l'espace des $(q-1)$-formes définies au voisinage de Δ et nulles au voisinage du bord ($d : \mathscr{G}^{q-1} \to \mathscr{F}^q$). Il existe une application linéaire continue $R^q : \mathscr{F}^q \to \mathscr{G}^{q-1}$ qui est un inverse à droite pour d.*

Preuve. — Supposons $k=q$. La démonstration se fait par récurrence sur k. On identifie Δ^k au joint d'un point S avec Δ^{k-1}. On choisit une fois pour toutes une homotopie $\Delta^k \times [0, 1] \to \Delta^k$ de l'identité à une application à valeurs dans le voisinage prescrit de $S \star \partial\Delta^{k-1}$ et on la prolonge en une homotopie sur le voisinage de Δ^k avec les mêmes conditions limites. A une telle homotopie géométrique correspond un opérateur L tel que, pour toute k-forme fermée ω définie au voisinage de Δ^k, $L\omega$ soit nulle au voisinage de $S \star \partial\Delta^{k-1}$ et que $\omega = dL\omega$. L'opérateur L est obtenu par intégration sur les fibres de l'homotopie [Di, p. 12].

Si en plus ω appartient à $\mathscr{F}^k$, d'après la formule de Stokes $\int_{\Delta^{k-1}} L\omega = 0$ et $L\omega$ est nulle au voisinage de $\partial\Delta^{k-1}$. Donc la restriction φ de $L\omega$ au voisinage de Δ^{k-1} est un élément de $\mathscr{F}^{k-1}$. Par récurrence on écrit $\varphi = dR^{k-1}\varphi$. Comme au lemme 3 on prolonge $R^{k-1}\varphi$ en ψ défini au voisinage de Δ^k, nulle au voisinage de $S \star \partial\Delta^{k-1}$, et $L\omega - d\psi \in \mathscr{G}^{k-1}$.

Lorsque $k \neq q$ on fait le même type de récurrence. ∎

Remarque. — Pour $k=0$, c'est le classique lemme de Poincaré affirmant qu'au voisinage d'un point une forme fermée est (canoniquement) un cobord.

Démonstration de la proposition. — Soit $\omega \in B_c^k$; on a $I^k(\omega) \in B_c^k(K)$. On considère la forme $\varphi = \alpha^{k-1}\sigma_k(K)I^k(\omega)$. Posons $\tilde{\omega} = \omega - d\varphi$. Par construction $I^k(\tilde{\omega}) = 0$. Par les lemmes 4 et 3, au voisinage de 0-squelette $\tilde{\omega} = d\psi^0$, $\psi^0 \in \Omega_c^{k-1}$. Comme $I^{k-1}(\psi^0) = 0$, on a $I^k(d\psi) = 0$. Si $\tilde{\omega}^0 = \tilde{\omega} - d\psi$, on a $I^k(\tilde{\omega}^0) = 0$ et $\tilde{\omega}^0$ est nulle au voisinage du 0-squelette. Ensuite on écrit $\tilde{\omega}^0 = d\psi^1$, ψ^1 défini au voisinage du 1-squelette et nulle au voisinage du 0-squelette, etc. Finalement, après une suite d'opérations linéaires continues, on écrit ω comme un cobord. ∎

BIBLIOGRAPHIE

[Ba] BANYAGA (A.). — Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique, *Comm. Math. Helv.*, t. 53, 1978, p. 174-227.

[Bo 1] BOURBAKI (N.). — *Algèbre*, Hermann, Paris, 1970.

[Bo 2] BOURBAKI (N.). — *Espaces vectoriels topologiques*, Hermann, Paris, 1966.

[BP] BESSAGA (C.) et PELCZYNSKI (A.). — *Selected topics in infinite-dimensional topology*, PWN, Varsovie, 1975.

[Di] DIEUDONNÉ (J.). — *Éléments d'analyse*, Gauthier-Villars, Paris, 1982.

[Mo] MOSER (J.). — On the volume elements on a manifold, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 120, 1965, p. 286-294.

[Rh] de RHAM (G.). — *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1960.

[Sc] SCHWARTZ (L.). — *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1957.

[ST] SINGER (I.) et THORPE (J.). — *Lectures on elementary topology and geometry*, Scott, Foresman and Co, Glenview, Illinois, 1967.

[Wa] WARNER (F.). — *Foundations of differentiable manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman and Co., Glenview, Illinois, 1971.

[Wh] WHITEHEAD (J. H. C.). — On C^1-complexes, Ann. Math., t. 41, 1940, p. 809-824.