BULLETIN DE LA S. M. F.

RACHIDA ABOUGHAZI

Produit tensoriel du groupe d'Heisenberg

Bulletin de la S. M. F., tome 115 (1987), p. 95-106
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1987__115__95_0>

Bull. Soc. math. France,
115, 1987, p. 95-106.

PRODUIT TENSORIEL DU GROUPE D'HEISENBERG

PAR

RACHIDA ABOUGHAZI (*)

RÉSUMÉ. — Toute extension centrale de groupes $1 \to A \to E \to G \to 1$ donne naissance à une suite exacte courte $(A \otimes E) \times (E \otimes A) \to E \otimes E \to G \otimes G \to 1$. On utilise ce résultat pour déterminer le produit tensoriel non abélien du groupe d'Heisenberg avec lui même $H \otimes H$, d'où l'on calcule le groupe d'homotopie $\pi_3(SK(H, 1))$. On déduit aussi, un nouveau calcul du produit tensoriel du groupe diédral avec lui même (étudié dans [3]) à partir du produit tensoriel du groupe des quaternions avec lui-même.

ABSTRACT. — Every central extension of groups $1 \to A \to E \to G \to 1$ gives rise to a short exact sequence $(A \otimes E) \times (E \otimes A) \to E \otimes E \to G \otimes G \to 1$. This result is applied to determine the non abelian tensor product $H \otimes H$ of the Heisenberg group with itself from which we calculate the homotopy group $\pi_3(SK(H, 1))$. A new computation of the tensor product of the dihedral group with itself (studied in [3]) is deduced from the tensor product of the quaternionic group with itself.

Le produit tensoriel de groupes non abéliens a été introduit par R. BROWN et J.-L. LODAY dans [1] et [2].

Dans ce papier, on démontre que, pour toute extension centrale de groupes

$$1 \to A \to E \xrightarrow{\vee} G \to 1$$

il existe une suite exacte de groupes

$$(A \otimes E) \times (E \otimes A) \xrightarrow{\mu} E \otimes E \xrightarrow{\mu'} G \otimes G \to 1$$

μ et μ' étant convenablement définis.

(*) Texte reçu le 30 décembre 1985, Révisé le 3 juillet 1986.

R. ABOUGHAZI, Université Louis-Pasteur, I.R.M.A., 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg Cedex (France).

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1987/01 95 12/$3.20

On utilise ce résultat pour calculer le produit tensoriel du groupe d'Heisenberg avec lui même, ainsi que le produit tensoriel du groupe diédral, étudié dans [3], que l'on déduit à partir du produit tensoriel du groupe des quaternions. Je remercie mon directeur de recherches Monsieur J.-L. Loday, le Professeur R. Brown ainsi que le referee, pour leur conseils et leurs commentaires.

1. Produit tensoriel non abélien et extensions centrales de groupes

Dans tout ce qui suit, l'action d'un groupe sur lui même est la conjugaison.

DÉFINITION 1. — *Soient M et N deux groupes munis d'une action de M sur N notée ${}^{m}n$, $m \in M$, $n \in N$ et d'une action de N sur M notée ${}^{n}m$. On suppose ces actions compatibles, c'est-à-dire que pour tout m, $m' \in M$ et n, $n' \in N$ on a*

$$ {}^{({}^{m}n)}m' = {}^{m(n(m^{-1}}m'))} \qquad \text{et} \qquad {}^{({}^{n}m)}n' = {}^{n(m(n^{-1}}n'))}. $$

Le produit tensoriel non abélien $M \otimes N$ de M et de N est le groupe engendré par les symboles $m \otimes n$ avec les relations

(a) $mm' \otimes n = ({}^{m}m' \otimes {}^{m}n)(m \otimes n)$,

(a') $m \otimes nn' = (m \otimes n)({}^{n}m \otimes {}^{n}n')$

pour m, $m' \in M$, n, $n' \in N$ et $p \in M * N$ produit libre de M et de N. La compatibilité des actions permet de définir une action de $M * N$ sur $M \otimes N$ par

$$ {}^{p}(m \otimes n) = {}^{p}m \otimes {}^{p}n $$

pour $m \in M$, $n \in N$ et $p \in M * N$.

LEMME 1. — *Soit*

$$ 1 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\nu} G \to 1 $$

une extension centrale de groupes, alors on a une suite exacte

$$ (*) \qquad (A \otimes E) \times (E \otimes A) \xrightarrow{\mu} E \otimes E \xrightarrow{\mu'} G \otimes G \to 1 $$

où les actions de A sur E et de E sur A sont triviales et

$$\mu(a \otimes e, e' \otimes a') = (i(a) \otimes e)(e' \otimes i(a'))$$

$$\mu'(e \otimes e') = \nu(e) \otimes \nu(e') \qquad \textit{pour} \quad a, a' \in A \quad \textit{et} \quad e, e' \in E.$$

De plus $\mu((A \otimes E) \times (E \otimes A))$ *est dans le centre de* $E \otimes E$.

Démonstration. — Nous remarquons tout d'abord que :

— Toutes les actions sont compatibles.

— Si E^{ab} désigne l'abélianisé de E alors,

$$A \otimes E = A \otimes_{\mathbf{Z}} E^{ab} \qquad \text{et} \qquad E \otimes A = E^{ab} \otimes_{\mathbf{Z}} A$$

car les actions de E sur A et de A sur E sont triviales (*cf.* [2]). Donc $(A \otimes E) \times (E \otimes A)$ est abélien.

— L'action du produit libre $E * A$ sur $(A \otimes E) \times (E \otimes A)$ est triviale.

— Le groupe $\mu(A \otimes E)$ est dans le centre de $E \otimes E$ car :

$$(i(a) \otimes e)(e' \otimes e'') = {}^{[a, e]}(e' \otimes e'')(i(a) \otimes e) \qquad \text{(d'après [2])}$$
$$= (e' \otimes e'')(i(a) \otimes e) \qquad \text{(car } [a, e] = 1)$$

pour $a \in A$, $e, e', e'' \in E$.

De même, $\mu(E \otimes A)$ est dans le centre de $E \otimes E$. Il s'en suit que $\mu((A \otimes E) \times (E \otimes A))$ est dans le centre de $E \otimes E$ et que μ définit un homomorphisme de groupes.

Montrons que μ' est un homomorphisme de groupes : si $e, e', e'' \in E$ alors

$$\begin{aligned} \mu'(ee'' \otimes e') &= \nu(e)\nu(e'') \otimes \nu(e') \\ &= ({}^{\nu(e)}\nu(e'') \otimes {}^{\nu(e)}\nu(e'))(\nu(e) \otimes \nu(e')) \\ &= (\nu({}^{e}e'') \otimes \nu({}^{e}e'))(\nu(e) \otimes \nu(e')) \quad \text{car } {}^{\nu(e)}(\nu(e')) = \nu({}^{e}e') \\ &= \mu'[({}^{e}e'' \otimes {}^{e}e')(e \otimes e')]. \end{aligned}$$

De la même façon on montre que

$$(\mu'(e \otimes e' e'') = \mu'((e \otimes e')({}^{e'}e \otimes {}^{e'}e'')).$$

L'exactitude de la suite $(*)$ en $G \otimes G$ est immédiate, puisque ν est surjective.

Exactitude de la suite $(*)$, en $E \otimes E$: il est clair que $\mu((A \otimes E) \times (E \otimes A))$ est dans le noyau de μ' et que c'est un sous groupe normal de $E \otimes E$ (car il est dans le centre de $E \otimes E$), par suite le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \otimes E \arrow[rr, "\mu'"] \arrow[dr, "p"'] & & G \otimes G \\ & E \otimes E/\mu((A \otimes E) \times (E \otimes A)) \arrow[ur, "\mu''"'] & \end{tikzcd}$$

où $\mu'' \circ p = \mu'$ et p la projection canonique, est commutatif. On construit alors, la réciproque de μ'' de la manière suivante :

On définit

$$\Psi : \quad G \otimes G \to E \otimes E/\mu[(A \otimes E) \times (E \otimes A)]$$

par

$$\Psi(g \otimes g') = p(s(g) \otimes s(g'))$$

où $g, g' \in G$, $s(g)$ et $s(g') \in E$ tels que $\nu(s(g)) = g$ et $\nu(s(g')) = g'$. Montrons que $\Psi(g \otimes g')$ ne dépend pas du relèvement choisi. Si $s'(g)$ est un autre relèvement de g dans E, alors $s'(g) = i(a)s(g)$ où $a \in A$. Par suite

$$\begin{aligned} p(s'(g) \otimes s(g')) &= p(i(a)s(g) \otimes s(g')) \\ &= p[(s(g) \otimes s(g'))(i(a) \otimes s(g'))] \\ &= p(s(g) \otimes s(g')) \quad \text{car } p(a \otimes s(g')) = 1. \end{aligned}$$

De la même façon on montre que

$$p(s(g) \otimes s'(g')) = p(s(g) \otimes s(g')).$$

Montrons que Ψ est un homomorphisme de groupes : si g, g' et $g'' \in G$

$$\begin{aligned} \Psi(gg' \otimes g'') &= p(s(g)s(g') \otimes s(g'')) \\ &= p[{}^{s(g)}s(g') \otimes {}^{s(g)}s(g''))(s(g) \otimes s(g''))] \\ &= p[(s({}^{g}g') \otimes s({}^{g}g''))(s(g) \otimes s(g''))] \\ &= \Psi(({}^{g}g' \otimes {}^{g}g'')(g \otimes g'')). \end{aligned}$$

De la même manière on montre que

$$\Psi(g \otimes g'g'') = \Psi((g \otimes g')({}^{g'}g \otimes {}^{g'}g'')).$$

On vérifie sans peine que

$$\Psi \circ \mu'' = \mathrm{id}_{E \otimes E/\mu((A \otimes E) \times (E \otimes A))}$$

et que

$$\mu'' \circ \Psi = \mathrm{id}_{G \otimes G}. \quad \square$$

Remarque. — En général, pour une extension quelconque, on obtient encore une suite exacte en remplaçant le produit direct $(A \otimes E) \times (E \otimes A)$ par le produit libre $(A \otimes E) * (E \otimes A)$ dans le lemme 1.

2. Application. Produit tensoriel du groupe diédral

On se propose de donner un deuxième calcul du produit tensoriel du groupe diédral (déjà fait dans [3]) en utilisant le lemme précédent.

Si D_m est le groupe diédral d'ordre $2m$, de présentation

$$\langle x, y : x^2 = y^m = xyxy = 1 \rangle$$

et Q_m le groupe des quaternions d'ordre $4m$, de présentation

$$\langle x, y : x^2 = y^m, yxy = x \rangle$$

ces deux groupes sont reliés par la suite exacte centrale

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to Q_m \xrightarrow{\nu} D_m \to 1$$

le générateur de $\mathbb{Z}_2$ étant $x^2 = y^m$.

D'après le lemme 1 énoncé plus haut, la suite

$$(\mathbb{Z}_2 \otimes Q_m) \times (Q_m \otimes \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\mu} Q_m \otimes Q_m \xrightarrow{\mu'} D_m \otimes D_m \to 1$$

est exacte.

De

$$\mathbb{Z}_2 \otimes Q_m = \{1, x^2 \otimes y^p, x^2 \otimes xy^q\} \qquad \text{avec} \quad 0 \leqslant p, q < 2m$$

$$Q_m \otimes \mathbb{Z}_2 = \{1, y^{p'} \otimes x^2, xy^{q'} \otimes x^2\} \qquad \text{avec} \quad 0 \leqslant p', q' < 2m$$

on déduit

$$\mu((\mathbb{Z}_2 \otimes Q_m) \times (Q_m \otimes \mathbb{Z}_2)) = \{ 1, (x^2 \otimes y^p)(y^{p'} \otimes x^2), (x^2 \otimes y^p)(xy^{q'} \otimes x^2), (x^2 \otimes xy^q)(y^{p'} \otimes x^2), (x^2 \otimes xy^q)(xy^{q'} \otimes x^2) \}$$

avec $0 \leqslant p, q, p', q' < 2m$.

Les calculs de $Q_m \otimes Q_m$ faits dans [3] montrent que :

Si m est impair

$$\mu((\mathbb{Z}_2 \otimes Q_m) \times (Q_m \otimes \mathbb{Z}_2)) = \{ 1, (x \otimes x)^2 \}$$

par suite

$$D_m \otimes D_m = Q_m \otimes Q_m / \{ 1, (x \otimes x)^2 \} = c_2 \times c_m$$

avec générateurs $x \otimes x$ et $x \otimes y$ respectivement.

Si $m = 4r$

$\mu((\mathbb{Z}_2 \otimes Q_m) \times (Q_m \otimes \mathbb{Z}_2))$ est engendré par $(x \otimes x)^2 = (x \otimes y)^m$ par suite

$$D_m \otimes D_m = C_2 \times C_m \times C_2 \times C_2$$

avec générateurs respectifs $x \otimes x$, $x \otimes y$, $y \otimes y$ et $(x \otimes y)(y \otimes x)$.

Si $m = 4r + 2$

$\mu((\mathbb{Z}_2 \otimes Q_m) \times (Q_m \otimes \mathbb{Z}_2))$ est engendré par $(y \otimes y)^2$ et $(x \otimes y)^m$ par suite

$$D_m \otimes D_m = C_2 \times C_m \times C_2 \times C_2$$

avec générateurs respectifs $x \otimes x$, $x \otimes y$, $y \otimes y$ et $(x \otimes y)(y \otimes x)$. □

PROPOSITION 1. — *Le produit tensoriel $D_m \otimes D_m$ du groupe diédral est :*

— isomorphe à $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_m$ avec générateurs respectifs $x \otimes x$ et $x \otimes y$ si m est impair;

— isomorphe à $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ avec générateurs respectifs $x \otimes x$, $x \otimes y$, $y \otimes y$ et $(x \otimes y)(y \otimes x)$ si m est pair.

3. Produit tensoriel du groupe d'Heisenberg

Soit $\mathscr{H}$ la groupe d'Heisenberg défini par les matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & n & p \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad n, m, p \in \mathbb{Z}$$

on se propose de calculer $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$.

Posons

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

LEMME 2. — *Une présentation de $\mathscr{H}$ par générateurs et relations est la suivante :*

$$\langle x, y, z : [x, y] = z^{-1};\ [z, x] = [z, y] = 1 \rangle.$$

Nous remarquons d'abord que tout élément de $\mathscr{H}$ s'écrit de manière unique sous la forme $x^m y^n z^p$ avec $m, n, p \in \mathbb{Z}$.

Calculs préliminaires :

On a pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$

$$^{x^m}y^n = x^m y^n x^{-m} = z^{-nm} y^n.$$

De même on montre que

$$^{y^n}x^m = z^{nm} x^m.$$

On vérifie sans peine que pour tout $u \in \mathscr{H}$ et $p \in \mathbb{Z}$

$$^{z^p}u = u.$$

Si $u, v \in \mathscr{H}$ alors on a

$$\begin{aligned}
&(x^m y^n z^p \otimes x^{m'} y^{n'} z^{p'})(u \otimes v) \\
&\qquad = {}^{[x^m y^n z^p,\ x^{m'} y^{n'} z^{p'}]}(u \otimes v)(x^m y^n z^p \otimes x^{m'} y^{n'} z^{p'}) \qquad \text{(d'après [2])} \\
&\qquad = {}^{z^{nm'-mn'}}(u \otimes v)(x^m y^n z^p \otimes x^{m'} y^{n'} z^{p'}) \\
&\qquad = (u \otimes v)(x^m y^n z^p \otimes x^{m'} y^{n'} z^{p'}).
\end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$ est abélien.

$$\begin{aligned} z \otimes z &= ({}^{x}y\, y^{-1} \otimes {}^{y}x \quad x^{-1}) \\ &= [y \otimes x,\ y \otimes x] \qquad \text{(d'après [2])} \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \otimes z &= x \otimes [y, x] \\ &= x \otimes {}^{y}x \quad x^{-1} \\ &= {}^{x}(y \otimes x)(y \otimes x)^{-1} \qquad [2] \\ &= (z^{-1} y \otimes x)(y \otimes x)^{-1} \qquad (\text{car } {}^{x}y = z^{-1} y) \\ &= {}^{z^{-1}}(y \otimes x)(z^{-1} \otimes x)(y \otimes x)^{-1} \\ &= z^{-1} \otimes x \qquad (\text{car } {}^{z^{-1}}(y \otimes x) = y \otimes x) \\ &= (z \otimes x)^{-1} \qquad [2]. \end{aligned}$$

De la même manière, on montre que

$$z \otimes y = (y \otimes z)^{-1}.$$

Considérons l'extension centrale

$$1 \to A \to \mathscr{H} \xrightarrow{\nu} \mathscr{H}^{ab} \to 1$$

où A est le sous-groupe abélien de $\mathscr{H}$ isomorphe à $\mathbb{Z}$ de générateur z, H^{ab} l'abélianisé de $\mathscr{H}$, isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ de générateurs x et y et ν la surjection canonique.

D'après le lemme 1 établi plus haut, la suite

$$(*') \qquad (A \otimes \mathscr{H}) \times (\mathscr{H} \otimes A) \xrightarrow{\mu} \mathscr{H} \otimes \mathscr{H} \xrightarrow{\mu'} \mathscr{H}^{ab} \otimes \mathscr{H}^{ab} \to 1$$

est exacte.

Le produit tensoriel $\mathscr{H}^{ab} \otimes \mathscr{H}^{ab}$ est le produit tensoriel usuel. Il est isomorphe à $\mathbb{Z}^4$ (puisque $\mathscr{H}^{ab}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$) avec générateurs $x \otimes x$, $x \otimes y$, $y \otimes x$ et $y \otimes y$.

Les actions de A sur $\mathscr{H}$ et de $\mathscr{H}$ sur A étant triviales, le groupe $A \otimes \mathscr{H}$ est donc isomorphe à $A \otimes \mathscr{H}^{ab}$ (produit tensoriel usuel), qui est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ avec générateurs $z \otimes x$ et $z \otimes y$.

On montre que

$$\mu((A\otimes\mathcal{H})\times(\mathcal{H}\otimes A))=\{(z\otimes x)^{p}(x\otimes z)^{p'};\ (z\otimes x)^{p}(y\otimes z)^{q'};$$
$$(z\otimes y)^{q}(x\otimes z)^{p'};\ (z\otimes y)^{q}(y\otimes z)^{q'};$$
$$\text{où } p,\ q,\ p',\ q'\in\mathbb{Z}\}$$

mais

$$z\otimes x=(x\otimes z)^{-1} \qquad \text{et} \qquad z\otimes y=(y\otimes z)^{-1}$$

(relations démontrées plus haut), il s'en suit que $\mu((A\otimes\mathcal{H})\times(\mathcal{H}\otimes A))$ a pour générateurs $x\otimes z$ et $y\otimes z$.

PROPOSITION 2. — *Le groupe $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^6$, de générateurs $x\otimes x$, $x\otimes y$, $y\otimes x$, $y\otimes y$, $x\otimes z$ et $y\otimes z$. Les actions non triviales de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ sont données par :*

$$^{x^my^n}(x\otimes y)=(x\otimes y)(x\otimes z)^{-m}(y\otimes z)^{-n}$$
$$^{x^my^n}(y\otimes x)=(y\otimes x)(x\otimes z)^{-m}(y\otimes z)^{n}.$$

Preuve. — L'extension (*') est scindée, puisque $\mathcal{H}^{ab}\otimes\mathcal{H}^{ab}$ est libre. Le groupe $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ est donc isomorphe à

$$(\mathcal{H}^{ab}\otimes\mathcal{H}^{ab})\times\mu((A\otimes\mathcal{H})\times(\mathcal{H}\otimes A)).$$

Montrons que $\mu((A\otimes\mathcal{H})\times(\mathcal{H}\otimes A))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$.

Soit

$$\Phi:\quad \mathcal{H}\otimes\mathcal{H}\to\mathbb{Z}^2$$

défini par

$$\Phi(x^m y^n z^p\otimes x^{m'} y^{n'} z^{p'})=(\alpha,\ \beta)$$

où

$$\alpha=\frac{nm'(m'-1)}{2}-\frac{n'm(m-1)}{2}+nmm'-n'm'm+mp'-m'p.$$
$$\beta=\frac{m'n(n-1)}{2}-\frac{mn'(n'-1)}{2}+np'-n'p$$

$m,\ n,\ p,\ m',\ n',\ p'\in\mathbb{Z}$.

Montrons que Φ est un homomorphisme de groupes.

Soit $n, n', n'', m, m', m'', p, p', p'' \in \mathbb{Z}$.

D'une part on a

$$\Phi((x^m y^n z^p)(x^{m'} y^{n'} z^{p'}) \otimes x^{m''} y^{n''} z^{p''})$$
$$= \Phi(x^{m+m'} y^{n+n'} z^{p+p'+nm'} \otimes x^{m''} y^{n''} z^{p''}) = (\alpha_1, \beta_1)$$

avec

$$\alpha_1 = \frac{N m''(m''-1)}{2} - \frac{n'' M(M-1)}{2} + NMm'' - n'' M m'' + M p'' - m'' P$$
$$\beta_1 = \frac{m'' N(N-1)}{2} - \frac{M n''(n''-1)}{2} + N p'' - P n''$$

où l'on a posé :

$$M = m + m', \qquad N = n + n', \qquad P = p + p' + nm'.$$

D'autre part on a

$$\Phi(({}^{x^m} y^n z^p (x^{m'} y^{n'} z^{p'}) \otimes {}^{x^m y^n z^p}(x^{m''} y^{n''} z^{p''}))(x^m y^n z^p \otimes x^{m''} y^{n''} z^{p''}))$$
$$= \Phi((x^{m'} y^{n'} z^{p'+nm'-mn'} \otimes x^{m''} y^{n''} z^{p''+nm''-mn''})(x^m y^n z^p \otimes x^{m''} y^{n''} z^{p''}))$$
$$= (\alpha_2, \beta_2) + (\alpha_3, \beta_3) = (\alpha_2 + \alpha_3, \beta_2 + \beta_3).$$

où

$$\alpha_2 = \frac{n' m''(m''-1)}{2} - \frac{n'' m'(m'-1)}{2}$$
$$+ n' m''(m'+m) - m' n''(m+m'') + m' p'' - m'' p'$$
$$\beta_2 = \frac{m'' n'(n'-1)}{2} - \frac{m' n''(n''-1)}{2} + nn' m'' - nm' n'' + n' p'' - p' n''$$
$$\alpha_3 = \frac{nm''(m''-1)}{2} - \frac{n'' m(m-1)}{2} + nmm'' - n'' mm'' + mp'' - m'' p$$
$$\beta_3 = \frac{m'' n(n-1)}{2} - \frac{mn''(n''-1)}{2} + np'' - pn''.$$

Vérifions que

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$$

et

$$\beta_1 = \beta_2 + \beta_3$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2 + \alpha_3 = {} & \frac{(n+n')\,m''\,(m''-1)}{2} \\
& - \frac{n''}{2}[m'(m'-1) + m(m-1) + 2mm'] + m''\,n'\,(m+m') \\
& + nmm'' - (m+m')\,n''\,m'' + (m+m')\,p'' - m''\,(p+p'+nm') + nm'\,m'' \\
= {} & \frac{N\,m''\,(m''-1)}{2} - \frac{n''\,M\,(M-1)}{2} + MN\,m'' - n''\,m''\,M + M\,p'' - m''\,P \\
= {} & \alpha_1.
\end{aligned}$$

De même on montre que

$$\beta_2 + \beta_3 = \beta_1$$

et que

$$\begin{aligned}
& \Phi(x^m y^n z^p \otimes (x^{m'} y^{n'} z^{p'})(x^{m''} y^{n''} z^{p''})) \\
& \qquad = \Phi((x^m y^n z^p \otimes x^{m'} y^{n'} z^{p'})({}^{x^{m'} y^{n'} z^{p'}}(x^m y^n z^p) \\
& \qquad\qquad \otimes {}^{x^{m'} y^{n'} z^{p'}}(x^{m''} y^{n''} z^{p''}))).
\end{aligned}$$

Il est clair que l'homomorphisme Φ est surjectif et qu'il s'annule sur $\mathscr{H}^{ab} \otimes \mathscr{H}^{ab}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H} \otimes \mathscr{H} \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathbb{Z}^2 \\
& \mu((A \otimes \mathscr{H}) \times (\mathscr{H} \otimes A)) \arrow[ur, "\bar{\Phi}"'] &
\end{tikzcd}$$

où p est la projection canonique et $\bar{\Phi} \circ p = \Phi$ est donc commutatif. Il s'en suit que $\bar{\Phi}$ est surjectif et que $\mu((A \otimes \mathscr{H}) \times (\mathscr{H} \otimes A))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$. □

COROLLAIRE. — *Le groupe d'homotopie $\pi_3(SB\mathscr{H})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^5$ avec générateurs $x \otimes x$, $y \otimes y$, $(x \otimes y)(y \otimes x)^{-1}$, $x \otimes z$ et $y \otimes z$.*

Démonstration. — D'après [2], on a : $\pi_3(SB\mathscr{H}) = \mathrm{Ker}(\mathscr{H} \otimes \mathscr{H} \xrightarrow{[\ ,\ ]} \mathscr{H})$.

Comme $\mathrm{Im}(\mathscr{H} \otimes \mathscr{H} \xrightarrow{[\ ,\ ]} \mathscr{H}) \simeq \mathbb{Z}$ avec générateur z, le corollaire est immédiat.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BROWN (R.) et LODAY (J.-L.). — Excision homotopique en basse dimension, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 298, série I, 1984, p. 353-356.

[2] BROWN (R.) and LODAY (J.-L.). — *Van Kampen theorems for diagrams of spaces*, à paraître dans Topology.

[3] R. BROWN, Communication privée.