BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE B.A. LECOMTE

Sur la suite exacte canonique associée à un fibré principal

Bulletin de la S. M. F., tome 113 (1985), p. 259-271

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1985__113__259_0>

Bull. Soc. math. France,
113, 1985, p. 259-271.

SUR LA SUITE EXACTE CANONIQUE ASSOCIÉE A UN FIBRÉ PRINCIPAL

PAR

PIERRE B. A. LECOMTE (*)

RÉSUMÉ. — L'algèbre des courants d'un fibré principal est le noyau de la projection naturelle de l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux du fibré sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de sa base; elle apparaît ainsi dans une courte suite exacte d'algèbres de Lie associée canoniquement au fibré principal.

On décrit une construction cohomologique générale à l'aide de laquelle on montre que l'homomorphisme de Chern-Weil du fibré s'interprète comme une obstruction à la possibilité de scinder cette suite.

On décrit ensuite les fibrés principaux dont la suite canonique se scinde. Il s'agit essentiellement des fibrés naturels au sens de Thurston-Epstein.

ABSTRACT. — The current algebra of a principle bundle is the kernel of the natural projection of the Lie algebra of infinitesimal automorphisms of the bundle onto the Lie algebra of vector-fields of its base manifold; it thus appears in a short exact sequence of Lie algebras canonically associated to the principal bundle.

A general cohomological construction is described using which one shows that the Chern-Weil homomorphism on the bundle may be viewed as an obstruction to split that sequence.

One then describes all the principal bundles with split canonical exact sequence. These are essentially the natural bundles in the sens of Thurston-Epstein.

1. Introduction

Les objets géométriques considérés sont de classe C_∞. Les variétés sont connexes, séparées et à base dénombrable.

Soit un fibré principal P de base M, de projection p et de groupe structural G.

(*) Texte reçu le 2 octobre 1984, révisé le 7 mai 1985.

P. B. A. LECOMTE, Université de Liège, Institut de Mathématique, avenue des Tilleuls 15, B-4000 Liège (Belgique).

On note $P\mathbb{G}$ le fibré associé à P et à l'action adjointe de G sur son algèbre de Lie $\mathbb{G}$ et on désigne par $\Gamma(P\mathbb{G})$ l'espace des sections de classe C_∞ de $P\mathbb{G}$. C'est une algèbre de Lie de dimension infinie, parfois appelée « algèbre de courants ».

On note également $\mathscr{U}_P$ l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de P et $\mathscr{X}(M)$ celle des champs de vecteurs de M.

La courte suite d'algèbres de Lie

$$0 \to \Gamma(P\mathbb{G}) \xrightarrow{v} \mathscr{U}_p \xrightarrow{p_*} \mathscr{X}(M) \to 0, \tag{1}$$

où v est le relèvement vertical et p_* la différentielle de p, *est exacte;* on l'appellera la (courte) *suite* (exacte) *canonique* du fibré P.

Lorsque P est le fibré $L(E)$ des repères linéaires d'un fibré vectoriel E, cette suite caractérise E au produit tendoriel par un fibré en droites près : si $\mathscr{U}_{L(E)}$ et $\mathscr{U}_{L(E')}$ sont isomorphes, il existe un fibré en doites L tel que $E'=E\otimes L$; au surplus, l'idéal vertical est caractéristique dans $\mathscr{U}_{L(E)}$: tout automorphisme de $\mathscr{U}_{L(E)}$ le stabilise. Cela se déduit aisément de [6].

Dans ce papier, on étudie la suite (1), pour P arbitraire, en s'intéressant plus particulièrement au problème de sa scission.

Dans un premier temps, en application d'une construction algébrique universelle — mentionnée dans [7] — on montre que l'homomorphisme de Chern-Weil de P est une obstruction à l'existence d'une scission de (1). Ceci fournit une définition algébrique de l'homomorphisme de Chern-Weil d'un fibré principal qui apparaît ainsi comme un cas particulier d'une construction cohomologique générale susceptible d'applications variées.

Dans un second temps, on détermine les fibrés principaux P dont la suite canonique se scinde, c'est-à-dire pour lesquels il existe un homomorphisme d'algèbres de Lie $S : \mathscr{X}(M) \to \mathscr{U}_P$ tel que $p_* \circ S =$identité. Dans ce cas et si (V_0, ρ_0) est une représentation linéaire de G, alors le fibré vectoriel $E=PV_0$ associé a P et à (V_0, ρ_0) admet une représentation de type connexion $(V=\Gamma(E), \rho)$ au sens de Shiga-Tsujishita [9]. De fait, toute section $s\in\Gamma(E)$ s'identifie à une fonction $\hat{s} : P \to V_0$ G-équivariante; la fonction $S(X).\hat{s}$ est également équivariante et représente donc une section $\rho_X(s)$ de E. Il est manifeste que ρ est une représentation de $\mathscr{X}(M)$ sur $\Gamma(E)$ et qu'en outre

$$\rho_X(fs)=(X.f)\,\rho_X(s)+f\,\rho_X(s), \tag{2}$$

pour toute fonction $f: M \to \mathbb{R}$. Inversement, on voit aisément qu'une représentation de type connexion sur un fibré vectoriel induit une scission de la suite canonique du fibré des repères de ce fibré qui engendre la représentation par le moyen qu'on vient d'indiquer.

Ainsi l'étude de la scission de suite canonique d'un fibré P de base M revient à celle de l'existence des représentations de type connexion de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de M. Corollaire : les résultats présentés ici trivialisent ceux de [9] sur la question.

Signalons encore ceci : la définition des représentations de type connexion (i. e. représentation de $\mathscr{H}(M)$ sur l'espace des sections d'un fibré vectoriel satisfaisant de surcroît à (2)) constitue en fait une bonne définition générale d'une notion *a priori* de dérivée de Lie. De ce point de vue, les résultats de ce papier n'étonneront pas trop : à des revêtements très spéciaux près, les fibres principaux dont la suite canonique se scinde sont les fibrés naturels au sens de EPSTEIN et THURSTON [4] et les dérivées de Lie correspondantes s'obtiennent à travers les relèvements naturels de champs de vecteurs.

2. Obstructions cohomologiques à la scission d'une courte suite exacte d'algèbres de Lie

Soit une courte suite exacte d'algèbres de Lie

$$0 \to I \to L \xrightarrow{\pi} L/I \to 0. \tag{3}$$

Il s'avère que l'on peut, dans un cadre purement algébrique, développer relativement à (3) une théorie des classes caractéristiques entièrement parallèle à la construction classique de l'homomorphisme de Chern-Weil d'un fibré principal. Certains résultats ont été annoncés dans [7]. Ils seront complétés ici par l'analogue d'une construction due à CHERN et SIMON [1] aboutissant aux classes caractéristiques secondaires.

Soit un projecteur $T: L \to L$ de noyau I et soit

$$R_T = \partial_0 T + \frac{1}{2}[T, T],$$

où ∂_0 est l'opérateur de bord de Chevalley de L pour la représentation triviale à valeurs dans L. Explicitement, on a

$$R_T(x, y) = -T[x, y] + [Tx, Ty],$$

si bien que $R_T(x, y) \in I$ et est nul si $x \in I$ ou $y \in I$. Il existe donc $\mathscr{R}_T \in \Lambda^2(L/I, I)$ tel que $R_T = \pi^* \mathscr{R}_T$.

Soit une représentation (V, ρ) de L/I.

On désigne par I_ρ^q l'espace des applications linéaires symétriques $f: \otimes^q I \to V$ qui entrelacent les représentations $\mathrm{ad} \otimes \ldots \otimes \mathrm{ad}$ et $\pi^* \rho$ de L sur $\otimes^q I$ et V respectivement.

Cela étant, $\alpha.$ désignant l'antisymétrisation, on pose

$$f_T = \alpha . f(\mathscr{R}_T \otimes \ldots \otimes \mathscr{R}_T) \in \Lambda^{2q}(L/I, V)$$

et on note ∂_ρ l'opérateur de bord de Chevalley associé à (V, ρ).

PROPOSITION 2.1. — *On a* $\partial_\rho f_T = 0$.

Preuve. — Introduisons d'abord une notation. Si des applications $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$ sont à valeurs dans I, on désigne par $f_{\varphi_1, \ldots, \varphi_q}$ l'application

$$\alpha . f(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_q).$$

Cela étant, f entrelaçant $\mathrm{ad} \otimes \ldots \otimes \mathrm{ad}$ et $\pi^* \rho$, il vient aisément

$$\pi^* \partial_\rho f_T = \partial_{\pi^* \rho}(\pi^* f_T) = \sum\nolimits_{k \leq q} f_{R_T, \ldots, \partial_{\mathrm{ad}_{(k)}} R_T, \ldots, T_T}.$$

Les deux membres extrêmes s'annulent dès qu'ils sont évalués en des arguments dont l'un au moins appartient à I. Par ailleurs, il est trivial de voir que $\partial_{\mathrm{ad}} R_T$ s'annule sur $\mathrm{im}\, T$. Au total $\pi^* \partial_\rho f_T = 0$, ce qui suffit.

On va voir que la classe de cohomologie du cocycle f_T ne dépend pas de T quand bien même f_T en dépend. On note qu'une application linéaire $T' : L \to L$ est un projecteur de noyau I si et seulement si $T' = T + D$ où D est à valeurs dans I et s'annule sur I. Un projecteur $T' = T + D$ étant fixé, il existe donc $\mathscr{D} \in \Lambda^1(L/I, I)$ tel que $\pi^* \mathscr{D} = D$ et, pour tout $t \in [0, 1]$, $T_t = T + t D$ est un projecteur de noyau I. On posera, pour simplifier,

$$R_t = R_{T_t}, \qquad \mathscr{R}_t = \mathscr{R}_{T_t} \qquad \text{et} \qquad f_t = f_{T_t}.$$

PROPOSITION 2.2. — *On a*

$$f_{T'} = f_T + q\, \partial_\rho \int_0^1 f_{\mathscr{D}, \mathscr{R}_t, \ldots, \mathscr{R}_t}\, dt.$$

Preuve. — Il vient

$$\pi^* \frac{d}{dt} f_t = \sum\nolimits_{k \leq q} f_{R_t, \ldots, d/dt_{(k)} R_t, \ldots, R_t}.$$

Par ailleurs, il est élémentaire de vérifier que $d/dt\, R_t$ et $\partial_{ad} D$ coïncident sur im T_t. En des points de im T_t, on a donc

$$\pi^* \frac{d}{dt} f_t = \sum_{k \leq q} f_{\partial_{ad} D,\, R_t,\, \ldots,\, R_t} = q\, \partial_{\pi^*\rho}\, f_{D,\, R_t,\, \ldots,\, R_t} = \pi^* (q\, \partial_\rho\, f_{\mathscr{D},\, \mathscr{R}_t,\, \ldots,\, \mathscr{R}_t}),$$

puisque, concernant la seconde égalité, $\partial_{ad} R_t$ s'annule sur im T_t, comme on l'a vu plus haut. D'où la conclusion.

On désigne par H_ρ la cohomologie de Chevalley de la représentation (V, ρ) de L/I. Les deux propositions précédentes montrent qu'il existe une application linéaire

$$c_\rho : \quad I_\rho = \oplus_q I_\rho^q \to H_\rho : f \to [f_T]_\rho$$

($[\ \ ]_\rho$ désignant la classe de cohomologie dans H_ρ).

THÉORÈME 2.3. — *Si la courte suite exacte d'algèbres de Lie*

$$0 \to I \to L \to L/I \to 0$$

se scinde, alors, pour toute représentation (V, ρ) *de* L/I, *l'application* $c_\rho : I_\rho \to H_\rho$ *est nulle.*

Preuve. — S'il existe une sous-algèbre de Lie de L supplémentaire à I, le projecteur T de noyau I correspondant est en effet tel que $R_T = 0$.

Soit la courte suite exacte

$$0 \to I \xrightarrow{i} \mathbb{L} \xrightarrow{j} L \to 0, \tag{4}$$

où $\mathbb{L} = \{(x, y) \in L^2 : x - y \in I\}$, $i : y \to (0, y)$ et $j : (x, y) \to x$. Cette suite se scinde toujours. En effet, la sous-algèbre $\Delta L = \{(x, x) : x \in L\}$ de $\mathbb{L}$ est un supplémentaire de iI dans $\mathbb{L}$. Notons $\mathbb{T}_0$ le projecteur de noyau iI correspondant. Soit aussi $\mathbb{T}_1 : (x, y) \to (x, Tx)$. C'est un projecteur de noyau iI. Posons $Q = T - 1$ (1 est l'identité de L dans L) et $\Omega_Q = \partial_{ad} Q + (1/2)[Q, Q]$. En appliquant la proposition 2.2 à la suite (4) et aux projecteurs $\mathbb{T}_i (i = 0, 1)$, on obtient le résultat suivant. Les calculs sont immédiats.

THÉORÈME 2.4. — *Pour tout* $f \in I_\rho^q$, *on a*

$$\pi^* f_T = \partial_{\pi^*\rho}\left(q \int_0^1 f_{Q,\, \Omega_Q^t,\, \ldots,\, \Omega_Q^t}\, dt\right),$$

où

$$\Omega_Q^t = t\,\Omega_Q + \frac{1}{2}(t^2 - t)\,[Q, Q].$$

3. Le cas de la suite canonique d'un fibré principal

Soit un fibré principal P de base M, de projection p et de groupe structural G. Tout $A \in \Gamma(P\,\mathbb{G})$ s'identifie à une fonction G-équivariante $\hat{A} : \mathrm{P} \to \mathbb{G}$ et l'application v de (1) est donnée par

$$v:\quad A \to X^{-\hat{A}},$$

si, de façon générale, on note X_u^h la valeur en $u \in P$ du champ fondamental de P associé à $h \in \mathbb{G}$. On pose $\Gamma(P\,\mathbb{G})^v = v(\Gamma(P\,\mathbb{G}))$. La vérification de l'exactitude de (1) est élémentaire.

Soit une 1-forme de connexion ω de P et $X \to h(X)$ le relèvement horizontal associé à ω : $h(X)$ est l'unique champ de vecteurs de P qui soit horizontal et se projette sur X; c'est un élément de $\mathscr{U}_P$; d'ailleurs

$$\mathscr{U}_P = \Gamma(P\,\mathbb{G})^v \oplus h(\mathscr{H}(M)). \tag{5}$$

Si T est le projecteur de noyau $\Gamma(P\,\mathbb{G})^v$ correspondant à cette décomposition, on calcule facilement que

$$R_T:\quad (X, Y) \to R^\omega(X, Y)$$

où R^ω est la 2-forme de courbure de ω à valeurs dans $\Gamma(P\,\mathbb{G})$.

Soit (V, ρ) la représentation de $\mathscr{H}(M)$ où V est l'espace $\Lambda^s(M)$ des s-formes sur M et $\rho : X \to L_X$ la dérivée de Lie des s-formes.

Rappelons l'espace I_ρ^q introduit au paragraphe précédent.

Dans le cas présent, on vérifie sans peine qu'un $f \in I_\rho^q$ s'identifie à une application linéaire symétrique de $\otimes^q\Gamma(P\,\mathbb{G})$ dans $\Lambda^s(M)$ telle que

$$L_X f(A_1, \ldots, A_q) = \textstyle\sum_l f(A_1, \ldots, \nabla_X A_l, \ldots, A_q)$$

et

$$\textstyle\sum_l f(A_1, \ldots, [A, A_l], \ldots, A_q) = 0,$$

pour tout $X \in \mathscr{H}(M)$ et tous $A, A_1, \ldots, A_q \in \Gamma(P\mathbb{G})$; ∇ désigne la dérivation covariante de $P\mathbb{G}$ associée à ω.

On notera I_s^q l'espace des éléments de I_p^q qui sont locaux, c'est-à-dire tels que

$$\operatorname{supp}(f(A_1, \ldots, A_q)) \subset \bigcap_{i \leq q} \operatorname{supp} A_i,$$

pour tous $A_1, \ldots, A_q \in \Gamma(P\mathbb{G})$, et c_s la restriction de c_p à $I_s = \oplus_q I_s^q$.

On désigne par $I(G)$ l'espace des polynômes Ad-invariants sur $\mathbb{G}$, par $h_p : I(G) \to H_{\text{de Rham}}(M)$ l'homomorphisme de Chern-Weil de P et par

$$i: \quad \Lambda(M) \to \Lambda(\mathscr{H}(M), C_\infty(M, \mathbb{R})),$$

l'inclusion du complexe de de Rham de M dans celui de Chevalley de la représentation de $\mathscr{H}(M)$ par la dérivée de Lie des fonctions; $i_\sharp$ est l'application induite en cohomologie par i.

THÉORÈME 3.1. — *Si* $s>0$, *alors* $c_s=0$. *De plus*, $I_0=I(G)$ *et* $c_0=i_\sharp \circ h_P$.

Preuve. — Celle-ci a été donnée dans [7] pour $P=L(E)$. Elle s'adapte aisément. Rappelons que dans un premier temps, on montre que si $s>0$, un élément de I_s^q est un opérateur q-différentiel d'ordre 1 au plus en chaque argument. Or les cocycles 1-différentiables de $\mathscr{H}(M)$ à valeurs dans $\Lambda^s(M)$, $s>0$, sont des cobords [2]. Ainsi, $c_s=0$ pour $s>0$.

Dans un second temps, on montre que les éléments de I_0 sont d'ordre 0 et localement à coefficients constants. Il en résulte aussitôt que $I_0=I(G)$ et que $c_0=i_\sharp \circ h_P$.

COROLLAIRE 3.2. — *Si la suite canonique d'un fibré principal se scinde, alors les classes caractéristiques de ce fibré sont contenues dans l'idéal engendré par les classes de Pontrjagin de sa base.*

Preuve. — Cela résulte aussitôt de la structure de $i_\sharp$ donnée par exemple dans [9].

Remarque 3.3. — La description des fibrés principaux dont la suite canonique se scinde, obtenue dans la section suivante, rendra particulièrement évident le corollaire 3.2.

Remarque 3.4. — En utilisant le projecteur relatif à (5) et le théorème 2.4, on obtient aussitôt les résultats de l'exercice 3, p. 69 de [3], *voir* aussi [1]. Signalons aussi que le théorème 2.4 est utile à l'obtention de cocycles de la cohomologie de Chevalley de $\mathscr{H}(M)$ à valeurs dans $C_\infty(M, \mathbb{R})$ (*voir* [2], par exemple).

4. Les fibrés principaux dont la suite canonique se scinde

Soit un fibré principal P de base M et de projection p.

On suppose que la suite canonique de P se scinde et on désigne par $S : \mathscr{H}(M) \to \mathscr{U}_P$ un homomorphisme d'algèbres de Lie tel que $p_* \circ S = 1$ (l'identité).

Une étape importante de l'étude de S consiste à montrer que c'est un opérateur différentiel. C'est l'objet des lemmes 4.1 et 4.3 ci-dessous.

LEMME 4.1. — *L'application S est locale : si X s'annule dans un ouvert U de M, alors $S(X)$ s'annule au-dessus de U.*

Preuve. — Si $X \in \mathscr{H}(M)$ s'annule au voisinage d'un point $x \in M$, $S(X)$ est vertical au-dessus de ce voisinage. Si $u \in P$ est au-dessus de x, il existe donc un élément (et un seul) $s(X)$ de $\mathbb{G}$ tel que $S(X)_u = X_u^{s(X)}$. (Comme plus haut, X^h désigne le champ fondamental de P associé à $h \in \mathbb{G}$.)

Il est clair que $X \to s(X)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie de $I_{\{x\}} = \{X \in \mathscr{H}(M) : x \notin \operatorname{supp} X\}$ dans $\mathbb{G}$. Vu la proposition 4.2 ci-dessous, $I_{\{x\}}$ est le noyau de s. Donc, $S(X)_u = 0$. D'où le lemme.

PROPOSITION 4.2. — *Pour tout compact K de M, soit $I_K = \{X \in \mathscr{H}(M) : K \cap \operatorname{supp} X = \varnothing\}$. L'idéal I_K de $\mathscr{H}(M)$ n'a pas d'idéal propre de codimension finie.*

Une preuve de ce résultat figure par exemple dans [8].

En vertu du théorème de Peetre, pour tout ouvert relativement compact U de M, $S|_U$ est un opérateur différentiel. Si M n'est pas compact, son ordre pourrait ne pas être borné. En fait, si $\dim M > 1$, il n'en est rien.

LEMME 4.3. — *Si* $\dim M > 1$, *alors S est un opérateur différentiel d'ordre r borné par une fonction de* $\dim M$ *et de* $\dim \mathbb{G}$.

Preuve. — Supposons S d'ordre $\leqslant r$ sur un ouvert U de M et fixons $u \in L^r(M)$ — le fibré des repères d'ordre r de M — et $v \in P$ au-dessous d'un point $x \in M$.

A tout élément h de l'algèbre de Lie $\mathbb{G}_m^r$ du groupe structural G_m^r de $L^r(M)$, $m = \dim M$, associons un champ de vecteurs X de M tel que $X_u^r = X_u^h$, où X^r est le relèvement canonique de X sur $L^r(M)$ (le flot de X^r est le r-jet de celui de X). Comme $X_x = 0$, $S(X)_v$ est vertical. Il s'écrit $X_v^{\rho_0(h)}$, où $\rho_0(h) \in \mathbb{G}$. Bien sûr, la correspondance $h \to \rho_0(h)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathbb{G}_m^r$ dans $\mathbb{G}$. La proposition 4.4 permet de conclure.

PROPOSITION 4.4. — *Soit $m>1$. Soit $\rho_0 : \mathbb{G}^r_m \to G$ un homomorphisme d'algèbres de Lie. Si $\rho_0|_{S^i_m}$ n'est pas nul, alors*

$$C^{i-1}_{m+i-2} \leqslant \dim \mathbb{G}.$$

Dans cet énoncé, S^i_m désigne l'espace des polynômes homogènes de degré i sur $\mathbb{R}^m$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

Preuve. — Rappelons que $\mathbb{G}^r_m = \oplus^r_{i=1} S^i_m$; $S^1_m = gl(m, \mathbb{R})$ admet une représentation naturelle τ sur S^i_m. Si $A \in S^1_m$ et $T \in S^i_m$, le crochet de Lie dans $\mathbb{G}^r_m$ de A et T vaut $\tau(A)\,T$. Soit $\rho^i_0 = \rho_0|_{S^i_m}$. On a

$$\rho^i_0(\tau(A)\,T) = [\rho_0(A), \rho^i_0(T)].$$

Donc $\ker \rho^i_0$ est un sous-espace stable de τ. Si ρ^i_0 n'est pas nul, il est injectif sur une composante irréductible de (S^i_m, τ). En particulier, $dim\,(im\,\rho^i_0)$ majore la plus petite des dimensions de ces composantes, qui est C^{i-1}_{m+i-2}.

Il résulte de ce qui précède que S est un opérateur différentiel d'ordre r sur M, du moins si $\dim M > 1$.

Lorsque $r=0$, S est simplement le relèvement horizontal d'une connexion plate sur P.

Lorsque $r \geqslant 1$, la structure de S est donnée par le théorème suivant.

On note $L^r_0(M)$ une composante connexe de $L^r(M)$ et $G^r_{m,0}$ son groupe structual. Si M est orientable, $G^r_{m,0}$ est la composante connexe du neutre de G^r_m; c'est G^r_m sinon.

THÉORÈME 4.5. — *Soit un homomorphisme d'algèbres de Lie $S : \mathcal{H}(M) \to \mathcal{U}_P$ tel que $p_* \circ S = 1$. On suppose S d'ordre $r \geqslant 1$. Il existe une courte suite exacte*

$$1 \to \Gamma \to H \xrightarrow{j} G^r_{m,0} \to 1,$$

de groupes de Lie, où Γ est discret, ainsi qu'un fibré principal $q : Q \to M$ de groupe structural H et un j-morphisme $\pi : Q \to L^r_0(M)$ rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "q"'] & L^r_0(M) \arrow[d] \\ & M \end{tikzcd}$$

commutatif; ces objets sont tels que :

(i) *P soit le fibré $Q \times_{\rho_0} G$ associé à Q et à un homomorphisme de groupes de Lie $\rho_0 : H \to G$;*

(ii) $\forall X \in \mathscr{H}(M)$, $S(X) = \varphi_* X^Q$, *où $\varphi : Q \times G \to P$ est le passage au quotient et $X \to X^Q$ est la composée du relèvement canonique $X \to X^r$ et de $(\pi_*)^{-1} : \mathscr{H}(L_0^r(M)) \to \mathscr{H}(Q)$.*

Preuve. — Soit

$$\mathscr{Q} = \{(u, v) \in L_0^r(M) \times P : p_M(u) = p(v)\},$$

où $p_M : L_0^r(M) \to M$ est la projection naturelle. On note p_1 et p_2 les projections de $\mathscr{Q}$ sur $L_0^r(M)$ et P respectivement.

Le groupe $\mathscr{G} = G_{m,0}^r \times G$ opère naturellement sur $\mathscr{Q}$ et l'on observe que $p_1 : \mathscr{Q} \to L_0^r(M)$ est un fibré principal de groupe structural G.

La distribution

$$\mathscr{M}: \quad (u, v) \to \{(X_u^r, S(X)_v) : X \in \mathscr{H}(M)\},$$

de $\mathscr{Q}$ est manifestement $\mathscr{G}$-invariante et de classe C_∞. Elle est de plus de dimension constante et involutive. D'abord parce que S étant d'ordre $\leqslant r$, p_{1*} est bijectif de $\mathscr{M}_{(u,v)}$ sur $T_u L_0^r(M)$; ensuite parce que $X \to X^r$ et $X \to S(X)$ sont des homomorphismes. Il résulte de ceci que $\mathscr{M}$ est une connexion plate du G-fibré principal $p_1 : \mathscr{Q} \to L_0^r(M)$. On notera $Q(u, v)$ la nappe d'holonomie en (u, v). Son groupe de structure Γ est un sous-groupe discret de G et $\pi = p_1 | Q$ est un revêtement de $L_0^r(M)$ [5]. On pose

$$q = p_M \circ \pi$$

et

$$H(u, v) = \{(s, t) \in \mathscr{G} : Q(u, v).(s, t) \subset Q(u, v)\}.$$

Comme $\mathscr{M}$ est $\mathscr{G}$-invariant, $H(u, v)$ est un sous-groupe de $\mathscr{G}$. L'orbite de (u, v) sous l'action de ce groupe est $V_{p_M(u)} = Q(u, v) \cap q^{-1}(p(u))$. Comme $q : Q(u, v) \to M$ est une submersion, $V_x (x \in M)$ est une sous-variété plongée et fermée de $Q(u, v)$. De plus

$(*)$ *Quels que soient $x, y \in M$, il existe un difféomorphisme $H(u, v)$-équivariant $\Psi : V_x \to V_y$.*

En effet, pour tout $X \in \mathscr{H}(M)$, le champ $X^Q = (X^r, S(X))$ est un q-relèvement de X. Son flot ψ_λ relève donc le flot φ_λ de X. Comme X^Q est

$\mathscr{G}$-équivariant, son flot est $\mathscr{G}$-équivariant. Cela étant, il existe des champs $X_1, \ldots, X_k$ de M et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $y = \varphi^1_{\lambda_1} \circ \ldots \circ \varphi^k_{\lambda_k}(x)$, où φ^l est le flot de X_l. Si ψ^l est celui de X_l^Q, le difféomorphisme $\psi = \psi^1_{\lambda_1} \circ \ldots \psi^k_{\lambda_k}$ répond à la question.

La propriété $(*)$ ci-dessus va permettre d'établir le seul point vraiment délicat de la preuve, à savoir montrer que $H(u, v)$ est un sous-groupe de Lie de $\mathscr{G}$ dont la structure ne dépend pas de (u, v) pourvu que ce dernier soit pris dans la nappe Q d'un point (u_0, v_0) fixé.

On observe d'abord que si $\xi = (u, v) \in Q$, alors $H(\xi) = H(\xi_0)$. De plus,

$$J_\xi : \quad \mathscr{G} \to \mathscr{Q} : (s, t) \to (u.s, v.t),$$

étant un difféomorphisme de $\mathscr{G}$ sur $(p_M \circ p_1)^{-1}(x)$, $x = p_M(u)$, on obtient par transport de structure une structure de variété sur $H(\xi)$ qui en fait une sous-variété de $\mathscr{G}$ et qui fait de $J_\xi : H(\xi) \to V_x$ un difféomorphisme.

Ensuite, il existe un difféomorphisme $H(\xi)$-équivariant

$$\psi : \quad V_{x_0} \to V_x (x_0 = p_M(u_0)) \qquad \text{et} \qquad (s_0, t_0) \in H(\xi)$$

tel que $\psi(\xi_0) = \xi.(s_0, t_0)$. Comme $J_\xi = \psi \circ J_{\xi_0} \circ \gamma^{-1}_{(s_0, t_0)}$, où γ_g est la multiplication à gauche par g dans $\mathscr{G}$, on voit que la structure de variété de $H(\xi)$ ne dépend pas de $\xi \in Q$.

Enfin, pour cette structure, $H(\xi)$ est un sous-groupe de Lie de $\mathscr{G}$. De fait, si θ est la multiplication de $\mathscr{G}$, $J_\xi \circ \theta$ est de classe C_∞ de $H \times H$ dans $\mathscr{Q}$; comme il prend ses valeurs dans la sous-variété plongée V_x d'une feuille de $\mathscr{M}$, il est de classe C_∞ de $H \times H$ dans V_x, ce qui suffit.

On voit aisément que la projection naturelle $H(\xi) \to G^r_{m, 0}$ est une submersion surjective de noyau $\{ e \} \times \Gamma(\xi)$ et, en composant une trivialisation de $L^r_0(M)$ avec une trivialisation du revêtement $Q \to L^r_0(M)$, que Q est un fibré principal de base M et projection q.

Cela étant, la projection naturelle $H(\xi) \to G$ est un homomorphisme ρ_0 de groupes de Lie et la vérification des points (i) et (ii) de l'énoncé ne présente guère de difficulté. D'où le théorème.

5. Remarques sur le problème de l'extension du groupe de structure d'un fibré principal

Le théorème précédent montre que si la suite canonique d'un fibré principal se scinde, ce fibré est associé à $L^r_0(M)$, ou à une extension de celui-ci associée à une extension de son groupe de structure $G^r_{m, 0}$.

On peut faire à ce propos les quelques remarques que voici :

(a) Soient un fibré principal P de base M, de projection p et de groupe structural *connexe* G ainsi qu'un revêtement $j: H_0 \to G$ de noyau Γ_0.

Si $U_\alpha (\alpha \in A)$ est un recouvrement ouvert contractile de M et $\varphi_{\alpha\beta}$ le cocycle correspondant de P, on peut trouver sur chaque intersection non vide $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ un j-relèvement $\psi_{\alpha\beta}$ de $\varphi_{\alpha\beta}$ auquel correspond une cochaîne de Čech $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \psi_{\alpha\beta}\psi_{\beta\gamma}\psi_{\gamma\alpha}$ à valeurs dans Γ_0. Si on a pris la peine de choisir $\psi_{\beta\alpha} = \psi_{\alpha\beta}^{-1}$. un peu de calcul permet de vérifier que ε est un *cocycle* de Čech et que sa classe $[\varepsilon]$ ne dépend pas des choix du cocycle φ et de son j-relèvement ψ.

En dépit du caractère non abélien de H_0, on associe de la sorte à P une classe $[\varepsilon] \in \check{H}^2(M, \Gamma_0)$ dont la trivialité équivaut à l'existence d'un cocycle de M à valeurs dans H_0 et relevant celui de P. On la notera $r(P, \Gamma_0)$ et on l'appellera *classe d'extension* (de P).

(b) Dans les conditions de (a), voyons comment traiter le cas d'une extension

$$1 \to \Gamma \to H \xrightarrow{j} G \to 1 \tag{6}$$

où H n'est plus nécessairement connexe. Si on note H_0 la composante connexe du neutre de H et si on pose $\Gamma_0 = \Gamma \cap H_0$, alors $j: H_0 \to G$ est un revêtement, de noyau Γ_0. Au surplus, H est isomorphe au groupe de Lie $H_0 \times_{\Gamma_0} \Gamma$. On notera $[h, \gamma]$ la classe de $(h, \gamma) \in H_0 \times \Gamma$ dans H.

Soit un fibré principal Q de base M, de projection q et de groupe structural H qui soit une extension de P relative à (6), c'est-à-dire tel que $q = p \circ \pi$ où $\pi: Q \to P$ est un j-morphisme.

Un cocycle $\chi_{\alpha\beta}$ de Q relatif au recouvrement $U_\alpha (\alpha \in A)$ s'écrit de façon unique $[\psi_{\alpha\beta}, \gamma_{\alpha\beta}]$ pour certains $\gamma_{\alpha\beta} \in \Gamma$. Un calcul immédiat montre que le bord de Čech $\delta\gamma$ de γ vaut ε^{-1}. Ainsi, $\pi_0: \Gamma \to \Gamma/\Gamma_0$ étant le passage au quotient, $\beta = \pi_0 \circ \gamma$ est un cocycle de M à valeurs dans Γ/Γ_0 et sa classe d'extension $r([\beta], \Gamma_0)$ associée à la courte suite exacte

$$1 \to \Gamma_0 \to \Gamma \to \Gamma/\Gamma_0 \to 1,$$

coïncide avec $[\varepsilon]^{-1}$.

Si $E(M, \Gamma_0)$ désigne l'ensemble des classes d'extensions des revêtements de M de groupe structural $\subset \Gamma/\Gamma_0$, il vient aussitôt.

THÉORÈME 5.1. — *Le fibré P de base M admet une H-extension relative à* (6) *si et seulement si* $r(P, \Gamma_0)^{-1} \in E(M, \Gamma_0)$.

(*c*) Le matériel rapidement présenté aux points (*a*) et (*b*) ci-dessus situe le problème de la classification des fibrés principaux dont la suite canonique se scinde.

A côté des fibrés naturels au sens d'EPSTEIN et THURSTON [4] ($L_0^r(M)$ et ses associés), il s'agit d'après ce qui précède, de fibrés associés à certains revêtements de $L_0^r(M)$.

Dans un premier temps, on aura à déterminer les extensions à noyau discret de $G_{m,0}^r$; ensuite, il conviendra, pour une variété M donnée, d'examiner l'existence d'extensions correspondantes de $L_0^r(M)$. Le premier problème est de nature purement algébrique et le second, vu le théorème 5.1, de nature topologique.

On n'abordera pas ici ce problème en détail, mais l'analyse précédente permet de voir aisément que *si M est orientable, simplement connexe et de dimension* >2, *en dehors des fibrés naturels, seuls les fibrés associés à des prolongements de structures spinorielles de M ont une suite canonique scindée.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHERN (S. S.), SIMONS (J). — *Ann. Math.*, vol. 99, 1974, p. 48.

[2] DE WILDE (M.), LECOMTE (P.). — *J. Math. pures et appl.*, vol. 62, 1983, p. 197.

[3] DUPONT (J. L.). — *Lecture Notes in Math.*, vol. 640, 1978, Springer-Verlag, New York.

[4] EPSTEIN (D.), THURSTON (W.). — *Proc. London Math. Soc.*, vol. 38, 1979, p. 219.

[5] KOBAYASHI (S.), NOMIZU (K.). — *Foundations of Differential Geometry, Interscience Tracets in pure and applied math.*, vol. 15, (1), 1963, *Interscience Publishers*. Wiley & Sons, New York, London.

[6] LECOMTE (P.). — *J. Math. pures et appl.*, vol. 60, 1981, p. 229.

[7] LECOMTE (P.). — *C.R. Acad. Sc.*, 294, série I, 1982, p. 369.

[8] LECOMTE (P.). — *C.R. Acad. Sc.*, 297, série I, 1983, p. 529.

[9] SHIGA (K.), TSUJISHITA (T.). — *Kodai Math. Sem. Rep.*, vol. 28, 1977, p. 214.