BULLETIN DE LA S. M. F.

YVES DUPAIN
MICHEL MENDÈS FRANCE
CLAUDE TRICOT

Dimensions des spirales

Bulletin de la S. M. F., tome 111 (1983), p. 193-201
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1983__111__193_0>

Bull. Soc. math. France,
111, 1983, p. 193-201.

DIMENSIONS DES SPIRALES

PAR

YVES DUPAIN, MICHEL MENDÈS FRANCE et CLAUDE TRICOT (*)

RÉSUMÉ. — G. BOULIGAND a donné une définition de la dimension d'une courbe liée au recouvrement par une bande. Nous introduisons une nouvelle dimension des courbes liée au nombre de points d'intersection de la courbe avec une droite aléatoire. Pour une grande classe de spirales, ces deux dimensions coïncident.

ABSTRACT. — G. BOULIGAND has given a definition of a curve related to the covering of the curve by a band. We define a new dimension of a curve in terms of the number of intersection points of the curve with a random straight line. For a large class of spirals, both dimensions coincide.

1. Introduction

De l'escargot au tourbillon turbulent, la nature fourmille de spirales (D'ARCY THOMPSON [1], COOK [4], STEVENS [12]) lesquelles se prêtent à une étude dimensionnelle. Apporter notre contribution à ce nouveau regard sur la nature inauguré par MANDELBROT dans son livre sur les objets fractals [7], tel pourrait être un des buts de notre étude. Nous nous contenterons cependant de nous limiter à un cadre purement mathématique.

Les spirales que l'on considère sont toutes bornées dans le plan, s'enroulent autour d'un point qu'on choisit être l'origine, et tendent vers ce point. Ces spirales sont représentées par leur équation polaire $\rho = f(\theta)$ où f est définie pour $\theta \geqslant 0$, décroissante vers 0 quand θ croît indéfiniement.

(*) Texte reçu le 15 novembre 1982, révisé le 15 avril 1983.

Y. DUPAIN et M. MENDÈS FRANCE, Université de Bordeaux-I, U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique, 351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex.

C. TRICOT, The University of Liverpool, Department of Mathematics, P.O. Box 147, Liverpool L693BX, G.-B.

Certaines spirales comme $\rho=(1+\theta)^{-1}$ convergent « rapidement » vers 0 alors que d'autres $\rho=(\log(2+\theta))^{-1}$ convergent lentement vers 0. Ces dernières ont une tendance plus grande à « remplir » un voisinage de 0, presque à la façon d'une courbe de Peano, et en ce sens on pourrait assimiler la spirale lente à un ensemble localement bidimensionnel.

La dimension topologique et la dimension de Hausdorff d'une spirale sont toujours égales à l'unité et ne permettent donc pas de classifier les spirales. Par contre, la dimension de BOULIGAND (notée $\dim_B$), plus fine que les dimensions précédentes, permet cette classification. Nous verrons que lorsque Γ parcourt la famille des spirales, $\dim_B \Gamma$ parcourt l'intervalle [1, 2]. Plus lente est la spirale et plus sa dimension avoisine 2.

En partant d'une remarque de STEINHAUS, nous définissons une nouvelle dimension que nous appellerons dimension de STEINHAUS ($\dim_S$). Les définitions de $\dim_B$ et $\dim_S$ ne sont pas logiquement équivalentes. Nous montrerons cependant que pour une grande classe de spirales Γ :

$$\dim_B \Gamma = \dim_S \Gamma.$$

Ceci constituera notre résultat principal.

2. Dimension de BOULIGAND

Soit A un ensemble plan borné, soit $\varepsilon>0$, soit $A(\varepsilon)$ l'ensemble des points à distance moindre que ε de A, et $|A(\varepsilon)|$ sa mesure.

Si A est réduit à un point :

$$|A(\varepsilon)| \asymp \varepsilon^2, \qquad \varepsilon \to 0.$$

(La notation $f(x) \asymp g(x)$, $x \to x_0$ signifie :

$$0<\liminf_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \limsup_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} < +\infty.)$$

Si A est un segment de droite :

$$|A(\varepsilon)| \asymp \varepsilon$$

et si enfin A est un disque :

$$|A(\varepsilon)| \asymp 1 = \varepsilon^0.$$

Les exposants 2, 1, 0 de ε varient en sens opposé des dimensions respectives du point, du segment, du disque. Cette remarque simple a conduit G. BOULIGAND à définir la dimension de A [3] :

$$\dim_B(A)=\inf\{\alpha/\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^{\alpha-2}|A(\varepsilon)|=0\}.$$

Si A est une courbe plane bornée, alors :

$$1\leqslant\dim_B(A)\leqslant 2.$$

A titre d'illustration, on se convaincra que la dimension de la spirale $\rho=(1+\theta)^{-a}$, $a>0$ est $\max\{1, 2(1+a)^{-1}\}$, que la spirale $\rho=(\log(2+\theta))^{-1}$ est de dimension 2 et que la spirale $\rho=\exp(-\theta)$ est de dimension 1.

Remarque. — On montre sans difficulté que la dimension supérieure de KOLMOGOROV et TIHOMIROV [6] liée à la ε-capacité et la ε-entropie coïncide avec la dimension de BOULIGAND. On pourra aussi comparer ces dimensions avec celle de E. BOREL [2], page 294.

3. Dimension de STEINHAUS

Une droite D du plan (x, y) est repérée par son équation normale :

$$x\cos\theta+y\sin\theta-\rho=0,$$

où $0\leqslant\theta<2\pi$, $\rho\geqslant 0$. Il y a unicité de la représentation sauf si $\rho=0$. Un point (θ, ρ), $0\leqslant\theta<2\pi$, $\rho\geqslant 0$ représente donc une droite et réciproquement à part l'exception signalée. La mesure de Lebesgue du plan (θ, ρ) induit une mesure $dD=d\theta\,d\rho$ sur l'ensemble des droites D.

Soit C une courbe plane bornée dans le plan (x, y), localement rectifiable. Soit $\Omega=\Omega(C)$ l'ensemble des droites qui intersectent C et soit Ω_k le sous-ensemble des droites qui coupent C en k points exactement ($k\geqslant 1$). Soit enfin :

$$\omega=\operatorname{mes}\Omega \qquad \text{et} \qquad \omega_k=\operatorname{mes}\Omega_k.$$

On supposera toujours que $\omega_\infty=0$. Cette condition est d'ailleurs automatiquement remplie pour les spirales qui nous intéressent.

Un théorème classique de STEINHAUS [11] (*voir* aussi SANTALO [10]) montre que la longueur $l(C)$ de C est donnée par :

$$l(C)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}k\omega_k.$$

Appliquée au contour fermé ∂K frontière de l'enveloppe convexe K de C, cette formule s'écrit :

$$l(\partial K)=\frac{1}{2}2\,\omega=\omega,$$

d'où :

$$\frac{2\,l(C)}{l(\partial K)}=\sum_{k=1}^{\infty} k\,\frac{\omega_k}{\omega}.$$

Si on interprète ω_k/ω comme la probabilité pour qu'une droite intersectant C coupe C en k points exactement, on voit que $2\,l(C)/l(\partial K)$ est l'espérance mathématique du nombre de points d'intersection de C avec une droite aléatoire. Ainsi la longueur $l(C)$ est liée de façon précise au nombre moyen de points d'intersection avec une droite. Il s'ensuit que la dimension de STEINHAUS définie ci-dessous est elle aussi liée à cette même quantité.

Supposons que $l(C)$ soit infini. Il se peut qu'il existe alors un nombre réel α (nécessairement >1) tel que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,(\omega_k)^{\alpha}<\infty.$$

Ce nombre est de « dimension α » car :

$$\omega_k=\int_{\Omega_k} d\theta\, d\rho,$$

a la dimension d'une longueur. Nous appellerons dimension de STEINHAUS de C le nombre :

$$\dim_S C=\inf\left\{\alpha\geqslant 1/\sum_{k=1}^{\infty} k\,(\omega_k)^{\alpha}<\infty\right\}=\sup\left\{\alpha\geqslant 1/\sum_{k=1}^{\infty} k\,(\omega_k)^{\alpha}=\infty\right\}.$$

Une courbe de longueur finie est donc de dimension unité. Un calcul simple montre que la spirale $\rho=(1+\theta)^{-a}$ a pour dimension $\max\{1,\,2(1+a)^{-1}\}$ et que la spirale $\rho=(\log(2+\theta))^{-1}$ a pour dimension 2. Sur ces exemples, les dimensions de BOULIGAND d'une part et de STEINHAUS d'autre part coïncident. Ce résultat se généralise ainsi qu'on va le voir au paragraphe suivant.

4. Lien entre les deux dimensions

THÉORÈME. — *Soit Γ une spirale localement convexe définie par son équation polaire $\rho=f(\theta)$ où f est réelle, définie continue pour $\theta\geqslant 0$, tendant vers zéro pour θ infini et convexe. Alors :*

$$\dim_B(\Gamma)=\dim_S(\Gamma).$$

La démonstration du théorème se fait à l'aide des deux lemmes suivants :

LEMME 1. — *Soit Γ la spirale $\rho=f(\theta)$ où f est continue et décroissante vers 0. On suppose que Γ est localemenr convexe. Soit :*

$$\delta_k=f(2k\pi)-f(2(k+1)\pi).$$

Alors :

$$\dim_s(\Gamma)=\inf\{\alpha\geqslant 1/\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} k\,\delta_k^\alpha<\infty\}.$$

Démonstration. — Soit Ω'_k l'ensemble des droites $x\cos\theta+y\sin\theta-\rho=0$, avec $f(2(k+1)\pi)\leqslant\rho<f(2k\pi)$. La convexité locale de Γ entraîne que l'ensemble des points situés entre Ox et une quelconque demi-spire ($k\pi\leqslant\theta\leqslant(k+1)\pi$) est convexe. On en déduit que les droites de Ω'_k coupent la première spire ($0\leqslant\theta<2\pi$) en 1 ou 2 points, les $(k-1)$ spires suivantes en deux points, et la spire d'ordre $k+1$ ($2k\pi\leqslant\theta<2(k+1)\pi$) en 0,1, 2 ou 3 points. Les spires d'ordre supérieur ne sont pas coupées. Il y a donc au moins $2k-1$, au plus $2k+3$ points d'intersection.

Soit Ω_j l'ensemble des droites qui intéressent Γ en j points exactement. Alors :

$$\Omega_{2k}\subset\Omega'_{k-1}\cup\Omega'_k,$$
$$\Omega_{2k+1}\subset\Omega'_{k-1}\cup\Omega'_k\cup\Omega'_{k+1},$$

et comme $\operatorname{mes}\Omega'_k=2\pi\delta_k$:

$$\omega_{2k}\leqslant 2\pi(\delta_{k+1}+\delta_k),$$
$$\omega_{2k+1}\leqslant 2\pi(\delta_{k-1}+\delta_k+\delta_{k+1}).$$

On tire de ces deux inégalités :

$$2k\,\omega_{2k}^\alpha+(2k+1)\,\omega_{2k+1}^\alpha\leqslant\lambda_1\textstyle\sum_{i=k-1}^{k+1} i\,\delta_i^\alpha\qquad(\alpha\geqslant 1),$$

λ_1 constante. Ceci assure que :

$$\dim_s(\Gamma) \leqslant \inf\{\alpha \geqslant 1/\sum_1^\infty k\delta_k^\alpha < +\infty\}.$$

Pour l'inégalité dans l'autre sens, on observe que :

$$\Omega'_k \subset \bigcup_{2k-1}^{2k+3} \Omega_i,$$

d'où l'on tire :

$$k\,\delta_k^\alpha \leqslant \lambda_2 \sum_{2k+1}^{2k+3} i\,\omega_i^\alpha,$$

λ_2 constante.

LEMME 2. — *Soit* (ε_k) *une suite décroissante tendant vers zéro. On pose :*

$$D_1 = \inf\{\alpha \mid \sum_1^\infty k\,\varepsilon_k^\alpha < +\infty\},$$
$$D_2 = 2\inf\{\alpha \mid \lim_{k\to\infty} \varepsilon_k^{\alpha-1} \sum_k^\infty \varepsilon_i = 0\},$$
$$D_3 = \inf\{\alpha \mid \lim_{k\to\infty} k\,\varepsilon_k^{\alpha-1} \sum_k^\infty \varepsilon_i = 0\},$$
$$D_4 = \inf\{\alpha \mid \lim_{k\to\infty} \varepsilon_k^{\alpha-1} \sum_1^k i\,\varepsilon_i = 0\},$$
$$D_5 = \inf\{\alpha \mid \lim_{k\to\infty} k^2\,\varepsilon_k^\alpha = 0\}.$$

Alors $D_1 = D_5$.

Si de plus :

$$\sum_1^\infty \varepsilon_k < +\infty \qquad et \qquad \sum_1^\infty k\,\varepsilon_k = +\infty,$$

alors :

$$1 \leqslant D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 \leqslant 2.$$

Démonstration. — (i) $\sum_1^\infty k\,\varepsilon_k^\alpha < +\infty \Rightarrow k\,\varepsilon_k^\alpha = O(k^{-1})$, donc $D_5 \leqslant D_1$.

Inversement :

$$k^2\,\varepsilon_k^\alpha \to 0 \quad \Rightarrow \quad \forall\, \beta > \alpha : \quad k\,\varepsilon_k^\beta = O(k^{1-2\,\beta/\alpha}),$$

dont la somme converge. Donc $D_1 \leqslant D_5$.

(ii) (*a*) L'égalité :

$$\inf\{\alpha/\varepsilon_k^{\alpha-1} \sum_k^\infty \varepsilon_i \to 0\} = \inf\{\alpha/k\,\varepsilon_k^\alpha \to 0\}$$

a été prouvée dans [13]. A l'aide de transformations mineures, on en tire $D_2 = D_5$.

(*b*) L'inégalité :

$$(2k)^2 \varepsilon_{2k}^{\alpha} < 4k\, \varepsilon_k^{\alpha-1} \textstyle\sum_k^{\infty} \varepsilon_i,$$

valable pour tout $\alpha \geqslant 1$, entraîne :

$$D_5 \leqslant \max(1,\, D_3).$$

Mais si $D_5 < 1$, il existe $\alpha < 1$ tel que :

$$\varepsilon_k = O(k^{-2/\alpha}),$$

et alors $\Sigma k\, \varepsilon_k$ converge, ce qui est impossible par hypothèse. Donc $1 \leqslant D_5 \leqslant D_3$.

D'autre part :

$$\textstyle\sum_1^{\infty} \varepsilon_k < +\infty \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_k = O(k^{-1}) \qquad \text{donc} \quad D_5 \leqslant 2,$$
$$\text{et} \qquad k\, \varepsilon_k = O(1) \qquad \text{donc} \quad D_3 \leqslant 2.$$

Pour démontrer que $D_3 \leqslant D_5$, on peut donc se restreindre au cas :

$$D_5 < 2,$$

choisir $\alpha \in]D_5,\, 2[$, et constater que :

$$\varepsilon_k = O(k^{-2/\alpha}) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_k^{\alpha-1} \textstyle\sum_k^{\infty} \varepsilon_i = O(k^{-2(\alpha-1)/\alpha + 1 - 2/\alpha}) = O(k^{-1}).$$

Donc $\alpha \geqslant D_3$ d'où $D_3 \leqslant D_5$, puis $D_3 = D_5$.

(*c*) $D_5 \leqslant D_4$ provient directement de :

$$\frac{1}{2} k^2\, \varepsilon_k^{\alpha} < \varepsilon_k^{\alpha} \textstyle\sum_1^k i \leqslant \varepsilon_k^{\alpha-1} \sum_1^k i\, \varepsilon_i,$$

et $D_4 \leqslant D_5$ de :

$$\varepsilon_k = O(k^{-2/\alpha}) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_k^{\alpha-1} \textstyle\sum_1^k i\, \varepsilon_i = O(k^{-2(\alpha-1)/\alpha + 2 - 2/\alpha}) = O(1),$$

valable si $\alpha > 1$.

Démonstration du théorème. — D'après les hypothèses faites sur la fonction f, la partie de courbe Γ_k correspondant à $2k\pi \leqslant \theta \leqslant 2(k+1)\pi$ est un arc simple de Jordan de longueur finie L_k, telle que :

$$2\pi f(2(k+1)\pi) \leqslant L_k \leqslant 2\pi f(2k\pi).$$

Soit $\Gamma_k(r)$ l'ensemble des points du plan à distance moindre que r de Γ_k. Il existe une constante C (inférieure à 9π) telle que :

$$\forall r < L_k : \quad |\Gamma_k(r)| \leqslant C L_k r$$

(pour le voir : en posant M_r le plus grand nombre de boules disjointes de rayon r centrées en Γ_k, montrer que $M_r \leqslant L_k/r$, et $|\Gamma_k(r)| \leqslant 9\pi r^2 M_r$).

Fixons $r \in]0, f(0)[$, et soit k l'entier tel que :

$$\delta_{k+1} \leqslant r < \delta_k,$$

où $\delta_k = f(2k\pi) - f(2(k+1)\pi)$. k est unique, car la convexité de f entraîne la décroissance de δ_k, propriété fondamentale pour la suite.

L'ensemble $\Gamma(r)$ contient tous les points à distance $\leqslant f(2(k+1)\pi)$ de l'origine. D'autre part, tout point de $\Gamma(r)$ est, soit à distance $\leqslant r + f(2(k+1)\pi)$ de 0, soit à distance $\leqslant r$ d'un Γ_i, $0 \leqslant i \leqslant k$. On en déduit les inégalités suivantes :

$$\pi f(2(k+1)\pi)^2 \leqslant |\Gamma(r)| \leqslant \pi [f(2(k+1)\pi) + r]^2 + \textstyle\sum_{i=0}^k |\Gamma_i(r)|.$$

En utilisant le fait que $f(2k\pi) = \sum_{i=k}^\infty \delta_i$, l'inégalité de gauche peut s'écrire :

$$|\Gamma(r)| \geqslant \pi (\textstyle\sum_{k+1}^\infty \delta_i)^2$$

et donc, pour tout α, $0 < \alpha < 2$:

$$r^{\alpha-2} |\Gamma(r)| \geqslant \pi \delta_k^{\alpha-2} (\textstyle\sum_{k+1}^\infty \delta_i)^2$$
$$= \pi (\delta_k^{\alpha/2-1} \textstyle\sum_k^\infty \delta_i - \delta_k^{\alpha/2})^2.$$

Comme $\delta_k^{\alpha/2}$ tend vers zéro, ceci assure que :

$$\dim_B(\Gamma) \geqslant D_2,$$

en reprenant les notations du lemme 2.

Quant à l'inégalité de droite, elle devient :

$$|\Gamma(r)| \leqslant \pi [\textstyle\sum_{k+1}^\infty \delta_i + r]^2 + 2\pi C r [\sum_0^k (i+1)\delta_i + (k+1) \sum_{k+1}^\infty \delta_i]$$

et donc pour tout α, $1 < \alpha < 2$:

$$r^{\alpha-2} |\Gamma(r)| \leqslant \pi (\delta_{k+1}^{\alpha/2-1} \textstyle\sum_{k+1}^\infty \delta_i + \delta_k^{\alpha/2})^2 +$$
$$2\pi C \delta_k^{\alpha-1} [\textstyle\sum_0^k (i+1)\delta_i + (k+1) \sum_{k+1}^\infty \delta_i]$$
$$\leqslant \pi (\delta_{k+1}^{\alpha/2-1} \textstyle\sum_{k+1}^\infty \delta_i + \delta_k^{\alpha/2})^2 + 2\pi C \delta_k^{\alpha-1} [\sum_0^k i\delta_i + k \sum_k^\infty \delta_i] + O(\delta_k^{\alpha-1}).$$

Or $\sum_0^\infty \delta_i = f(0)$ est borné, et $\sum_0^\infty i\,\delta_i$ diverge : pour s'en assurer, il suffit d'observer que cette somme est supérieure, à une constante près, à la longueur totale de la spirale. D'après le lemme 2 les quantités D_2, D_3, D_4 sont donc dans [1, 2], et la dernière inégalité prouve que :

$$\dim_B(\Gamma) \leqslant \max(D_2, D_3, D_4) = D_5.$$

Le théorème se déduit alors des lemmes 1 et 2.

RÉFÉRENCES

[1] D'ARCY THOMPSON, On Growth and Form, J. T. BONNER, éd., Cambridge University Press, 1969.

[2] BOREL (E.). – *Éléments de la théorie des ensembles*, Albin-Michel, 1949.

[3] BOULIGAND (G.). – Sur la notion d'ordre de mesure d'un ensemble fermé, *Bull. Sc. Math.*, vol. 2, n° 53, 1929, p. 185-192.

[4] COOK (T. A.). – Curves of Life, Dover, 1979.

[5] DEKKING (F. M.) et MENDÈS FRANCE (M.). – Uniform Distribution Modulo One: a Geometrical Viewpoint, *Jour. für die Reine und Angewandte Mathematik*, vol. 329, 1981, p. 143-153.

[6] KOLMOGOROV (A. N.) et TIHOMIROV (Y. M.). – ε-Entropy and ε-Capacity of Sets in Functional Spaces, *Amer. Math. Soc. Translations*, vol. 17, série 2, 1961, p. 277-364.

[7] MANDELBROT (B. B.). – Fractals, Form Chance and Dimension, Freeman, 1977.

[8] MENDÈS FRANCE (M.). – Chaotic Curves, *Luminy symposium on Oscillations*, sept. 1981, J. DEMONGEOT, éd., *Springer Verlag Lecture Notes in Biomathematics* (à paraître).

[9] MENDÈS FRANCE (M.) et TENENBAUM (G.). – Dimension des courbes planes, papiers pliés et suites de Rudin-Shapiro, *Bull. Soc. math. France*, t. 109, 1981, p. 207-215.

[10] SANTALÓ (L.). – Integral Geometry and Geometric Probability, *Encyclopedia of Mathematics*, Addison Wesley, 1976.

[11] STEINHAUS (H.). – Length Shape and Area, *Colloquium Mathematicum*, vol. 3, 1954, p. 1-13.

[12] STEVENS (P. S.). – Les formes dans la nature, Seuil Science Ouverte, 1978.

[13] TRICOT (C.). – Douze définitions de la densité logarithmique, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 293, série I, 1981, p. 549-552.