Bulletin de la S. M. F.

N. Mestrano

Points rationnels des courbes génériques de $\mathbb{P}^3$. I

Bulletin de la S. M. F., tome 113 (1985), p. 295-304
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1985__113__295_0>

Bull. Soc. math. France,
113, 1985, p. 295-304.

POINTS RATIONNELS DES COURBES GÉNÉRIQUES DE P^3, I

PAR

N. MESTRANO (*)

RÉSUMÉ. — On démontre que si d est « suffisamment grand » par rapport à g, il existe une courbe générique de genre g et de degré d dans $\mathbb{P}^3$ sans point rationnel.

ABSTRACT. — We prove that for each integer $g \geqslant 0$ and for each integer d "large enough", there exists a generic curve of genus g and degree d in $\mathbb{P}^3$ without rational point.

1. Introduction

Pour tout couple d'entiers naturels (d, g), on s'intéresse à l'assertion $(PR)_{d,g}$ suivante : $(PR)_{d,g}$. Il existe une courbe générique de genre g et de degré d dans $\mathbb{P}^3$, qui n'admet pas de point rationnel.

Si $U_{d,g} \to H_{d,g}$ est la famille universelle des courbes lisses connexes de genre g et de degré d dans $\mathbb{P}^3$, $(PR)_{d,g}$ s'énonce aussi de la façon suivante :

$(PR)_{d,g}$: $H_{d,g}$ admet une composante irréductible I telle que la restriction à I de $U_{d,g} \to H_{d,g}$ n'ait pas de section rationnelle.

Rappelons que, d'après un travail récent d'Harris (*voir* [4], p. 75), si d est plus grand que $(5/4)g+1$ alors $H_{d,g}$ est irréductible. Il est facile de voir que $(PR)_{d,0}$ est vraie si et seulement si d est pair (*voir* par exemple [8], lemme 4.11).

Pour tout entier d au moins égal à 3, $(PR)_{d,1}$ est vraie puisqu'on sait (*voir* [7]) que le degré de tout diviseur sur $U_{d,1}$ est un multiple de d.

D'autre part, il est facile de voir que la famille universelle des courbes de bidegré (a, b) contenues dans une quadrique lisse fixée de $\mathbb{P}^3$ admet une section rationnelle si et seulement si a ou b vaut 1 (*voir* [8], 4.2). On

(*) Texte reçu le 11 février 1985.

Nicole MESTRANO, Université de Valenciennes, Le Mont Houy, 59326 Valenciennes Cedex, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1985/03 295 10/$ 3.00

restreint donc l'étude aux courbes de $\mathbb{P}^3$ qui ne sont pas contenues dans une quadrique. Pour des raisons techniques on introduit l'entier $D_N(g)$ qui est le plus petit entier d tel qu'il existe une courbe lisse connexe C de genre g et de degré d dans $\mathbb{P}^3$ avec $H^1(C, N_C)=0$ où N_C est le fibré normal à C dans $\mathbb{P}^3$.

Le résultat principal de ce travail est que, pour tout entier g au moins égal à 4. $(PR)_{d,g}$ est vraie (et $H_{d,g}$ est non vide) si d est un entier au moins égal à $2D_N([g/2]-1)+2$ (où, pourtout réel a, on désigne par $[a]$ sa partie entière).

Autrement dit, si pour tout entier naturel g, on note $D_R^+(g)$ le plus petit entier d_0 tel que si d est un entier au moins égal à d_0, $(PR)_{d,g}$ est vraie (et $H_{d,g}$ est non vide), on démontre le :

THÉORÈME. — *Pour tout entier g au moins égal à quatre, on a*

$$D_R^+(g) \leqslant 2D_N([g/2]-1)+2.$$

De plus

$$D_R^+(0)=+\infty, D_R^+(1)=3, \qquad D_R^+(2)=5; \qquad D_R^+(3)=6.$$

Cette majoration entraîne l'inégalité:

$$\limsup g^{-2/3} D_R^+(g) \leqslant \sqrt[3]{9}$$

(*voir* 3.3 (iii)). D'autre part on donne (*voir* 7) une suite de couples d'entiers (d, g) pour lesquels il y a une composante irréductible I de $H_{d,g}$ telle que la restriction à I de $U_{d,g} \rightarrow H_{d,g}$ admette une section rationnelle.

Enfin, notons qu'en utilisant l'inégalité 3.4, on retrouve que l'assertion $(PR)_{d,g}$ est vraie si g est au moins égal à 11 et d à $g+3$. Ce résultat est démontré pour tout entier naturel g dans un travail antérieur, non publié (*voir* [8], théorème 4.13) en utilisant les mêmes méthodes mais des courbes réductibles différentes.

En effet, pour démontrer qu'une assertion $(PR)_{d,g}$ est vraie, on se ramène à étudier (suivant l'idée que Morin a utilisée pour le cas des coniques, *voir* [9], p. 47-48), des familles de courbes réductibles dont on sait qu'elles sont spécialisation de courbes lisses d'après des résultats récents d'Hartshorne-Hirschowitz (*voir* 3.1).

J'ai bénéficié durant toute la réalisation de ce travail des conseils et des encouragements d'André Hirschowitz. Je voudrais qu'il trouve ici l'expression de toute ma gratitude.

SOMMAIRE

2. Terminologie et notations

Soit $\mathbb{P}^3$ l'espace projectif de dimension 3 sur un corps de base algébriquement clos. Une courbe de $\mathbb{P}^3$ est *nodale* si elle est réduite et a pour seules singularités des points doubles ordinaires. Pour tout couple d'entiers (d, g), on désigne par $\bar{H}_{d,g}$ l'ouvert des courbes nodales du schéma de Hilbert des courbes de genre arithmétique g et de degré d dans $\mathbb{P}^3$. On note $\bar{U}_{d,g}$ la courbe tautologique au-dessus de $\bar{H}_{d,g}$. Soit S l'ensemble des points singuliers d'une courbe X_0 de $\bar{H}_{d,g}$,

$$h: H^0(X_0, N_{X_0}) \to \oplus_{s \in S} T_s^1$$

le morphisme de Lichtenbaum-Schlessinger (*voir* [6]) et $p_s: \oplus_{s' \in S} T_{s'}^1 \to T_s^1$ la projection. Si $H^1(X_0, N_{X_0})=0$ et si, pour tout s dans S, le morphisme $p_s \circ h$ est non nul on dira que la courbe X_0 est *très fortement lissifiable*.

Si X_0 est très fortement lissifiable, alors $\bar{H}_{d,g}$ et $\bar{U}_{d,g}$ sont lisses au voisinage de X_0 et on peut démontrer la réciproque. On note $H_{d,g}^*$ l'ouvert (qui est donc lisse) de $\bar{H}_{d,g}$ des courbes très fortement lissifiables et $U_{d,g}^*$ la courbe tautologique au-dessus de $H_{d,g}^*$ (de même, $U_{d,g}^*$ est lisse). Notons qu'il existe des courbes lisses qui sont dans le lieu singulier de $\bar{H}_{d,g}$. Toute courbe lisse C n'est donc pas forcément très fortement lissifiable, elle l'est si et seulement si $H^1(C, N_C)=0$. Il est donc plus contraignant, pour une courbe, d'être très fortement lissifiable que d'être fortement lissifiable, au sens donné par Hartshorne-Hirschowitz (*voir* [5], § 1).

Cependant leurs résultats (en particulier, dans [5], la proposition 1.1, les théorèmes 4.1, 4.5 et leurs preuves) restent valables. Pour tout changement de base $Z \to H_{d,g}^*$, on note U_Z l'image réciproque sur Z de $U_{d,g}^*$.

3. Rappels

On utilisera les deux résultats de lissification suivant dus à Hartshorne-Hirschowitz.

3.1. Soit $C=X\cup Y$ la réunion de deux courbes lisses X et Y de $\mathbb{P}^3$ avec $H^1(X, N_X)=0$ et $H^1(Y, N_Y)=0$ se coupant quasi-transversalement en au plus deux points distincts. Alors C est très fortement lissifiable (*voir* [5], théorème 4.5).

3.2. Soit Z une sous variété de $\bar{H}_{d,g}$ et C_0 un point lisse de Z. On note S l'ensemble des points singuliers de la courbe C_0, $f: T_{C_0}Z \to H^0(C_0, N_{C_0})$ le morphisme de Kodaira-Spencer et $h: H^0(C_0, N_{C_0}) \to \oplus_{s\in S} T_s^1$ le morphisme naturel. Si pour tout s dans S, le morphisme $p_s \circ h \circ f$ est non nul (où $p_s: \oplus_{s'\in S} T_{s'}^1 \to T_s^1$ est la projection), alors la courbe C_0 est dans la partie lisse de U_Z (*voir* [5], proposition 1.1 et sa preuve).

3.3. CONSÉQUENCES :

(i) De 3.1, on déduit facilement que, pour tout entier g non négatif et pour tout entier d au moins égal à $D_N(g)$, il existe une courbe lisse connexe C de genre g et de degré d dans $\mathbb{P}^3$ avec $H^1(C, N_C)=0$.

(ii) De même, on déduit de 3.1, que pour tout entier g au moins égal à deux on a $D_N(g+1) \leqslant D_N(g)+1$.

(iii) En considérant des courbes utilisées par Ellia (*voir* [1], proposition 2), on déduit comme Ellinsgrud-Hirschowitz (*voir* [2]) que la limite supérieure de la suite $g^{-2/3} D_N(g)$ est majorée par la constante C vérifiant $8C^3=9$.

3.4. Enfin, signalons qu'en utilisant les courbes de bidegré $(3, a+1)$ dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et l'inégalité (ii), on voit qu'on a $D_N(8) \leqslant [(g+1)/2]+4$.

4. Lemme de spécialisation

Pour tout morphisme $f: X \to Y$ et pour tout changement de base $h: Z \to Y$, on note $f_Z = X_Z \to Z$ l'image réciproque de f par h.

4.1. LEMME DE SPÉCIALISATION

Soit $f: X \to Y$ un morphisme projectif et surjectif de variétés quasi-projectives et $Z \to Y$ un changement de base. On suppose que Y est lisse et irréductible et que f admet une section rationnelle. Alors $f_Z: X_Z \to Z$ admet aussi une section rationnelle.

Démonstration. — On peut supposer que Z est une sous-variété de Y. Comme f est propre et Y normale, toute section rationnelle $\mathcal{T}$ de f se prolonge en une section $\bar{\mathcal{T}}$ définie sur un ouvert U de Y avec $\operatorname{codim}(Y \setminus U) \geqslant 2$. Si Z est de codimension un dans Y, le lemme est clair. Sinon, on raisonne par récurrence sur la codimension de Z en remarquant qu'il y a une sous variété Z' de Y de codimension 1, lisse, localement fermée, contenant un ouvert dense de Z.

4.2. REMARQUE

Si de plus X est lisse et Z est une sous-variété de codimension un dans Y, alors $f_Z : X_Z \to Z$ admet une section rationnelle à valeurs dans l'ouvert de X où f est lisse. En effet, en reprenant les notations de la preuve de 4.1, si y est dans U, $\bar{\mathcal{T}}(y)$ ne peut pas être dans le lieu singulier de $f^{-1}(y)$ car f est lisse en $\bar{\mathcal{T}}(y)$.

4.3. LEMME

Pour toute sous-variété irréductible Z de $H^*_{d,g}$, il existe une sous-variété Z' de $H^*_{d,g}$ de codimension un, localement fermée, lisse contenant un ouvert dense Z_0 de Z et telle que la courbe tautologique $U_{Z'}$ soit lisse.

Démonstration. — On peut supposer codim $Z \geqslant 2$ car $U^*_{d,g}$ et $H^*_{d,g}$ sont lisses. Soit c_0 un point lisse de Z et μ un vecteur normal à Z en c_0 dont l'image dans T^1_s est nulle pour tout point singulier s de la courbe C_0 (un tel μ existe car C_0 est très fortement lissifiable). Soit Z'' une hypersurface de $H^*_{d,g}$ contenant Z, lisse au point c_0 et dont l'espace tangent au point c_0 contient le vecteur μ.

D'après le rappel 3.2, la courbe C_0 est contenue dans le lieu lisse de la courbe tautologique $U_{Z''}$. Il y a donc un ouvert dense Z' de Z'' tel que Z' et $U_{Z'}$ soient lisses (Z' contient l'ouvert dense $Z_0 := Z \cap Z'$ de Z).

Ce dernier lemme permet d'utiliser la remarque 4.2 dans la démonstration du lemme de spécialisation 4.1 (pour la récurrence) dans le cas où Y est composante irréductible de $H^*_{d,g}$ et $f : X \to Y$ la restriction à Y de $U^*_{d,g} \to H^*_{d,g}$ on en déduit le:

4.4. COROLLAIRE

Soit Z une variété irréductible et $Z \to H^*_{d,g}$ un changement de base. Si la restriction à Z de $p : U^*_{d,g} \to H^*_{d,g}$ n'admet pas de section rationnelle à valeurs dans l'ouvert de $U^*_{d,g}$ où le morphisme p est lisse, alors $(PR)_{d,g}$ est vraie.

5. Majoration de $D_R^+(g)$

Dans la suite, les entiers d et g sont fixés. On pose :

$$d'=\frac{d}{2} \quad \text{et} \quad g'=\left[\frac{g}{2}\right] \quad \text{si } d \text{ est pair,}$$

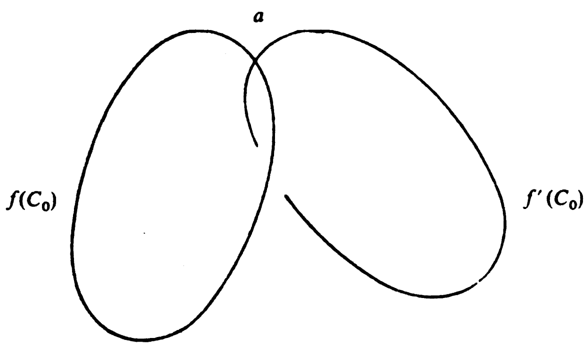
$$d'=\frac{d-3}{2} \quad \text{et} \quad g'=\left[\frac{g}{2}\right]-1 \quad \text{si } d \text{ est impair.}$$

On suppose $d' \geqslant D_N(g')$, on fixe une courbe lisse connexe C_0 de genre g' et de degré d' avec $H^1(C_0, N_{C_0})=0$ et deux points distincts a, b sur C_0.

5.1. *Si d est pair avec $d \geqslant 2D_N([g/2])$ et $g \geqslant 2$, alors $(PR)_{d,g}$ est vraie.*

Supposons d'abord que g soit pair (i. e. $g=2g'$). Soit Z l'ensemble défini par $Z=\{f \in \mathbb{P}\,GL(4); f(a)=a\}$ et Z_2 l'ouvert irréductible de $\mathrm{Hilb}^2 Z$ formé des paires $\{f, f'\}$ telles que les courbes $f(C_0)$ et $f'(C_0)$ ne se coupent (quasi transversalement) qu'au point a.

Il y a un changement de base naturel de Z_2 dans $H^*_{d,g}$ qui à $\{f, f'\}$ associe la courbe $f(C_0) \cup f'(C_0)$.

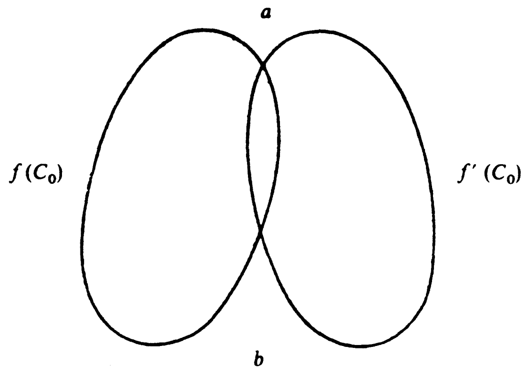


D'après le corollaire 4.4 pour prouver que l'assertion $(PR)_{d,g}$ est vraie, il suffit de démontrer que le revêtement à deux feuillets $R \to Z_2$ n'a pas de section rationnelle. Or R est un ouvert non vide de $Z \times Z$ et Z est une sous-variété linéaire (non vide) de l'espace projectif dans lequel $\mathbb{P}\,GL(4)$ est naturellement plongé. Donc R est irréductible, et $R \to Z_2$ n'a pas de section rationnelle.

Si maintenant g est impair (i. e. $g=2g'+1$), on démontre de la même façon que l'assertion $(PR)_{d,g}$ est vraie en remplaçant l'ensemble Z par l'ensemble Z' défini par

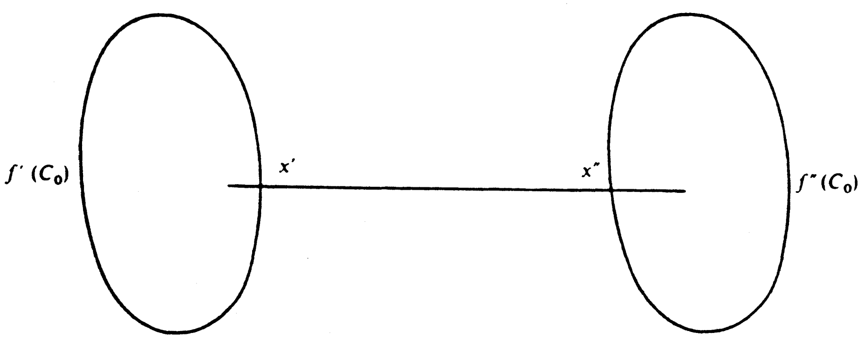
$$Z'=\{f \in \mathbb{P}\,GL(4), f(a)=a \text{ et } f(b)=b\}$$

et Z_2 par l'ensemble Z'_2 des paires $\{f, f'\}$ de $\mathrm{Hilb}^2 Z'$ telles que les courbes $f(C_0)$ et $f'(C_0)$ ne se coupent (quasi-transversalement) qu'aux points a et b. C'est-à-dire qu'on considère les courbes de la forme :

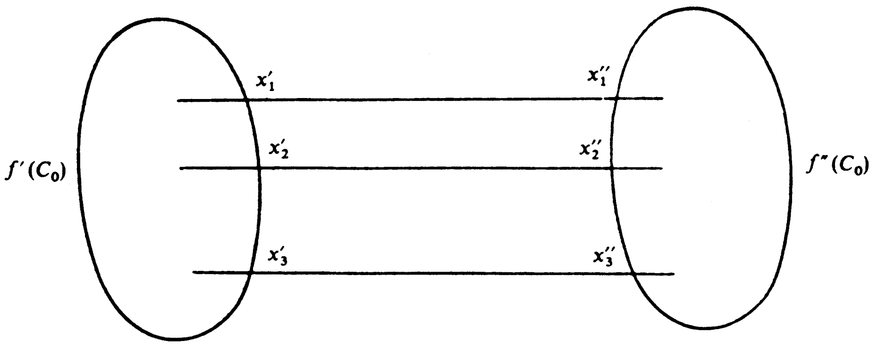


5.2. *Si d est impair avec $d \geqslant 7$, $d \geqslant 2\ D_N([g/2]-1)+3$ et $g \geqslant 2$, alors $(PR)_{d,g}$ est vraie.*

Supposons d'abord que g soit pair (i. e. $g=2g'+2$). Soit H_2 l'ouvert de $\mathrm{Hilb}^2\, \mathbb{P}\, GL(4))$ des paires $\{f', f''\}$ telles que les courbes $f'(C_0)$ et $f''(C_0)$ ne se coupent pas. On identifie tout élément $\{f', f''\}$ de H_2 comme la courbe $C=f'(C_0) \cup f''(C_0)$ et on note $U_2 \to H_2$ la courbe tautologique. Soit $\mathrm{Hilb}_0^2(U_2/H_2)$ l'ouvert de la composante irréductible du schéma de Hilbert relatif $\mathrm{Hilb}^2(U_2/H_2) \to H_2$ dont la fibre au-dessus de $C \in H_2$ est l'ensemble des paires $\{x', x''\}$ de points distincts de C qui ne sont pas sur une même composante irréductible de C et tels que la droite $\langle x', x'' \rangle$ ne coupe (quasi-transversalement) C qu'en x' et x''.



Soit H l'ouvert irréductible de $\mathrm{Hilb}^3(\mathrm{Hilb}_0^2(U_2/H_2)/H_2) \to H_2$ dont la fibre au-dessus de $C = f'(C_0) \cup f''(C_0)$ est l'ensemble des $C, \{x'_i, x''_i\}_{i \in \{1,2,3\}})$ tels que les droites $\langle x'_1, x''_1 \rangle$, $\langle x'_2, x''_2 \rangle$ et $\langle x'_3, x''_3 \rangle$ soient deux à deux disjointes et les points x'_1, x'_2, x'_3 (resp. x''_1, x''_2, x''_3) non alignés.



Il y a un changement de base naturel de H dans $H^*_{d,g}$ qui à $(C, \{x'_i, x''_i\}_{i \in \{1,2,3\}})$ associe la courbe $\bigcup_{i=1}^3 \langle x'_i, x''_i \rangle \cup C$. Pour prouver que l'assertion $(PR)_{d,g}$ est vraie, il suffit de prouver d'après le lemme de spécialisation (*voir* 4.1) que la courbe universelle $U_H \to H$ n'a pas de section rationnelle. Pour cela, on va démontrer que les sections rationnelles de $U_H \to H$ ne peuvent pas prendre leurs valeurs dans la partie de $U^*_{d,g}$ formée de droites (resp. de courbes de H_2).

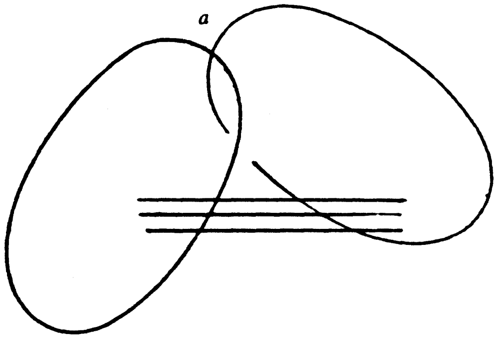
Fixons une courbe $C = C' \cup C''$ de H_2 où $C' := f'(C_0)$ et $C'' := f''(C_0)$ (resp. trois droites D', D'', D''', disjointes deux à deux; on pose $D := D' \cup D'' \cup D'''$).

Notons $U_{H_C} \to H_C$ (resp. $U_{H_D} \to H_D$) la restriction de $U_H \to H$ a la sous-variété irréductible H_C(resp. H_D) des points de H dont l'image dans $H^*_{d,g}$ est une courbe contenant C (resp. D).

Toute section rationnelle de $U_{H_C} \to H_C$ qui n'est pas à valeurs dans C, définit une section rationnelle du revêtement à trois feuillets R_C de H_C. Or R_C est irréductible car c'est un ouvert de $(C' \times C'') \times \mathrm{Hilb}^2(C' \times C'')$. Donc $R_C \to H_C$ n'a pas de section rationnelle. Par suite, pour toute courbe C de H_2, toute section rationnelle de $U_{H_C} \to H_C$ est à valeurs dans C. Donc $U_H \to H$ n'a pas de section rationnelle à valeurs dans la partie des courbes formée de droites. Il reste à prouver que pour tout $D = D' \cup D'' \cup D'''$, toute section rationnelle de $U_{H_D} \to H_D$ est à valeurs dans D.

Toute section rationnelle de $U_{H_D} \to H_D$ définit, si elle n'a pas ses valeurs dans D, une section rationnelle du revêtement à deux feuillets R_D de H_D. On vérifie que R_D et H_D sont (non vides et) irréductibles. Par suite, $R_D \to H_D$ n'a pas de section rationnelle. Donc, toute section rationnelle de $U_{H_D} \to H_D$ est à valeurs dans D. Il s'ensuit que $U_H \to H$, n'a pas de section rationnelle.

Si g est impair (i.e. $g=2g'+3$), on démontre de la même façon que l'assertion $(PR)_{d,g}$ est vraie en remplaçant H_2 par l'ensemble Z_2 défini en 5.1. On considère donc les courbes de la forme suivante:



Signalons que, pour prouver que toute section rationnelle de $U_{H_D} \to H_D$ est à valeurs dans D, on utilise ici le corollaire 4.4.

6. Démonstration du théorème

Pour $g \geqslant 2$, le théorème énoncé dans l'introduction résulte de 5.1, 3.3, (ii) et de 5.2 (on voit que $(PR)_{5,2}$ est vraie en considérant les courbes de bidegré (2,3) contenues dans une quadrique lisse fixée de $\mathbb{P}^3$, *voir* l'introduction, aussi pour $g=0$ et $g=1$).

7. Remarque

(Je remercie Ph. Ellia pour plusieurs discussions utiles concernant cette remarque.) Pour tout entier t au moins égal à 3, posons

$$d(t)=t^2-t+1 \text{ et } g(t)=t^3-\frac{7t^2-7t}{2}-1.$$

Gruson-Peskine ont démontré (*voir* [3]) que toute courbe C, suffisamment générale, de genre $g(t)$ et de degré $d(t)$ est liée à une courbe plane de degré $t-1$ par l'intersection complète de deux surfaces de degré t. En écrivant la suite exacte de liaison, on voit que le fibré en droites de degré 1, $\omega_C(5-2t)$ a une section non nulle. On en déduit que, pour tout $t \geqslant 3$, il y a une composante irréductible I de $H_{d(t), g(t)}$ telle que la restriction à I de $U_{d(t), g(t)} \rightarrow H_{d(t), g(t)}$ admette une section rationnelle. Notons que $d(3)=7$, $g(3)=5$ et que $H_{7,5}$ est irréductible. L'assertion $(PR)_{7,5}$ est donc fausse et $D_R^+(5)=8$.

RÉFÉRENCES

[1] ELLIA (Ph.). — Exemples de courbes de $\mathbb{P}^3$ à fibré normal semi-stable, stable, *Math. Ann.*, vol. 264, 1983, p. 389-396.

[2] ELLINGSRUD (G.), HIRSCHOWITZ (A.). — Sur le fibré normal de courbes gauches, *C.R. Acad. Sc.*, série I, t. 299, 1984, p. 245-249.

[3] GRUSON (L.), PESKINE (C.). — Genre des courbes de l'espace projectif I, *L.N. Maths.*; n° 687, 1977, p. 30-59.

[4] HARRIS (J.). — Curves in Projective Space, *Sem. Math. Sup.*, Presses Univ. Montréal, 1982, 138 p.

[5] HARTSHORNE (R.), HIRSCHOWITZ (A.). — Smoothing algebraic Space Curves, In *Week of alg. geom.*, Proceedings, Barcelona, 1983.

[6] LICHTENBAUM (S.), SCHLESSINGER (M.). — The cotangent complex of a morphism, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 128, 1967, p. 41-70.

[7] MESTRANO (N.). — Degré des diviseurs sur les familles de courbes de $\mathbb{P}^3$. *Math. Ann.*, vol. 270, 1985, p. 461-465.

[8] MESTRANO (N.). — Sections rationnelles de morphismes algébriques, Préprint de l'Université de Nice, n° 25, 1983.

[9] ROTH (L.). — Algebraic threefolds, Springer, 1959.