MARINA VILLE

Sur le volume des variétés riemanniennes pincées

Bulletin de la S. M. F., tome 115 (1987), p. 127-139
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1987__115__127_0>

Bull. Soc. math. France,
115, 1987, p. 127-139.

SUR LE VOLUME DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES PINCÉES

PAR

MARINA VILLE (*)

RÉSUMÉ. — Nous nous intéressons au volume des variétés riemanniennes dont la métrique est « proche » d'une métrique de courbure constante. En dimension paire, la formule de Gauss-Bonnet combinée avec une hypothèse de pincement (dépendant de la dimension) nous donne une minoration de ce volume. En dimension quelconque, on n'a qu'un résultat infinitésimal : on considère une métrique d'Einstein et on la fait varier de manière C^∞, la variation première de la courbure scalaire étant de signe constant; on en déduit alors le signe de la variation première du volume.

ABSTRACT. — Our purpose is to study the volume of those riemannian manifolds the metric of which is "close" to a constantly curved one. In even dimension the Gauss-Bonnet formula together with a pinching hypothesis (depending on the dimension) yield a lower bound for this volume. In the general case we prove but an infinitesimal result: its setup is a C^∞ variation of metrics starting from an Einstein one. We assume that the first variation of the scalar curvature has a constant sign over the manifold and we derive the sign of the first variation of the volume.

I. Introduction

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à minorer le volume des variétés riemanniennes de courbure sectionnelle pincée en fonction du volume d'une éventuelle métrique de courbure sectionnelle constante. Le résultat essentiel de cet article est :

THÉORÈME 1. — *Pour tout entier $2n$ pair, il existe un réel strictement positif calculable ε_{2n} qui possède la propriété suivante : Si (M, g) est une*

(*) Texte reçu le 7 mai 1984, révisé le 3 juin 1986.

Marina VILLE, Université de Nancy-I U.E.R. Sciences Mathématiques, B.P. n° 239, 54506 Vandœuvre-les-Nancy Cedex.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1987/02 127 13/$ 3.30

variété riemannienne compacte orientable de dimension $2n$ *et dont la courbure sectionnelle vérifie*

$$-1 \leqslant K < -1 + \varepsilon_{2n} \qquad (\textit{resp. } 1 - \varepsilon_{2n} < K \leqslant 1),$$

alors

$$\operatorname{Vol}(M, g) \geqslant \frac{1}{2}(\operatorname{Vol} S^{2n})\,|\chi(M)| \tag{1}$$

l'égalité dans (1) *ayant lieu si et seulement si* g *est de courbure constante* -1 (*resp.* $+1$).

Si $2n=4$, $\varepsilon_4 = 18/17$ *convient.*

La démonstration de ce théorème est algébrique; elle consiste à prouver que, pour ε assez petit le tenseur de courbure constante -1 (resp. $+1$) réalise un maximum pour l'intégrand de Gauss-Bonnet parmi tous les tenseurs de courbure dont la courbure sectionnelle est comprise entre -1 et $-1+\varepsilon$ (resp. 1 et $1-\varepsilon$).

Remarques. — 1. Dans le cas de la courbure positive, on avait déjà la minoration classique (avec un bien meilleur pincement que celui du théorème 1) :

PROPOSITION 1. — *Si* M *est une variété riemannienne de dimension* n, *de courbure sectionnelle vérifiant :*

$$1 \geqslant K > 0 \qquad \textit{si} \quad n \textit{ est pair}$$

$$1 \geqslant K > \frac{1}{4} \qquad \textit{si} \quad n \textit{ est impair}$$

alors

$$\operatorname{Vol} M \geqslant \operatorname{Vol} S^n$$

En effet, d'après le théorème de Rauch [Gü], si $p \in M$, $q \in M$, $q \in S^n$

$$\|\operatorname{Jac} \exp_p\| \geqslant \|\operatorname{Jac} \exp_q\|$$

et d'après le théorème de Klingenberg $i(M) \geqslant \Pi = \operatorname{diam} S^n$, ce qui permet de conclure.

2. Dans le cas de la courbure négative, on a le résultat suivant de M. Gromov :

THÉORÈME 2 [Gr]. — *Si* M *est compacte munie d'une métrique* g_0 *de courbure sectionnelle constante* -1 *et si* g *est une autre métrique sur* M *vérifiant* $-1 \leqslant K \leqslant 0$, *alors*

$$\mathrm{Vol}(M, g_0) \leqslant c_n \mathrm{Vol}(M, g)$$

où c_n *est une constante ne dépendnat que de la dimension* n *de* M.

3. J. Cheeger et M. Gromov ont récemment généralisé la formule de Gauss-Bonnet aux variétés complètes de volume fini et de courbure négative ([Ch-G]). Le théorème 1 s'applique donc aussi à ces variétés.

4. Ces questions s'inscrivent dans le cadre plus général des problèmes de volume minimal [Gr] :

DÉFINITION 1. — *On appelle* volume minimal *d'une variété* M *la quantité*

$$\mathrm{Min}\,\mathrm{Vol}(M) = \inf \mathrm{Vol}(M, g)$$

où g *décrit l'ensemble des métriques riemanniennes sur* M *qui sont complètes de volume fini et dont la courbure sectionnelle est comprise entre* -1 *et* $+1$.

En dimension 2 la formule de Gauss-Bonnet donne immédiatement :

PROPOSITION 2. — *Soit* M *une surface orientable compacte. Alors*

$$\mathrm{Min}\,\mathrm{Vol}(M) = 2\pi |\chi(M)|.$$

Mais à partir de la dimension 3 on ne connaît aucune valeur du volume minimal lorsque celui-ci est non nul.

En dimension impaire il n'y a pas de formule intégrale; et si $\chi(M) = 0$ en dimension paire, la formule (1) ne donne rien. Dans tous les cas nous avons cependant des résultats infinitésimaux basés sur le fait que les métriques d'Einstein sont les points critiques de la fonctionnelle

$$g \mapsto \int_M \tau_g \, dV_g$$

(τ_g désigne la courbure scalaire) définie sur l'espace des métriques sur M de volume 1.

PROPOSITION 3. — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n, $n \geqslant 3$. Alors*

(i) *(M, g) est d'Einstein si et seulement si pour toute variation $(g_t)_{[0,\,1[}$ et g à volume constant,*

$$\int_M \left(\frac{d}{dt}\tau^t\Big|_{t=0}\right) dV^\circ = 0.$$

où τ^t désigne la courbure scalaire de g_t et dV° l'élément de volume de $g_0 = g$.

(ii) *Supposons que (M, g) est effectivement d'Einstein et de courbure scalaire τ^0 non nulle; alors pour toute variation de métriques (g_t) la variation première du volume s'écrit :*

$$\frac{d\,\mathrm{Vol}(M, g_t)}{dt}\Big|_{t=0} = -\frac{n}{2\tau^\circ}\int_M \left(\frac{d}{dt}\tau^t\Big|_{t=0}\right) dV.$$

(iii) *Si (M, g) est d'Einstein de courbure scalaire nulle, pour toute variation de métriques $(g_t)_{[0,\,1[}$, on a*

$$\int_M \frac{d\tau^t}{dt} = 0.$$

Remarque. — Il n'y a donc pas, dans ce dernier cas, de variation (g_t) de métriques pour laquelle $d\tau^t/dt$ est partout non positif et négatif en au moins un point; ce qui confirme le fait connu (*cf.* [Bo]) suivant lequel l'application courbure scalaire

$$g \mapsto \tau(g)$$
$$L^p(S^2 M) \to L^p(M)$$

n'est pas une submersion en une métrique Ricci-plate.

Ce travail constituait le début du doctorat de 3[e] cycle de l'auteur. Elle remercie Marcel Berger pour ses conseils et encouragements; ainsi que Lionel Bérard Bergery et le referee qui lui ont suggéré des améliorations.

II. Démonstration du théorème

Posons

$$C_n = \frac{1}{2}\mathrm{Vol}\, S^{2n}.$$

Nous allons faire la démonstration dans le cas de la courbure positive (dans celui de la courbure négative, la démonstration est presque identique). Soit donc M une variété riemannienne compacte orientable de dimension $2n$ et dont la courbure vérifie $1 \geqslant K \geqslant 1-\eta \geqslant 0$. La démonstration va consister en la recherche d'une majoration pour η qui ne dépende que de la dimension de M et qui assure

$$\mathrm{Vol}\, M \geqslant c_n |\chi(M)|.$$

N.B. Nous venons d'écrire $\eta \leqslant 1$; le cas de la dimension 4 où nous autorisons des valeurs de η plus grandes que 1 (*voir* l'énoncé du théorème 1) sera traité séparément plus bas.

1. Formule de Gauss-Bonnet

La formule de Gauss-Bonnet est la clé du raisonnement. Rappelons-la [Sp] :

$$\int_M \mathcal{G} = C_n \chi(M).$$

où $\mathcal{G}$ est une $2n$-forme sur M que nous allons expliciter. Soit $X=(X_1, \ldots, X_{2n})$ un repère orthonormé positif mobile, $dX^1, \ldots, dX^{2n}$ les 1-formes duales associées et Ω^i_j les 2-formes de courbure associées. Alors

$$\mathcal{G} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} \varepsilon(\sigma) \mathcal{G}^\sigma$$

où

$$\mathcal{G}^\sigma = \Omega^{\sigma(1)}_{\sigma(2)} \wedge \ldots \wedge \Omega^{\sigma(2n-1)}_{\sigma(2n)} = \frac{1}{2^n} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{2n}} \varepsilon(\tau)$$

$$R_{\sigma(1)\sigma(2)\tau\circ\sigma(1)\tau\circ\sigma(2)} \cdots R_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)\tau\circ\sigma(2n-1)\tau\circ\sigma(2n)}.$$

Posons

$$\mathcal{G} = G\, dX^1 \wedge \ldots \wedge dX^{2n}$$

$$\mathcal{G}^\sigma = G^\sigma\, dX^1 \wedge \ldots \wedge dX^{2n}.$$

où les G et G^σ sont des fonctions de M dans $\mathbb{R}$: il est en effet bien clair qu'elles ne dépendent pas du repère orthonormé choisi.

LEMME 1. — *Si en tout point de M, on a*

$$|G|\leqslant 1$$

alors

$$\operatorname{Vol} M\geqslant C_n|\chi(M)|$$

Démonstration. — C'est à peu près évident

$$C_n|\chi(M)|=\left|\int_M G\,dX^1\wedge\ldots\wedge dX^{2n}\right|$$
$$\leqslant\int_M |G|\,dX^1\wedge\ldots\wedge dX^{2n}\leqslant\operatorname{Vol} M \quad \square$$

Plaçons-nous désormais et pour toute la suite en un point donné p de M. Nous allons y construire un repère orthonormé direct dans lequel nous écrirons G pour montrer que pour un η assez petit G satisfait aux exigences du lemme 1.

La grassmannienne étant compacte, il existe un plan Π dans $T_p M$ dont la courbure est $\inf_{P\in G_2(T_p M)} K_P$ (Dans le cas de la courbure négative on aurait pris au contraire le plan où la courbure sectionnelle atteint sa borne supérieure). Notre repère va consister en une base orthonormée X_1, X_2 de Π complétée en une base orthonormée directe $X_3, \ldots, X_{2n}$ de son orthogonal.

Posons $K_\Pi=1-\eta_p$.

2. QUELQUES DÉFINITIONS

Avant d'aborder l'étude de G, voici quelques définitions techniques

DÉFINITION 2. — *Un coefficient R_{ijkl} du tenseur de courbure sera dit* non trivial *si et seulement si $i\neq j$ et $k\neq l$.*

DÉFINITION 3. — Un coefficient non trivial R_{ijkl} *de R sera dit* à deux indices *si et seulement si $\{i, j\}=\{k, l\}$. Il sera dit* à plus de deux indices *sinon.*

L'intérêt de ces définitions vient du lemme suivant :

LEMME 2. — *Un coefficient* R_{ijkl} du tenseur de courbure de M en p vérifie

$$|R_{ijkl}|\leqslant 1$$

et s'il est à plus de deux indices,

$$|R_{ijkl}|\leqslant \frac{2}{3}\eta_p.$$

Démonstration. — C'est trivial, compte tenu des inégalités de Berger pour les coefficients d'un tenseur de courbure de courbure sectionnelle pincée ([Be]). □

Rappelons maintenant que G est combinaison linéaire de termes, (que nous appelerons termes élémentaires) du type

$$R_{\sigma(1)\sigma(2)\tau\circ\sigma(1)\tau\circ\sigma(2)}\cdots R_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)\tau\circ\sigma(2n-1)\tau\circ\sigma(2n)}.$$

DÉFINITION 4. — *Un terme élémentaire sera dit* de type I *si tous les facteurs* $R_{\sigma(i)\sigma(j)\tau\circ\sigma(i)\tau\circ\sigma(j)}$ *qui le composent sont à deux indices; il sera dit* de type II *sinon.*

Enfin notons

$$A^{\sigma}=\frac{1}{2^n}\sum\nolimits_{\tau}\varepsilon(\tau)\,R_{\sigma(1)\sigma(2)\tau\circ\sigma(1)\tau\circ\sigma(2)}\cdots R_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)\tau\circ\sigma(2n-1)\tau\circ\sigma(2n)}$$

où l'on somme sur tous les termes de type I,

$$B^{\sigma}=\frac{1}{2^n}\sum\nolimits_{\tau}\varepsilon(\tau)\,R_{\sigma(1)\sigma(2)\tau\circ\sigma(1)\tau\circ\sigma(2)}\cdots R_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)\tau\circ\sigma(2n-1)\tau\circ\sigma(2n)}$$

où l'on somme cette fois-ci sur tous les termes de type II,

$$A=\frac{1}{n!}\sum\nolimits_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2n}}A^{\sigma},\qquad B=\frac{1}{n!}\sum\nolimits_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2n}}B^{\sigma}.$$

On a alors $G=A+B$, $G^{\sigma}=A^{\sigma}+B^{\sigma}$.

3. Étude des termes de type II

LEMME 3. — *Si* $X=R_{\sigma(1)\sigma(2)\tau\circ\sigma(1)\tau\circ\sigma(2n-1)\tau\circ\sigma(2n)}$ *est un terme de type II, alors*

$$|X|\leqslant\frac{4}{9}\eta_p^2$$

Démonstration. — Par hypothèse, X a au moins un facteur qui est à plus de deux indices, soit par exemple $R_{\sigma(1)\sigma(2)\tau\circ\tau(1)\tau\circ\sigma(2)}$; nous allons montrer qu'il contient en fait au moins deux tels facteurs. En effet,

$$\{\sigma(1),\ \sigma(2)\}\neq\{\tau\circ\sigma(1),\ \tau\circ\sigma(2)\}$$

et donc, en passant au complémentaire,

$$\{\sigma(3),\ \sigma(4),\ \ldots,\ \sigma(2n)\}\neq\{\tau\circ\sigma(3),\ \tau\circ\sigma(4),\ \ldots,\ \tau\circ\sigma(2n)\}$$

On ne peut donc pas avoir pour tout $k>1$,

$$\{\sigma(2k-1),\ \sigma(2k)\}=\{\tau\circ\sigma(2k-1),\ \tau\circ\sigma(2k)\}.$$

Il y a donc encore un autre facteur à plus de deux indices. On applique alors le lemme 2 et le lemme 3 est démontré. □

On en déduit immédiatement le

LEMME 4. — $|B|\leqslant b_n\eta_p^2$ *où* b_n *ne dépend que de la dimension* $2n$ *de* M.

4. Étude des termes de type I

Soit σ un élément quelconque de $\mathfrak{S}_{2n}$.

Alors

$$A^\sigma=\frac{1}{2^n}\sum\nolimits_{\tau\in T^\sigma}\varepsilon(\tau)\,R_{\sigma(1)\sigma(2)\tau\circ\sigma(1)\tau\circ\sigma(2)}\cdots R_{\sigma(2n-1)\sigma\circ(2n)\tau\circ\sigma(2n-1)\tau\circ\sigma(2n)}$$

où T^σ est l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_{2n}$ qui vérifient

$$\{\sigma(2k-1),\ \sigma(2k\}=\{\tau\circ\sigma(2k-1),\ \tau\circ\sigma(2k)\},\qquad 1\leqslant k\leqslant n$$

c'est-à-dire le sous-groupe de $\mathfrak{S}_{2n}$ engendré par les transpositions

$$(\sigma(2k-1)\ \sigma(2k)), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

LEMME 5. — *$A^\sigma = K_{\sigma(1)\sigma(2)} \ldots K_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}$, où K_{ij} désigne la courbure sectionnelle du plan engendré par X_i et X_j.*

Démonstration. — Considérons un élément τ de T^σ; τ s'écrit de façon unique $\prod_{k=1}^n (\sigma(2k-1)\sigma(2k))^{a_k}$ avec $a_k = 0$ ou 1. Il est alors clair que

$$\varepsilon(\tau) = \sum_{k=1}^n a_k.$$

D'autre part,

$$R_{\sigma(2k-1)\sigma(2k)\tau\circ\sigma(2k-1)\tau\circ\sigma(2k)} = \begin{cases} K_{\sigma(2k-1)\sigma(2k)} & \text{si} \quad a_k = 1 \\ -K_{\sigma(2k-1)\sigma(2k)} & \text{si} \quad a_k = 0. \end{cases}$$

et donc

$$R_{\sigma(1)\sigma(2)\tau\circ\sigma(1)\tau\circ\sigma(2)} \ldots R_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)\tau\circ\sigma(2n-1)\tau\circ\sigma(2n)}$$
$$= (-1)^{\Sigma a_k} K_{\sigma(1)\sigma(2)} \ldots K_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)} = \varepsilon(\tau) K_{\sigma(1)\sigma(2)} \ldots K_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}$$

d'où

$$A^\sigma = \frac{1}{2^n} (\# T^\sigma) K_{\sigma(1)\sigma(2)} \ldots K_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}$$

et on achève la démonstration du lemme 5 en remarquant que T^σ est de cardinal 2^n. □

Il est donc clair que l'on a, pour toute permutation σ,

$$(1-\eta_p)^n \leqslant A^\sigma \leqslant 1$$

Considérons maintenant $A^{\mathrm{Id}} = K_{12} \ldots K_{n-1\,n}$.

LEMME 6. — *$A^{\mathrm{Id}} \leqslant 1 - \eta_p + a_{2n} \eta_p^2$ où a_{2n} est une constante positive ne dépendant que de la dimension $2n$ de M.*

Démonstration. Posons, pour tout couple (i, j),

$$K_{ij} = 1 - \eta_{ij} \qquad (\text{donc}\ \eta_{12} = \eta_p)$$

Alors $A^{\mathrm{Id}} = (1-\eta_{12}) \ldots (1-\eta_{n-1\,n})$.

On développe ce produit :

$$A^{\mathrm{Id}} = 1 - \sum_k \eta_{2k-1\ 2k} + P_{2n}(\eta_{12}, \ldots, \eta_{2n-1\ 2n})$$
$$\leqslant 1 - \eta_p + P_{2n}(\eta_{12}, \ldots, \eta_{2n-1\ 2n})$$

où P_{2n} est un polynôme en les η_{ij} (à coefficients ne dépendant bien sûr que de la dimension $2n$) dont tous les termes sont au moins de degré total 2. Il existe donc une constante a_{2n} telle que

$$|P_{2n}(\eta_{12}, \ldots, \eta_{n-1\ n})| \leqslant a_{2n}\eta_p^2$$

(puisque $\eta_{12} = \eta_p$ est le sup des η_{ij}).

Le lemme 6 est démontré.

5. Démonstration de l'inégalité (1).

Nous connaissons maintenant tous les termes de G et nous voyons que

$$-b_{2n}\eta_p^2 \leqslant n!\,G \leqslant n! - \eta_p + (a_{2n} + b_{2n})\eta_p^2 + (n! - 1)$$

et donc il existe un $\varepsilon_{2n} > 0$ tel que

$$(\forall p \in M\ \eta_p \leqslant \varepsilon_{2n}) \quad \Rightarrow \quad |n!\,G| \leqslant n!$$

Donc M vérifie les hypothèses du lemme 1 et donc

$$(\bigstar) \qquad \mathrm{Vol}\, M \geqslant C_n |\chi(M)|$$

Et l'égalité ($\bigstar$) a lieu si et seulement si $G \equiv 1$, c'est-à-dire si η_p est nul pour tout p, ce qui signifie que M est de courbure sectionnelle constante $+1$.

6. Cas de la dimension 4

On construit en chaque point p de M le repère orthonormé direct (X_1, X_2, X_3, X_4) suivant (*cf.* [Ch]) :

X_1 et X_2 engendrent un plan P_1 où la courbure sectionnelle atteint son minimum (resp. son maximum) sur $G_2(T_pM)$; X_1, X_3 engendrent un plan P_2 dont la courbure sectionnelle est minimale (resp. maximale) parmi tous les plans de $G_2(T_pM)$ possédant un vecteur non nul commun avec P_1 et un autre vecteur non nul commun avec $P_1^{\perp}$.

Alors (*cf.* [Ch]), G s'écrit à l'aide de ce repère

$$G=\frac{1}{3}(\sigma_{12}\sigma_{34}+\sigma_{13}\sigma_{24}+\sigma_{14}\sigma_{23}+R_{1234}^2+R_{1342}^2+R_{1423}^2)$$

où, en reprenant les notations de la page précédente,

$$\sigma_{12}=1-\eta_p \qquad (\text{resp. } \sigma_{12}=-1+\eta_p)$$

D'autre part, on a le lemme :

LEMME 7. — $R_{1234}^2+R_{1342}^2+R_{1423}^2\leqslant\frac{8}{9}\eta_p^2$.

Démonstration. — L'identité de Bianchi s'écrit :

$$R_{1234}+R_{1342}+R_{1423}=0$$

donc deux de ces termes au moins, soit par exemple les deux premiers sont de même signe. Alors

$$R_{1423}=-(R_{1234}+R_{1342})$$

et

$$|R_{1423}|=|R_{1234}|+|R_{1342}|$$

donc

$$R_{1234}^2+R_{1342}^2\leqslant R_{1423}^2$$

et

$$R_{1234}^2+R_{1342}^2+R_{1423}^2\leqslant 2R_{1423}^2\leqslant 2\left(\frac{2}{3}\eta_p\right)^2=\frac{8}{9}\eta_p^2$$

d'après [Be]. □

Nous allons maintenant distinguer deux cas :

1^er^ *cas.* $\eta_p\leqq 1$. Alors $3G-3\leqslant-\eta_p+(8/9)\eta_p^2$.

2^e^ *cas.* $\eta_p\geqslant 1$. Alors $\sigma_{12}\sigma_{34}\leqslant(1-\eta_p)^2$ (pour s'en convaincre, on pourra considérer séparément les cas où $\sigma_{34}\geqslant 0$ et $\sigma_{34}\leqslant 0$) et

$$3G-3\leqslant-2\eta_p+\frac{17}{9}\eta_p^2<0$$

tant que

$$\eta_p < \varepsilon_4 = \frac{18}{17}.$$

Le théorème 5 est démontré.

Remarques. — 1. La valeur 18/17 n'est sans doute pas optimale.

2. Les dimensions supérieures se présentent beaucoup moins favorablement; en effet, les ε_{2n} qu'on obtient tendent vers 0 quand n tend vers l'infini et ce, très rapidement : $\varepsilon_6 \simeq 0{,}05$. Cependant si $n = 4k$, en utilisant les expressions pour la forme de Gauss-Bonnet données dans [Th], on obtient de meilleures valeurs pour ε_{4k} (par exemple $\varepsilon_8 \simeq 1/2$) mais qui tendent quand même vers 0 à l'infini.

III. Démonstration de la proposition 3

Supposons que (M, g) est d'Einstein et considérons une variation (g_t) de métriques; on notera dV^t la forme volume de g_t, et $\mathrm{Vol}^t = \mathrm{Vol}(M, g_t)$.

Les dV^t étant de degré maximal sont liées point par point donc il existe des fonctions $f^t : M \times [0,1[\to \mathbb{R}$ telles qu'en tout point p de M,

$$dV^t = f^t(p)\, dV^0$$

Nous allons maintenant normaliser les g_t : posons pour tout t

$$\tilde{g}_t = \frac{1}{(\mathrm{Vol}^t)^{2/n}} g_t$$

où n désigne la dimension de M.

Les $\tilde{g}_t$ étant toutes de volume 1, nous pouvons appliquer le résultat de [Hi] qui nous dit que les métriques d'Einstein sont les points critiques de la fonctionnelle

$$g \mapsto \int_M \tau_g \, dV$$

où g parcourt l'espace des métriques riemanniennes de volume 1. Et donc, si on définit la fonction réelle φ par

$$\varphi(t)=\int_M \tilde{\tau}^t\, d\tilde{V}^t=(V^t)^{n/2}\int_M \tau^t f^t\, dV^\circ$$

on a

$$\varphi'(0)=0 \tag{2}$$

($\tilde{\tau}^t$ désigne bien sûr la courbure scalaire de $\tilde{g}_t$ et $d\tilde{V}^t$ son élément de volume). Les fonctions intervenant dans la définition de φ sont C^∞ donc on peut dériver sous le signe somme et (2) s'écrit :

$$\frac{2}{n}\tau^\circ\left(\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}^t\bigg|_{t=0}\right)=-\int_M\left(\frac{d\tau^t}{dt}\bigg|_{t=0}\right)dV^\circ. \tag{3}$$

Ceci démontre (ii), (iii) et un sens de (i); et l'autre sens de (i) est alors immédiat en remontant les calculs.

C.Q.F.D.

Remarque. — Lionel Bérard Bergery me fait remarquer qu'on peut démontrer l'égalité (3) en utilisant la variation première du volume et de la courbure scalaire (*cf.* [Bes], proposition 1.188).

BIBLIOGRAPHIE

[Be] Berger (M.). — Sur quelques variétés riemanniennes suffisamment pincées, *Bull. Soc. math. France*, vol. 88, 1960, p. 57-71.

[Bo] Bourguignon (J.-P.). — Une stratification de l'espace des métriques riemanniennes, *Composition math.*, vol. 30, 1975, p. 1-41.

[Bes] Séminaire Arthur Besse. — *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, 1986.

[Ch-E] Cheeger (J.) and Ebin (D. G.). — Comparison theorems in Riemannian geometry, North-Holland mathematical Library, vol. 9.

[Ch] Chern (S. S.). — On curvature and characteristic classes of a Riemannian manifold, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, vol. 20, 1956, p. 117-126.

[Ch-G] Cheeger (J.) and Gromov (M.). — On the characteristic numbers of complete manifolds of bounded curvature and finite volume, *Differential Geometry and Analysis*, ed. by Chavel and Farkas, Springer, 1985, p. 115-154.

[Gr] Gromov (M.). — Volume and bounded cohomology, *Publications mathématiques de l'I.H.E.S.*, n° 56, 1983, p. 213-307.

[Gü] Günther (P.). — Uber das Volumenelement eines Riemannschen Raumes *Publ. Math. Debrecen.*, Vol. 7, 1960, p. 78-93.

[Hi] Hilbert (D.). — Die Grundlagen des Physik, *Nachr. Ges. Wiss. Gött*, 1915, p. 395-407.

[Sp] Spivak (M.). A comprehensive introduction to differential Geometry, t. 5, Publish or Perish, 1975.

[Th] Thorpe (J. A.). — Some remarks on the Gauss-Bonnet integral, *Jour. Math. Mec.*, vol. 18, n° 8, 1969, p. 779-786.