A. GUICHARDET

# Méthode des orbites pour les représentations de longueur finie. II

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 115 (1987), p. 197-210
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1987__115__197_0>

*Bull. Soc. math. France,*
115, 1987, p. 197-210.

# MÉTHODE DES ORBITES POUR LES REPRÉSENTATIONS DE LONGUEUR FINIE. II

PAR

A. GUICHARDET (*)

RÉSUMÉ. — Nous démontrons ici, pour les groupes semi-simples, des résultats analogues à ceux d'un article antérieur portant le même titre et consacré aux groupes de déplacements généralisés; plus précisément nous étudions les extensions de représentations unitaires irréductibles des groupes de Lie semi-simples construites par la méthode des orbites de Duflo. Nous étudions aussi les extensions des $(\mathfrak{g}, K)$-modules irréductibles « génériques »; nos démonstrations utilisent un outil d'Algèbre Homologique qui apparaissait déjà dans des travaux antérieurs, et des résultats profonds sur les groupes $\mathrm{Ext}^*_{\mathfrak{g}, K}$ et $\mathrm{Ext}^*_{\mathfrak{n}}$ dus à Hecht et Schmid, Vogan, Zuckerman.

ABSTRACT. — In this paper we prove for semi-simple groups several results very similar to those of a previous paper with the same title concerning generalized motion groups; more precisely we study here the extensions of irreducible unitary representations of semi-simple Lie groups constructed by Duflo's orbit method. We also study the extensions of "generic" irreducible $(\mathfrak{g}, K)$-modules; our proofs use a homological algebra tool which already appeared in our previous papers, and deep results on the $\mathrm{Ext}^*_{\mathfrak{g}, K}$- and $\mathrm{Ext}^*_{\mathfrak{n}}$-groups due to Hecht and Schmid, Vogan, Zuckerman.

## 0. Introduction

Comme son nom l'indique, ce travail fait suite à celui [9] intitulé de la même façon; ce dernier se situait dans le cadre de la méthode des orbites de Duflo appliquée au cas d'un groupe de déplacements généralisé $G$;

(*) Texte reçu le 10 mars 1986

A. GUICHARDET, École Polytechnique, Centre de Mathématiques, 91128 Palaiseau Cedex (France)

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1987/02 197 14/$ 3.40

partant d'un élément suffisamment régulier $f$ de $\mathfrak{g}^*$, on montrait que le foncteur $T^G_{f,.}$ de Duflo se prolonge en une équivalence entre une catégorie de $\widetilde{G(f)}$-modules de longueur finie et une catégorie de $G$-modules $C^\infty$ de longueur finie; la démonstration reposait sur des isomorphismes entre groupes de cohomologie $\mathrm{Ext}^n_{G(f)}$ et $\mathrm{Ext}^n_G$.

Le présent travail est consacré à des résultats analogues dans le cas des groupes semi-simples; indiquons deux différences importantes entre ce cas et le précédent : d'une part on remplace ici les $G$-modules $C^\infty$ par des $(\mathfrak{g}, K)$-modules, et les groupes $\mathrm{Ext}^n_G$ par les groupes $\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g}, K}$; d'autre part on n'utilise ici que des orbites coadjointes qui sont, en un certain sens, très régulières, ce qui fait que les extensions entre $(\mathfrak{g}, K)$-modules distincts sont toujours triviales et que les algèbres de cohomologie $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{g}, K}(\pi, \pi)$ sont toujours des algèbres extérieures — en d'autres termes on est toujours dans la situation du théorème 3 de [9].

En fait les résultats qu'on vient de mentionner sont des conséquences faciles de certains autres, qui se situent dans le cadre de l'« induction parabolique cuspidale » : étant donnés un sous-groupe parabolique cuspidal $P = MAN$ et une « série discrète » $\delta$ de $M$, on montre que l'application qui, à un élément suffisamment régulier $\nu$ de $\mathfrak{a}^*_c$, fait correspondre la « série principale généralisée » $I_{P, \delta, \nu}$, se prolonge en une équivalence entre une catégorie de $\mathfrak{a}$-modules de longueur finie et une catégorie de $(\mathfrak{g}, K)$-modules de longueur finie; on retrouve ainsi un théorème de Delorme [3]; la démonstration, ici encore à bases d'isomorphismes entre groupes $\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{a}}$ et $\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g}, K}$, repose sur des résultats récents de Vogan et Zuckerman sur les groupes $\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g}, K}$, et de Hecht et Schmid sur les groupes d'holomologie $H_q(\mathfrak{n}, I_{P, \delta, \nu})$; en ce qui concerne ces derniers, nous utilisons à plusieurs reprises des formulations dues à Delorme. Je profite de l'occasion pour le remercier pour de nombreuses et utiles conversations, qui m'ont grandement aidé dans la préparation de ce travail.

*N.B.* (ajouté à la demande du referee). Delorme démontre dans [3] un résultat plus général que le nôtre, par une méthode naturellement plus compliquée; il construit d'abord un foncteur inverse qui, dans le cas qui nous intéresse ici, consiste simplement à associer à tout objet $V$ de $\mathrm{Ext}(\mathfrak{g}, K; \{I_{P, \delta, \nu}\})$ le $A$-module $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{m}, K_M)}(E_\delta, H_0(\mathfrak{n}, V)_{\nu+\rho}) \otimes C_{-\rho}$. Notre méthode a (peut-être) l'avantage de souligner l'intérêt du lemme catégoriel qu'elle utilise (proposition 2.1 de [7]).

## 1. Énoncé des résultats dans le cadre de l'induction parabolique cuspidale

On note

– $G$ un groupe de Lie réel semi-simple connexe de centre fini;

– $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie;

– $\theta$ une involution de Cartan de $G$;

– $K$ l'ensemble des points fixes de $\theta$, sous-groupe compact maximal de $G$;

– $H=TA$ un sous-groupe de Cartan $\theta$-invariant;

– $MA=Z_G(A)$;

– $K_M=K\cap M$, sous-groupe compact maximal de $M$;

– $W=N_G(A)/Z_G(A)$ (groupe de Weyl de $A$);

– $P=MAN$ un sous-groupe parabolique cuspidal admettant $MA$ comme facteur de Lévi;

– $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}$ les algèbres de Lie de $P$, $M$, $A$, $N$;

– $\rho$ la demi-somme des racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}$;

– $\delta$ un élément de $\hat{M}_d$ (série discrète de $M$);

– $\nu$ un élément de $\mathfrak{a}_c^*$ (dual complexe de $\mathfrak{a}$);

– $I_{P,\delta,\nu}$ le $(g, K)$-module correspondant (série principale généralisée).

On fait les hypothèses suivantes :

$(H_1)$ le stabilisateur de $(\delta, \nu)$ dans $W$, noté $W_{\delta,\nu}$, est réduit à $\{1\}$;

$(H_2)$ $I_{P,\delta,\nu}$ est simple.

Grâce à $(H_2)$, on peut, sans changer $I_{P,\delta,\nu}$, choisir $P$ de façon que l'on ait

$(H_3)$ $\mathrm{Re}\,\nu\in-\bar{C}_P$ où $C_P$ est la chambre de Weyl ouverte définie par $\mathfrak{n}$.

On note

– $\mathscr{C}_A$ la catégorie des représentations différentiables de $A$ dans des espaces de Fréchet; idem pour $\mathscr{C}_P$, $\mathscr{C}_G$, etc.;

– $E_\pi$ l'espace d'une représentation $\pi$;

– $\mathscr{C}_{\mathfrak{g},K}$ la catégorie des $(\mathfrak{g}, K)$-modules; idem pour $\mathscr{C}_{\mathfrak{p},K_M}$, etc.;

– $\mathrm{Ext}\,(A, \{\nu\})$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}_A$ formée des représentations de longueur finie à sous-quotients simples isomorphes à $\nu$ (on dit aussi « représentations primaires de type $\nu$ »);

– $\mathrm{Ext}\,(\mathfrak{g}, K, \{I_{P,\delta,\nu}\})$ l'analogue dans $\mathscr{C}_{\mathfrak{g},K}$.

On définit un foncteur $T: \mathscr{C}_A \to \mathscr{C}_{\mathfrak{g}, K}$ de la façon suivante : notons $E_\delta$ l'ensemble des vecteurs différentiables de la représentation unitaire $\delta$; soit $\pi$ un objet de $\mathscr{C}_A$; notons

— $E_\delta \hat{\otimes} E_\pi$ le produit tensoriel projectif des espaces considérés;

— $\operatorname{Ind}_P^G(\delta \times e^\rho \pi \times 1)$ l'ensemble des $f \in C^\infty(G, E_\delta \hat{\otimes} E_\pi)$ vérifiant

$$f(gman) = (\delta(m)^{-1} \otimes a^{-\rho}.\pi(a)^{-1}).f(g)$$

avec action de $G$ par translations à gauche. Alors $T(\pi)$ est par définition le $(\mathfrak{g}, K)$-module formé des vecteurs $K$-finis de cette représentation; l'action de $T$ sur les morphismes est la suivante : si $u \in \operatorname{Hom}_A(\pi_1, \pi_2)$, alors

$$T(u)(f)(g) = (\mathrm{id}_\delta \otimes u).f(g).$$

On remarquera que $T(\nu)$ n'est autre que $I_{P, \delta, \nu}$.

Il est immédiat que $T$ est *fortement exact*, i.e. transforme toute suite exacte forte dans $\mathscr{C}_A$ en une suite exacte dans $\mathscr{C}_{\mathfrak{g}, K}$. On peut alors, comme il a été expliqué dans [7], n° 2.3, construire des applications

$$T^n_{\nu, \nu}: \quad \operatorname{Ext}^n_A(\nu, \nu) \to \operatorname{Ext}^n_{\mathfrak{g}, K}(I_{P, \delta, \nu}, I_{P, \delta, \nu}), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

THÉORÈME 1. — (i) *Le foncteur $T$ induit une équivalence de catégories de* $\operatorname{Ext}(A, \{\nu\})$ *sur* $\operatorname{Ext}(\mathfrak{g}, K; \{I_{P, \delta, \nu}\})$.

(ii) *Les applications $T^n_{\nu, \nu}$ sont des isomorphismes.*

*Remarque* 1. — La première assertion a été démontrée par une autre méthode dans [3], théorème 2 (ii).

*Remarque* 2. — Tous les groupes $\operatorname{Ext}^n_{\mathfrak{g}, K}$ sont nuls entre deux modules $I_{P, \delta, \nu}$ non isomorphes, vérifiant les hypothèses $(H_1)$ et $(H_2)$ et, en outre, admettant des caractères infinitésimaux réguliers (*cf.* [11], lemme 9.2.18).

## 2. Énoncé des résultats dans le cadre de la méthode des orbites de Duflo

La méthode en question a été rappelée dans [9]; ajoutons seulement ici que lorsque $G$ est semi-simple, une forme $f$ est bien polarisable si et seulement si elle est régulière et semi-simple, ou encore si et seulement si $G(f)$ est un sous-groupe de Cartan ([5], chapitre 2, lemme 1).

NOTATION. — Si $(E, \pi)$ est une représentation de $G$, on note $(E_{(K)}, \pi_{(K)})$ le $(\mathfrak{g}, K)$-module associé, ensemble des vecteurs $K$-finis de $E$.

On a alors les résultats suivants, analogues à ceux de [9].

THÉORÈME 2. — *Soit $f$ un élément admissible et bien polarisable de* $\mathfrak{g}^*$; *posons* $\mathscr{E}=X^{\mathrm{irr}}(G,f)$ *(rappelons que ses éléments sont de dimension finie) et* $\mathscr{F}=\{(T^G_{f,\tau})_{(K)}\mid\tau\in\mathscr{E}\}$.

(i) *Il existe une sous-catégorie* $\mathscr{C}'_{\widetilde{G(f)}}$ *de* $\mathscr{C}_{\widetilde{G(f)}}$ *ayant les propriétés suivantes :*

— $\mathrm{Ext}(\widetilde{G(f)},\mathscr{E})\subset\mathscr{C}'_{\widetilde{G(f)}}$;

— *pour tout objet E de la sous-catégorie, il existe une résolution forte relativement injective de E dans la grande catégorie, formée d'objets de la sous-catégorie.*

(ii) *Il existe un foncteur* $^\circ T:\mathscr{C}'_{\widetilde{G(f)}}\to\mathscr{C}_{\mathfrak{g},K}$ *ayant les propriétés suivantes :*

— $^\circ T$ *prolonge l'application* $\tau\to(T^G_{f,\tau})_{(K)}$;

— $^\circ T$ *induit une équivalence de catégories de* $\mathrm{Ext}(G(f),\mathscr{E})$ *sur* $\mathrm{Ext}(\mathfrak{g},K;\mathscr{F})$;

— *les applications*

$$^\circ T^n_{\tau_1,\tau_2}:\quad \mathrm{Ext}^n_{\widetilde{G(f)}}(\tau_1,\tau_2)\to\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},K}(^\circ T(\tau_1),{}^\circ T(\tau_2))$$

*définies par* $^\circ T$ *sont bijectives pour tous* $\tau_1,\tau_2\in\mathscr{E}$.

THÉORÈME 3. — (i) *L'ensemble* $\mathscr{E}$ *est fini: notons* $\tau^1,\ldots,\tau^r$ *ses éléments,* $\pi^1,\ldots,\pi^r$ *leurs images par* $^\circ T$.

(ii) *Si* $i\neq j$ *on a*

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},K}(\pi^i,\pi^j)=0\quad\textit{pour tout }n\geqslant 0.$$

(iii) *La catégorie* $\mathrm{Ext}(\mathfrak{g},K;\mathscr{F})$ *est somme directe des catégories*

$$\mathrm{Ext}(\mathfrak{g},K;\{\pi^i\}),\ i=1,\ldots,r.$$

(iv) *Pou tout i, l'algèbre de cohomologie* $\mathrm{Ext}^*_{\mathfrak{g},K}(\pi^i,\pi^i)$ *est isomorphe à l'algèbre extérieure* $\Lambda^*\mathbf{R}^d$ *où d est la dimension d'un voisinage de* $T^G_{f,\tau_i}$ *dans* $\hat{G}_r$ *(dual réduit de G).*

(v) *Pour tout i, la catégorie* $\mathrm{Ext}(\mathfrak{g},K;\{\pi^i\})$ *est équivalente à celle des représentations de dimension finie de* $\mathbf{R}^d$ *dont tous les sous-quotients irréductibles sont triviaux.*

THÉORÈME 4. — *Prenons $f_1$ et $f_2$ comme au théorème 2 et non conjuguées par $G$, et $\tau_i \in X^{\mathrm{irr}}(G, f_i)$; posons $\pi_i = (T^G_{f_i, \tau_i})_{(K)}$. Alors*

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g}, K}(\pi_1, \pi_2) = 0 \quad \textit{pour tout } n \geqslant 0.$$

## 3. Démonstration du théorème 1

D'après [7], proposition 2.1, la première assertion est une conséquence de la seconde; pour démontrer celle-ci, on va construire un isomorphisme

$$\tilde{T}: \quad \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g}, K}(I_{P, \delta, \nu}, I_{P, \delta, \nu}) \to \mathrm{Ext}^n_A(\nu, \nu)$$

et montrer que $\tilde{T} \circ T^n_{\nu, \nu}$ est l'identité. Remarquons d'abord que $T$ est composé de deux foncteurs $T' : \mathscr{C}_A \to \mathscr{C}_P$ et $T'' : \mathscr{C}_P \to \mathscr{C}_{\mathfrak{g}, K}$ où

$$T'(\pi) = \delta \times e^\rho \pi \times 1 \quad \text{pour tout } \pi \in \mathscr{C}_A$$

$$T''(\sigma) = (\mathrm{Ind}^G_P \sigma)_{(K)} \quad \text{pour tout } \sigma \in \mathscr{C}_P;$$

donc ([7], n° 2.3, propriété (vi))

$$T^n_{\nu, \nu} = T''^n_{T'(\nu), T'(\nu)} \circ T'^n_{\nu, \nu},$$

relation que nous écrirons plus brièvement

$$T^n = T''^n \circ T'^n.$$

Ensuite $T$ sera défini comme composé de trois isomorphismes

$$T''': \quad \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g}, K}(I_{P, \delta, \nu}, I_{P, \delta, \nu}) \to \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{p}, K_M}(I_{P, \delta, \nu}, \delta \times (\nu + \rho) \times 1)$$

$$T^{\mathrm{iv}}: \quad \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{p}, K_M}(I_{P, \delta, \nu}, \delta \times (\nu + \rho) \times 1)$$
$$\to \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{m} + \mathfrak{a}, K_M}(H_0(\mathfrak{n}, I_{P, \delta, \nu}), \delta \times (\nu + \rho))$$

$$T^{\mathrm{v}}: \quad \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{m} + \mathfrak{a}, K_M}(H_0(\mathfrak{n}, I_{P, \delta, \nu}), \delta \times (\nu + \rho)) \to \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{a}}(\nu, \nu).$$

On va maintenant construire ces trois isomorphismes, après quoi on montrera que

$$T^{v} \circ T^{iv} \circ T''' \circ T'' \circ T' = \mathrm{id}.$$

NOTATIONS

Nous identifierons $\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g}, K}(.,.)$ à $H^n(\mathfrak{g}, K; \mathrm{Hom}(.,.))$, et de même pour les autres groupes. Pour tout $\mathfrak{a}$-module $E$ et toute forme linéaire complexe $\mu$ sur $\mathfrak{a}$, nous noterons $E_\mu$ le plus grand sous-espace de $E$ sur lequel $X-\mu(X)$ opère de façon nilpotente pour tout $X \in \mathfrak{a}$ (sous-espace propre généralisé de poids $\mu$).

CONSTRUCTION DE $T'''$

On définit $T'''$ comme étant l'isomorphisme de Shapiro, qu'on peut expliciter comme suit (*cf.* [1], III.2.5) : notons $\Lambda$ le $(\mathfrak{p}, K_M)$-morphisme canonique de $I_{P,\delta,\nu}$ vers $\delta \times (\nu+\rho) \times 1$, qui associe à tout $f \in I_{P,\delta,\nu}$ l'élément $f(1)$; alors, pour tout cocycle $\varphi \in Z^n(\mathfrak{g}, K; \mathrm{Hom}(I_{P,\delta,\nu}, I_{P,\delta,\nu}))$, $T'''(\varphi)$ est défini par

$$T'''(\varphi)(X_1, \ldots, X_n) = \Lambda \circ \varphi(X_1, \ldots, X_n), \qquad \forall X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{p}.$$

CONSTRUCTION DE $T^{iv}$

Il existe une suite spectrale (de Hochschild-Serre, *cf.* [1], I.6.5) vérifiant

(1) $$E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{m}+\mathfrak{a}, K_M; H^q(\mathfrak{n}, \mathrm{Hom}(I_{P,\delta,\nu}, \delta \times (\nu+\rho) \times 1)))$$

et convergeant vers $H^*(\mathfrak{p}, K_M; \mathrm{Hom}(I_{P,\delta,\nu}, \delta \times (\nu+\rho) \times 1))$; comme $\mathfrak{n}$ opère trivialement sur $\delta \times (\nu+\rho) \times 1$, l'examen des complexes standard calculant l'homologie et la cohomologie de $\mathfrak{n}$ montre immédiatement que l'on a des égalités de $(\mathfrak{m}+\mathfrak{a}, K_M)$-modules :

(2) $$H^q(\mathfrak{n}, \mathrm{Hom}(I_{P,\delta,\nu}, \delta \times (\nu+\rho) \times 1)) = \mathrm{Hom}(H_q(\mathfrak{n}, I_{P,\delta,\nu}), \delta \times (\nu+\rho)).$$

LEMME 1. — (i) *Pour tout $q \geq 0$ le $\mathfrak{a}$-module $H_q(\mathfrak{n}, I_{P,\delta,\nu})$ est somme directe finie de sous-espaces propres généralisés $H_q(\mathfrak{n}, I_{P,\delta,\nu})_{\mu+\rho}$ où $\mu$ parcourt $\mathfrak{a}_c^*$; ces sous-espaces sont évidemment des $(\mathfrak{m}, K_M)$-modules.*

(ii) *On a $H_q(\mathfrak{n}, I_{P,\delta,\nu})_{\nu+\rho} = 0$ pour tout $q > 0$.*

(iii) *Le* $(\mathfrak{m}, K_M)$*-module* $H_0(\mathfrak{n}, I_{P,\delta,\nu})_{\nu+\rho}$ *est la somme directe des* $w.\delta$ *où* $w$ *parcourt* $W_\nu$, *stabilisateur de* $\nu$ *dans* $W$; *en outre* $\delta$ *y intervient une seule fois, dans un sous-module que nous noterons* $H_0(\mathfrak{n}, I_{P,\delta,\nu})_{\delta,\nu+\rho}$.

(iv) *Le* $(\mathfrak{m}+\mathfrak{a}, K_M)$*-module* $H_0(\mathfrak{n}, I_{P,\delta,\nu})_{\delta,\nu+\rho}$ *est isomorphe à* $\delta\times(\nu+\rho)$.

*Démonstration.* — (i) Résulte de [10], formule (2.29).

(ii) Résulte de [2], p. 139, lignes 12 et 13, avec $V_i = I_{P,\delta,\nu}$ puisque ce dernier a été supposé simple.

(iii) Résulte de [2], proposition 6 (i), et du fait que $W_{\delta,\nu}$ a été supposé trivial.

(iv) L'action de $\mathfrak{a}$ dans le module considéré commute à la représentation irréductible $\delta$, donc est un caractère, nécessairement égal à $\nu+\rho$.

LEMME 2. — *On a*

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} H^p(\mathfrak{m}+\mathfrak{a}, K_M; \operatorname{Hom}(H_0(\mathfrak{n}, I_{P,\delta,\nu})_{\nu+\rho}, \delta\times(\nu+\rho))) & si \quad q=0 \\ 0 \quad si \quad q>0. \end{cases}$$

*Démonstration.* — D'après (1), (2) et le lemme 1 (i), on a

$$(3) \qquad E_2^{p,q} = \oplus_{\mu\in\mathfrak{a}_c^*} H^p(\mathfrak{m}+\mathfrak{a}, K_M; \operatorname{Hom}(H_q(\mathfrak{n}, I_{P,\delta,\nu})_{\mu+\rho}, \delta\times(\nu+\rho)))$$

(somme directe finie); pour tout $\mu\neq\nu$, la cohomologie de $\mathfrak{a}$ dans le module $\operatorname{Hom}(H_q(\mathfrak{n}, I_{P,\delta,\nu})_{\mu+\rho}, \delta\times(\nu+\rho))$ est nulle, donc aussi le terme correspondant dans (3). Si $\mu=\nu$, il l'est encore, pour $q>0$, d'après le lemme 1 (ii).

FIN DE LA CONSTRUCTION DE $T^{\prime\prime}$

Comme $E_2^{p,q}$ est nul pour tout $q>0$, l'application « inflation »

$$E_2^{n,0} \to H^n(\mathfrak{p}, K_M; \operatorname{Hom}(I_{P,\delta,\nu}, \delta\times(\nu+\rho)\times 1))$$

est un isomorphisme; on définit $T^{\prime\prime}$ comme inverse de cet isomorphisme, en utilisant (2) avec $q=0$. Notons en particulier que si un cocycle

$$\varphi\in Z^n(\mathfrak{p}, K_M; \operatorname{Hom}(\operatorname{Ext}^n_{\mathfrak{g},K}, \delta\times(\nu+\rho)\times 1))$$

est nul dès que l'une des variables appartient à $\mathfrak{n}$, alors

$$(4) \qquad T^{\prime\prime}(\varphi) = \varphi\,|_{\Lambda^n(\mathfrak{m}+\mathfrak{a})}.$$

CONSTRUCTION DE $T'$

D'après le lemme 1 et la démonstration du lemme 2, on a

$$(5) \quad H^n(\mathfrak{m}+\mathfrak{a}, K_M; \operatorname{Hom}(H_0(\mathfrak{n}, I_{P,\delta,\nu}), \delta\times(\nu+\rho)))$$

$$= H^n(\mathfrak{m}+\mathfrak{a},\ K_M;\ \mathrm{Hom}(H_0(\mathfrak{n},\ I_{P,\delta,\nu})_{\nu+\rho},\ \delta\times(\nu+\rho)))$$

$$= \oplus_{w\in W_\nu} H^n(\mathfrak{m}+\mathfrak{a},\ K_M;\ \mathrm{Hom}(H_0(\mathfrak{n},\ I_{P,\delta,\nu})_{w.\delta,\nu+\rho},\ \delta\times(\nu+\rho)));$$

un résultat non publié de Zuckerman affirme que tous les $\mathrm{Ext}^n$, $n>0$, entre séries discrètes sont nuls; donc (5) est encore égal à

$$H^n(\mathfrak{a},\ \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{m},\,K_M)}(H_0(\mathfrak{n},\ I_{P,\delta,\nu})_{\delta,\nu+\rho},\ \delta\times(\nu+\rho))),$$

c'est-à-dire encore, en vertu du lemme 1, à

$$H^n(\mathfrak{a},\ \mathrm{id}_\delta\times\mathrm{Hom}(\nu+\rho,\ \nu+\rho))\sim H^n(\mathfrak{a},\ \mathrm{Hom}(\nu,\ \nu)).$$

En conclusion, on peut définir $T^\nu$ en restreignant les cocycles, d'une part de $\Lambda^n(\mathfrak{m}+\mathfrak{a})$ à $\Lambda^n\mathfrak{a}$, d'autre part de $H_0(\mathfrak{n},\ I_{P,\delta,\nu})$ à son sous-espace

$$H_0(\mathfrak{n},\ I_{P,\delta,\nu})_{\delta,\nu+\rho}\sim\delta\times(\nu+\rho).$$

FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Partons d'un élément $\varphi$ de $\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{a}}(\nu,\nu)$, identifié à $\Lambda^n\mathfrak{a}^*$; l'élément

$$\varphi'=T'^n(\varphi)\in Z^n(\mathfrak{p},\ K_M;\ \mathrm{Hom}(\delta\times(\nu+\rho)\times 1,\ \delta\times(\nu+\rho)\times 1))$$

est donné par

$$(6)\qquad \varphi'(X_1+Y_1+Z_1,\ \ldots,\ X_n+Y_n+Z_n)=\varphi(Y_1,\ \ldots,\ Y_n).\mathrm{id}_\delta$$

pour tous $X_i\in\mathfrak{m}$, $Y_i\in\mathfrak{a}$, $Z_i\in\mathfrak{n}$.

On va maintenant déterminer l'élément

$$\varphi'''=T''(T'''^n(\varphi'))\in Z^n(\mathfrak{p},\ K_M;\ \mathrm{Hom}(I_{P,\delta,\nu},\ \delta\times(\nu+\rho)\times 1));$$

pour cela on utilisera le

LEMME 3. — *Pour tout* $\psi\in Z^n(\mathfrak{p},\ K_M;\ \mathrm{Hom}\ (\delta\times(\nu+\rho)\times 1,\ \delta\times(\nu+\rho)\times 1))$, *l'image* $\omega$ *de* $\psi$ *par* $T''\circ T'''^n$ *est donnée par*

$$\omega(U_1,\ \ldots,\ U_n)=\psi(U_1,\ \ldots,\ U_n)\circ\Lambda,\qquad \forall\, U_1,\ \ldots,\ U_n\in\mathfrak{p}$$

(*rappelons que* $\Lambda$ *a été défini en même temps que* $T''$).

Ce lemme résulte, via l'isomorphisme de van Est, du suivant, qui est une simple reformulation du lemme 2.3 de [7] :

LEMME 4. — *Notons $G$ un groupe de Lie; $H$ un sous-groupe fermé; $T$ le foncteur « induction $C^\infty$ » : $\mathscr{C}_H \to \mathscr{C}_G$; $A$ et $B$ deux objets de $\mathscr{C}_H$; $T^n_{A,B}$: $\mathrm{Ext}^n_H(A, B) \to \mathrm{Ext}^n_G(\mathrm{Ind}\, A, \mathrm{Ind}\, B)$ les applications associées canoniquement à $T$; $\Lambda$ le $H$-morphisme canonique de $\mathrm{Ind}\, A$ vers $A$ : $\Lambda(f) = f(1)$; enfin $S$ l'isomorphisme de Shapiro $\mathrm{Ext}^n_G(\mathrm{Ind}\, A, \mathrm{Ind}\, B) \to \mathrm{Ext}^n_H(\mathrm{Ind}\, A, B)$. Alors $S \circ T^n_{A,B}$ s'obtient en associant à tout cocycle $\psi \in Z^n(H, \mathrm{Hom}(A, B))$ le cocycle $(h_1, \ldots, h_n) \mapsto \psi(h_1, \ldots, h_n) \circ \Lambda$.*

Ceci étant, (6) montre que $\varphi'''$ est donné par

$$\varphi'''(X_1 + Y_1 + Z_1, \ldots, X_n + Y_n + Z_n) = \varphi(Y_1, \ldots, Y_n).\mathrm{id}_\delta \circ \Lambda.$$

Ensuite (4) montre que $\varphi^{iv} = T^{iv}(\varphi''')$ est donné par

$$\varphi^{iv}(X_1 + Y_1, \ldots, X_n + Y_n) = \varphi(Y_1, \ldots, Y_n).\mathrm{id}_\delta \circ \tilde{\Lambda}$$

où $\tilde{\Lambda}$ est l'application rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
I_{P,\delta,\nu} \arrow[dr, "\Lambda"] \arrow[dd] & \\
& \delta \times (\nu + \rho) \times 1 \\
H_0(\mathfrak{n}, I_{P,\delta,\nu}) \arrow[ur, "\tilde{\Lambda}"'] &
\end{tikzcd}$$

Enfin, d'après la construction ci-dessus de $T^v$, $\varphi^v = T^v(\varphi^{iv})$ est donné par

$$\begin{aligned}\varphi^v(Y_1, \ldots, Y_n) &= \varphi^{iv}(Y_1, \ldots, Y_n)|_F \\ &= \varphi(Y_1, \ldots, Y_n).\mathrm{id}_\delta \circ \tilde{\Lambda}|_F\end{aligned}$$

où $F = H_0(\mathfrak{n}, I_{P,\delta,\nu})_{\delta,\nu+\rho}$; comme $\tilde{\Lambda}$ est un $(\mathfrak{m} + \mathfrak{a}, K_M)$-morphisme surjectif, il est nul en dehors de $F$ et bijectif de $F$ vers $\delta \times (\nu + \rho)$; on peut donc écrire

$$\varphi^v(Y_1, \ldots, Y_n) = \varphi(Y_1, \ldots, Y_n),$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1.

## 4. Démonstration des théorèmes 2, 3, 4

RELATIONS ENTRE LES REPRÉSENTATIONS $T^G_{f,\tau}$ ET $I_{P,\delta,\nu}$

Le sous-groupe $G(f)$, étant un sous-groupe de Cartan, peut s'écrire $H=TA$ avec $T=H\cap K$, $A$ sous-groupe vectoriel; définissons $M$ et $W$ comme au paragraphe 1; posons

$$f'=f|_{\mathfrak{m}}, \qquad \nu=if|_{\mathfrak{a}};$$

on a alors $T=M(f')$, sous-groupe de Cartan compact de $M$.

LEMME 5. — *On a $G(f)=\tilde{T}A$ (produit direct) où $\tilde{T}$ désigne le revêtement métaplectique de $M(f')$ associé à l'action de $M(f')$ dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}(f')$.*

Démonstration analogue à celle du lemme 8(i) de [9] en y remplaçant les décompositions

$$\mathfrak{g}=B\oplus\mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{g}(f)=N\oplus\mathfrak{s}(\omega)$$

par les suivantes :

$$\mathfrak{g}=(\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{n})\oplus(\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{n}^-), \qquad \mathfrak{g}(f)=\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{t}.$$

Ceci étant, tout élément $\tau$ de $X^{irr}(G,f)$ s'écrit $\tau=\tau'\times e^{\nu}$ où $\tau'\in X^{irr}(M,f')$; posons $\delta=T^M_{f',\tau'}$.

LEMME 6. — *On a $\delta\in\hat{M}_d$ et $I_{P,\delta,\nu}\sim(T^G_{f,\tau})_{(K)}$.*

*Démonstration.* — Cela résulte de [5], ch. 3, lemme 10 (communication orale de M. Duflo).

LEMME 7. — *Le groupe $W'_{\delta,\nu}$ est trivial.*

*Démonstration.* — Soit $s$ un élément de $N_G(A)$ stabilisant simultanément $\delta$ et $\nu$; montrons que $s\in Z_G(A)$. Il résulte de [5] que l'on a

$$s.\delta=T^M_{s.f',s.\tau'}$$

d'où

$$T^M_{f',\tau'}=T^M_{s.f',s.\tau'};$$

toujours d'après [5] il existe $x\in M$ tel que $s.f'=x.f'$ et $s.\tau'=x.\tau'$; alors, posant $y=x^{-1}s$, on a $y\in N_G(A)$, $y.f'=f'$, $y.\nu=x^{-1}.\nu=\nu$ car $x$ centralise

$\mathfrak{a}$; on voit que $f$ et $y.f$ ont même restriction à $\mathfrak{m}+\mathfrak{a}$, donc à $\mathfrak{h}$; notant $\mathfrak{h}_c$ et $\mathfrak{g}_c$ les complexifiées de $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_c^\alpha$ les sous-espaces radiciels, il est facile de voir que $f$ et $y.f$ sont nulles sur les $\mathfrak{g}_c^\alpha$. Finalement on obtient $y.f=f$, d'où $y\in G(f)\subset Z_G(A)$.

NOTATIONS

La donnée de $f$ entraîne celles de $\nu$, de $f'$ et d'un caractère $\eta$ de $\tilde{T}_0$; $X^{irr}(M, f')$ est l'ensemble des représentations irréductibles de $\tilde{T}$ dont les restrictions à $\tilde{T}_0$ sont des multiples de $\eta$; comme $\tilde{T}/\tilde{T}_0$ est fini, $X^{irr}(M, f')$ est fini; on notera $\tau'^1, \ldots, \tau'^r$ ses éléments; alors $\mathscr{E}=X^{irr}(G, f)$ est l'ensemble des représentations $\tau^i=\tau'^i\times e^\nu$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

On prend pour $\mathscr{C}'_{\widetilde{G(f)}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}_{\widetilde{G(f)}}$ formée des représentations dont les restrictions à $\tilde{T}_0$ sont des multiples de $\eta$; les assertions de la partie (i) du théorème 2 sont vérifiées, la première parce que $\tilde{T}_0$ est compact, la seconde en vertu de [9], lemme 1.

Notons $\mathscr{C}'^i_{\widetilde{G(f)}}$, $i=1, \ldots, r$, la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}'_{\widetilde{G(f)}}$ formée des représentations dont les restrictions à $\tilde{T}$ sont des multiples de $\tau'^i$; comme $\tilde{T}$ est compact, $\mathscr{C}'_{\widetilde{G(f)}}$ est la somme directe des catégories $\mathscr{C}'^i_{\widetilde{G(f)}}$. Pour tout $i$ on définit un foncteur ${}^1T^i:\mathscr{C}'^i_{\widetilde{G(f)}}\to\mathscr{C}_A$ de la façon suivante : pour tout $\tau\in\mathscr{C}'^i_{\widetilde{G(f)}}$ on peut écrire

$$\tau|_{\tilde{T}}=\tau'^i\otimes I$$

donc

$$\tau|_A=I\otimes\pi^i$$

avec $\pi^i\in\mathscr{C}_A$; on pose alors ${}^1T^i(\tau)=\pi^i$.
Ensuite, posant $\delta^i=T^M_{f',\tau'^i}\in\hat{M}_\#$, on définit comme au paragraphe 1 un foncteur $\mathscr{C}_A\to\mathscr{C}_{\theta,K}$, que lon notera ici $T^i$ au lieu de $T$; enfin on définit le foncteur $T$ du théorème 2 par

$$T(\tau)=\oplus_{i=1}^r T^i({}^1T^i(\tau_i))$$

si $\tau=\oplus\tau_i\in\mathscr{C}'_{\widetilde{G(f)}}$

DÉMONSTRATION DE LA PARTIE (ii) DU THÉORÈME 2

*Première assertion* : si $\tau \in \mathscr{E} = X^{\mathrm{irr}}(G, f)$, $\tau$ s'écrit $\tau'^{i} \times e^{\vee}$ pour un $i = 1, \ldots, r$; on a alors $\tau_i = \tau$, $\tau_j = 0$ pour $j \neq i$,

$$^{1}T^{i}(\tau_i) = e^{\vee}$$

$$^{\circ}T(\tau) = T^{i}(e^{\vee}) = I_{P, \mathfrak{s}^{i}, \vee} = (T^{G}_{f, \tau})_{(K)}$$

(d'après le lemme 6).

*Troisième assertion* : remarquons d'abord que si $\tau_1$ et $\tau_2$ sont deux éléments distincts de $X^{\mathrm{irr}}(G, f)$, on a

(7) $$\mathrm{Ext}^{n}_{\widetilde{G(f)}}(\tau_1, \tau_2) = 0 = \mathrm{Ext}^{n}_{\mathfrak{g}, K}(^{\circ}T(\tau_1), {}^{\circ}T(\tau_2)), \qquad \forall n \geqslant 0;$$

en effet la première relation résulte du fait que $\tilde{T}$ est compact; la seconde résulte de la remarque 2, qui s'applique ici parce que les représentations $T^{G}_{f, \tau}$ construites par DUFLO ont des caractères infinitésimaux réguliers ([5], §3.1). Supposons maintenant $\tau_1 = \tau_2 = \tau^{i}$, l'assertion est trivialement vraie pour le foncteur $^{1}T^{i}$; elle est vraie pour $T^{i}$ d'après le théorème 1, donc pour $^{\circ}T$ par composition.

*Deuxième assertion* : résulte de la troisième et de [7], proposition 2.3.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3

Les assertions (i) et (ii) ont déjà été démontrées; (iii) résulte de (ii); pour démontrer (iv) et (v), il suffit de vérifier que $T^{G}_{f, \tau^{i}}$ admet un voisinage dans $\hat{G}_r$ homéomorphe à $\mathbb{R}^{\dim \mathfrak{a}}$ — ce qui résulte de [4], théorème 2.6.

Enfin le *théorème* 4 résulte de la remarque 2, comme pour la seconde relation (7).

## BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (A.) and WALLACH (N.). — Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups, *Ann. Math. Studies*, n° 94, 1980.

[2] DELORME (P.). — Homomorphismes de Harish-Chandra liés aux *K*-types minimaux des séries principales des groupes de Lie réductifs connexes, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 17, 1984, p. 117-189.

[3] DELORME (P.). — Self-extensions de modules de Harish-Chandra et une question de I. M. Gelfand, *Astérisque*, n° 124/125, 1985, p. 31-48.

[4] DELORME (P.). — Formules limites et formules asymptotiques pour les multiplicités dans $L^2(G/\Gamma)$, à paraître au *Duke Math. J.*

[5] DUFLO (M.). — Constructions de représentations unitaires d'un groupe de Lie, *Cours au C.I.M.E.*, 1980.

[6] GUICHARDET (A.). — Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie, CEDIC-Nathan, 1980.

[7] GUICHARDET (A.). — Représentations de longueur finie des groupes de Lie inhomogènes, *Astérisque*, n° 124/125, 1985, p. 213-252.

[8] GUICHARDET (A.). — Théorie de Mackey et méthode des orbites selon M. Duflo, *Expos. Math.*, t. 3, 1985, p. 303-346.

[9] GUICHARDET (A.). — Méthode des orbites pour les représentations de longueur finie. *Invent. Math.*, t. 85, 1986, p. 199-215.

[10] HECHT (H.) and SCHMID (W.). — Characters, asymptotics and n-homology of Harish-Chandra modules, *Acta Math.*, t. 151, 1983, p. 49-151.

[11] VOGAN (D.). — Representations of real reductive Lie groups, Birkhäuser, 1981.