

# BULLETIN DE LA S. M. F.

YVES FÉLIX

JEAN-CLAUDE THOMAS

## **Module d'holonomie d'une fibration**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 113 (1985), p. 255-258

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1985\\_\\_113\\_\\_255\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1985__113__255_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## MODULE D'HOLONOMIE D'UNE FIBRATION

PAR

YVES FELIX (\*) et JEAN-CLAUDE THOMAS (\*\*)

RÉSUMÉ. — Si  $F$  désigne la fibre homotopique d'une application  $f: L \rightarrow K$ , alors  $H_*(F)$  supporte une structure canonique de  $H_*(\Omega K)$ -module. Nous démontrons que si  $f$  est l'inclusion d'une cofibration  $VS^m \rightarrow L \xrightarrow{f} K$  alors l'homologie réduite de  $F$  est un  $H_*(\Omega K)$ -module libre engendré par  $H_+(VS^m)$ .

ABSTRACT. — Let  $F$  be the homotopy fibre of  $f: L \rightarrow K$ , then  $H_*(F)$  is equipped with a canonical structure of  $H_*(\Omega K)$ -module. We prove that if  $f$  is the inclusion map in the cofibration  $VS^m \rightarrow L \xrightarrow{f} K$ , then the reduced homology of  $F$  is a free  $H_*(\Omega K)$ -module generated by  $H_+(VS^m)$ .

Mots clés : Construction de Adams-Hilton — Holonomie.

Classification A.M.S. : 55 P 05-55 R 05.

### Introduction

Dans une fibration  $F \xrightarrow{J} E \xrightarrow{P} B$ , où  $B$  est supposé connexe par arcs et pointé, la propriété de relèvement des homotopies définit, à homotopie près, une opération de l'espace des lacets de Moore  $\Omega B$  sur la fibre  $F$ ,  $[W]$ , notée :

$$v: F \times \Omega B \rightarrow F,$$

(\*) Texte reçu le 23 mai 1984, révisé le 20 mars 1985.

(\*) Chercheur qualifié au F.N.R.S., Université Catholique de Louvain, Institut de Mathématiques, 1348 Louvain-La-Neuve, Belgique.

(\*\*) E.R.A. au C.N.R.S. 07 590, Université de Lille I, U.E.R. de Mathématiques, 59655 Villeneuve-d'Ascq.

Cette application induit une unique structure de  $H_*(\Omega B)$ -module (à droite) sur  $H_*(F)$  que nous appelons *module d'holonomie*.

Dans le cas de la fibration canonique  $\Omega B \xrightarrow{i} PB \xrightarrow{p} B$ , la structure d'holonomie de  $H_*(\Omega B)$  est induite par la structure d'algèbre de Pontrjagin de  $H_*(\Omega B)$  [F. T]. Aussi, prolongeant les techniques initialement introduites par ADAMS et HILTON [A. H], nous construisons (Lemme) un module différentiel gradué, dont l'homologie est un  $H_*(\Omega B)$ -module isomorphe au module d'holonomie  $H_*(F)$  et nous démontrons :

THÉORÈME. — Soient  $L$  un CW-complexe 1-réduit et  $\bigvee_{i=1}^n S^{n_i} \xrightarrow{f} L \xrightarrow{i} K$  une cofibration ( $n_i \geq 2$ ). Désignons par  $F$  la fibre homotopique de l'inclusion  $i$  de  $L$  dans  $K$ .

Alors,  $H_+(F)$  est un  $H_*(\Omega K)$ -module libre engendré par  $H_+(\bigvee_i S^{n_i})$ .

( $H_*(X)$  désigne l'homologie singulière de  $X$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  et  $H_+(X)$  désigne l'homologie réduite.)

La construction et le théorème sont illustrés par les exemples suivants :

Exemple 1. — Soit  $F$  la fibre homotopique de la projection :

$$S_a^3 \vee S_b^3 \cup_{\varphi} e^{2m+2} \rightarrow S_a^3,$$

où  $\varphi = k[a[a, \dots, [a, b] \dots]]$  ( $m$  fois  $a$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ).

La construction précédente montre que :

$$H_+(F) = (\mathbb{Z}[\alpha]/k \cdot \alpha^m) \cdot b,$$

avec  $\deg b = 3$ ,  $\deg \alpha = 2$ ,  $\mathbb{Z}[\alpha] = H_2(\Omega S^3 a)$ .

Exemple 2. — Soit  $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B$  une fibration où  $E$  est supposé avoir le type d'homotopie d'un bouquet de sphères.

Désignons par  $V$  l'image de la composée,

$$\pi_*(\Omega E) \xrightarrow{\Omega p} \pi_*(\Omega B) \xrightarrow{\text{Hurewicz}} H_*(\Omega B)$$

et par  $\partial: H_*(\Omega B) \rightarrow H_*(F)$  le morphisme induit par le connectant de la suite exacte de Puppe  $v|_{\pi_*(\Omega B)}: \Omega B \rightarrow F$ . Un petit calcul montre alors :

$$\text{Im } \partial = H_*(\Omega B)/V \cdot H_*(\Omega B).$$

*Exemple 3* [C.M.N.], § 8. — Soit  $f: S^{m-1} \cup_{p'} e^m \rightarrow S^m$  l'application cellulaire qui écrase le  $m-1$  squelette et  $F = F_m(p')$  la fibre homotopique de  $f$ , le théorème précédent entraîne que

$$H_+(F_m(p')) = H_+(S^{m-1}) \otimes H_*(\Omega S^m)$$

en tant que  $H_*(\Omega S^m)$ -module.

Signalons que, dans son étude de la  $\mathbb{Z}$ -formalité [A], D. ANICK étudie l'homologie d'un carré fibré par des techniques similaires. Notons aussi que, dans [B], H. BAUES donne une description cellulaire de la fibre homotopique de certaines applications. Le théorème précédent peut se déduire de ses constructions.

*Démonstration du théorème.* — Soit  $K$  un  $C.W.$ -complexe 1-réduit ( $K^0 = K^1 = *$ ) et  $(e_i)_{i \in I}$  l'ensemble de ses cellules de dimension supérieure ou égale à deux. Désignons par  $A(K)$  l'anneau unitaire libre engendré par  $\{a_i\}_{i \in I}$  avec  $\deg(a_i) = \dim e_i - 1$  et par  $B(K)$  la somme directe de  $\mathbb{Z}$  et du groupe abélien libre engendré par  $\{b_i\}_{i \in I}$  où  $\deg(b_i) = \dim e_i$ . D'après [A.H], il existe des différentielles  $d, D, \bar{D}$  et des homomorphismes  $\theta, \theta'$  et  $\bar{\theta}$  rendant commutatif le diagramme de groupes différentiels :

$$\begin{array}{ccc} (A(K), d) & \xrightarrow{\theta'} & C_*(\Omega K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (B(K) \otimes A(K), D) & \xrightarrow{\theta} & C_*(PK) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A(K), \bar{D} & \xrightarrow{\bar{\theta}} & C_*(K) \end{array}$$

où  $\theta'$  (resp.  $\theta$ ) est un homomorphisme d'algèbres différentielles (resp. de modules différentiels), et  $\theta, \theta'$  et  $\bar{\theta}$  induisent des isomorphismes en homologie.

Soient maintenant un sous  $C.W.$ -complexe  $L$  de  $K$ ,  $i: L \rightarrow K$  l'inclusion canonique et  $F$  la fibre homotopique de  $i$ . La construction d'ADAMS-HILTON se faisant par récurrence sur les cellules ([A.H], p. 317), l'homomorphisme  $B(K) \otimes A(K) \rightarrow C_*(PK)$  se restreint à un homomorphisme de  $A(K)$ -modules  $B(L) \otimes A(K) \xrightarrow{\theta} C_*(F)$ . Par un argument de suite spectrale, on montre alors :

LEMME. — *Le morphisme canonique  $B(L) \otimes A(K) \xrightarrow{\theta} C_*(F)$  induit en homologie un isomorphisme de  $H_*(A(K)) (= H_*(\Omega K))$ -modules.*

Pour terminer la démonstration du théorème, notons  $A = A(L)$  l'algèbre des chaînes définies ci-dessus et  $A(K) = A \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ ,  $\dim a_i = n_i$ .

La différentielle  $d$  sur  $A(K)$  est définie de la manière suivante : si  $f_i: S^{n_i-1} \rightarrow \Omega L$  correspond à l'application d'attachement de la cellule  $e^{n_i+1}$ , alors  $da_i \in A(L)$  est un cycle représentant l'image du générateur de  $H_{n_i-1}(S^{n_i-1})$  par le morphisme  $f_i$ . Il en résulte que  $\bar{D}b_i \in B(L)$ .  $B(L) \otimes A(K)$  étant un modèle de ADAMS-HILTON de  $F$ , nous obtenons la suite exacte de  $A(K)$ -modules différentiels

$$0 \rightarrow B(L) \otimes A(K) \rightarrow B(K) \otimes A(K) \rightarrow B(K)/B(L) \otimes A(K) \rightarrow 0,$$

d'où l'isomorphisme de  $H_*(A(K))$ -modules

$$H_+(B(L) \otimes A(K)) \simeq s^{-1}(H(B(K)/B(L)) \otimes H(A(K))).$$

#### BIBLIOGRAPHIE

- [A.H] ADAMS (J. F.) and HILTON (P. J.) — On the chain algebra of a loop space, *Comm. Math. Helv.*, vol. 30, 1955, pp. 305-330.
- [A] ANICK (D. J.) — A model of Adams-Hilton type for fiber squares, To appear in *Ill J. Math.*, 1985.
- [B] BAUES (H.) — On the homotopy classification problem, vol. 5, Preprint Max-Planck-Institut Bonn, 1984.
- [C.M.N.] COHEN (F.), MOORE (J. C.) and NEISENDORFER (J.) — Torsion in homotopy groups, *Ann. Math.*, vol. 109, 1979, p. 121-163.
- [F.T] FÉLIX (Y.) et THOMAS (J. C.) — Sur l'opération d'holonomie rationnelle. To appear in *Proceedings of the research symposium on algebra and algebraic Topology Stockholm*, 1983.
- [W] WHITEHEAD (G.) — Elements of homotopy theory, *Graduate Texts in Math.*, Springer-Verlag, 1978.