

# BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE ARNOUX

## **Un exemple de semi-conjugaison entre un échange d'intervalles et une translation sur le tore**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 116, n° 4 (1988), p. 489-500

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1988\\_\\_116\\_4\\_489\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1988__116_4_489_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**UN EXEMPLE DE SEMI-CONJUGAISON  
ENTRE UN ÉCHANGE D'INTERVALLES  
ET UNE TRANSLATION SUR LE TORE**

PAR

PIERRE ARNOUX (\*)

**RÉSUMÉ.** — On donne une semi-conjugaison continue et surjective entre un échange d'intervalles et une translation sur le tore, qui s'étend en une semi-conjugaison entre un difféomorphisme pseudo-Anosov sur une surface de genre 3 et un difféomorphisme hyperbolique du tore  $T^3$ . On passe pour ce faire par le système minimal associé à une substitution.

**ABSTRACT.** — We give a continuous and surjective semi-conjugacy between an interval exchange and a translation on the torus, which can be extended to a semi-conjugacy between a pseudo-Anosov diffeomorphism on a surface of genus 3 and a hyperbolic diffeomorphism of  $T^3$ . We get the result by using the minimal subshift associated to a substitution as a model for the two systems.

**1. Notations et énoncé du théorème**

On note  $\alpha$  l'unique solution réelle de  $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = 1$ .

Sur le cercle  $S^1$  identifié à l'intervalle  $[0, 1[$ , on définit l'échange d'intervalles  $f$  de la façon suivante. On coupe le cercle en trois intervalles semi-ouverts  $J_1, J_2, J_3$ , de longueurs respectives  $\alpha, \alpha^2, \alpha^3$ . On découpe chacun de ces intervalles en deux parties égales, on permute ces deux parties en préservant l'orientation, et on effectue une rotation d'un demi-tour sur le cercle tout entier (voir figure 1). L'échange  $f$  est alors donnée par les formules explicites :

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} & \text{si } x \in [0, \frac{\alpha}{2}[ \\ x - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} & \text{si } x \in [\frac{\alpha}{2}, \alpha[ \end{cases}$$

et des formules du même type pour les quatre autres intervalles.

(\*) Texte reçu le 17 juin 1987.

P. ARNOUX, Université Paris-Sud, Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France.

L'intérêt de  $f$  est d'être "auto-induite" : comme on le verra ci-dessous, elle est conjuguée à l'application qu'elle induit sur  $J_1$ .

D'autre part, on notera  $T$  la translation sur le tore  $\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  de vecteur  $(\alpha, \alpha^2)$ . On montre le théorème suivant :

**THÉORÈME.** — *Il existe  $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , continue, surjective, telle que le diagramme ci-dessous commute :*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1 \\
 h \downarrow & & \downarrow h \\
 \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{T} & \mathbb{T}^2
 \end{array}$$

Les propriétés d'invariance par induction de  $f$  et  $T$ , vérifiées au paragraphe 2 ci-dessous, permettent de façon classique de suspendre  $f$  en un feuilletage d'une surface  $M$  de genre 3, invariant par un difféomorphisme pseudo-Anosov  $\Phi$ , et  $T$  en un feuilletage de dimension 1 du tore  $\mathbb{T}^3$ , invariant par un automorphisme hyperbolique  $A$ . Du théorème ci-dessus, on déduit :

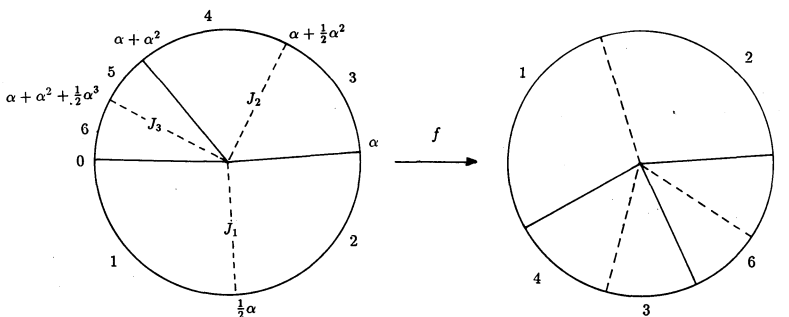


Fig. 1

**COROLLAIRE.** — *Il existe une application  $\Psi : M \rightarrow \mathbb{T}^3$  continue, surjective, telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\Phi} & M \\
 \Psi \downarrow & & \downarrow \Psi \\
 \mathbb{T}^3 & \xrightarrow{A} & \mathbb{T}^3
 \end{array}$$

La construction donnée ici peut s'étendre immédiatement en prenant pour  $\alpha_n$  la solution réelle de  $\alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n = 1$ , et en définissant des applications  $f_n$  sur  $\mathbb{S}^1$  et  $T_n$  sur  $\mathbb{T}^n$  comme ci-dessus; on obtient ainsi des exemples en toute dimension.

Le principe de la preuve consiste à passer par un espace intermédiaire, la fermeture de l'orbite du point fixe d'une substitution (voir les définitions ci-dessous); la définition des applications de conjugaison est simple, car les substitutions sont des modèles naturels pour des systèmes dynamiques auto-induits, le problème est de montrer la continuité de ces applications.

Cette semi-conjugaison fournit pour un difféomorphisme pseudo-Anosov un modèle particulièrement simple, qui ne fait intervenir que son coefficient de dilatation. On verra que le difféomorphisme  $A$  est en fait une traduction géométrique de l'automorphisme de multiplication par  $\alpha^{-1}$  dans le corps  $\mathbb{Q}(\alpha)$ . Il serait intéressant de généraliser à d'autres difféomorphismes, mais il y a deux difficultés : d'abord, l'hypothèse que le coefficient est un nombre de Pisot joue un rôle important. Ensuite, on peut en général associer à un difféomorphisme pseudo-Anosov un échange d'intervalles auto-induit (cf. [V]), et donc une substitution; mais si le coefficient du difféomorphisme est de degré  $g$ , on aura une substitution sur  $2g+1$  éléments, dont la matrice est reliée à la matrice du difféomorphisme sur l'homologie; celle-ci est symplectique, et son polynôme minimal est donc multiple du polynôme minimal du coefficient de dilatation, et aussi de son polynôme réciproque. Ici, on a une partition naturelle en trois éléments, au lieu des sept que donne la méthode de Veech, ce qui permet de découpler  $\alpha$  et  $\alpha^{-1}$ , et de faire la démonstration.

L'idée de cet article m'a été suggérée par la lecture de [R], et en particulier par le fait que le nombre  $\alpha$  qui y intervient est le même que dans [AY], où l'on donne l'exemple du difféomorphisme Pseudo-Anosov obtenu par suspension de  $f$ ; la démonstration fait un usage essentiel des résultats de [R]. L'existence de telles applications de semi-conjugaison, dans un cas plus général, résulte du travail d'Albert FATHI (cf. [F]), où il montre que la conjugaison naturelle sur l'homologie entre un difféomorphisme pseudo-Anosov et un automorphisme du tore  $\mathbb{T}^n$  de même matrice peut se réaliser géométriquement; l'exemple donné ici est, à ma connaissance, le premier qui soit explicite.

## 2. Remarques préliminaires

**2.1.** — On note  $\Sigma$  l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\Sigma^*$  le monoïde libre engendré par  $\Sigma$  (ensemble des mots finis sur l'alphabet  $\Sigma$ ),  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  l'ensemble des suites

à valeur dans  $\Sigma$ , et  $\Pi : \Sigma \rightarrow \Sigma^*$  la substitution :

$$1 \mapsto 12, \quad 2 \mapsto 13, \quad 3 \mapsto 1.$$

$\Pi$  s'étend en une application  $\Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow \Sigma^{\mathbb{N}}$ , qui est contractante pour la métrique naturelle sur  $\Sigma^{\mathbb{N}}$ . Elle a donc un seul point fixe, qu'on appellera  $(u_n)$ . (Il est facile d'écrire le début de  $(u_n)$  : cette suite commence par  $\Pi^n(1)$ , pour tout  $n$ ).

On note  $\Omega$  la fermeture de l'orbite de  $(u_n)$  par le décalage  $S : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow \Sigma^{\mathbb{N}}$  qui à  $(x_n)$  associe la suite  $(y_n)$  définie par  $y_n = x_{n+1}$ . On appellera encore  $S$  la restriction à  $\Omega$  de ce décalage.

**2.2.** — On note  $f|_E$  l'application induite par  $f$  sur l'ensemble  $E$ , c'est-à-dire l'application de  $E$  dans  $E$  qui à  $x$  associe  $f^n(x)$ , où  $n$  est le plus petit entier tel que  $f^n(x)$  appartienne à  $E$ .

On montre facilement que  $f$  est conjuguée à  $f|_{[0, \alpha[}$  par l'application

$$g : x \mapsto \alpha x + \frac{\alpha + \alpha^4}{2} \pmod{\alpha};$$

la démonstration est essentiellement contenue dans la figure ci-dessous, où l'on voit que  $f$  envoie les intervalles notés 1 et 2, de longueur  $\alpha^4/2$ , respectivement sur les intervalles 4 et 3, inclus dans  $[0, \alpha[$ , et est donc égale à  $f|_{[0, \alpha[}$  sur ces intervalles; l'intervalle 5, de longueur  $\alpha^3$ , est envoyé d'abord sur  $J_3$ , puis, après permutation des deux moitiés, sur 6; enfin le complémentaire dans  $[0, \alpha[$  de 1, 2 et 5 est envoyé sur  $J_2$ , puis après échange des moitiés sur le complémentaire de 3, 4 et 6. L'application  $f|_{[0, \alpha[}$  a donc même structure sur  $f$ , et lui est conjuguée par l'homothétie  $g$  de rapport  $\alpha$  donnée ci-dessus.

Cette propriété d'auto-induction entraîne que  $f$  est minimale. En effet, on peut réitérer l'opération pour  $f|_{[0, \alpha[}$ , sur le complémentaire des intervalles 1, 2 et 5, de longueur  $\alpha^2$ ; mais on a vu que c'est l'image réciproque par  $f$  de  $J_2$ , donc  $f|_{J_2}$  est aussi conjuguée à  $f$ , et on peut montrer la même chose pour  $f|_{J_3}$ . De plus, on a vu ci-dessus que toute orbite de  $f$  passe par l'intervalle  $J_1$ , et il en est de même pour  $J_2$  et  $J_3$ . Soit alors  $U$  un intervalle ouvert; on veut montrer que l'orbite de tout point passe par  $U$ . Si  $U$  contient l'un des trois intervalles, cela est clair; sinon, on induit sur celui d'entre eux dont la plus grande proportion est contenue dans  $U$ , et on recommence; à chaque étape, cette proportion est multipliée par  $1/(1 - \alpha^3)$  au moins; on finit donc par induire sur un ensemble contenu dans  $U$ , d'où le résultat.

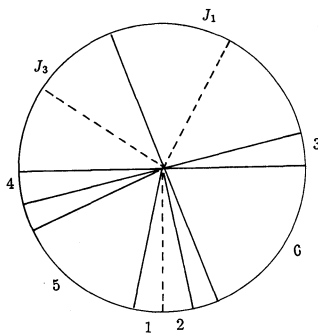


Fig. 2

Remarquons que, si l'on itère  $n$  fois l'opération d'induction sur  $J_1$ , l'ensemble  $I_n$  sur lequel on induit n'est plus un intervalle; c'est une union finie d'intervalles, car l'application de conjugaison,  $g^n$ , est discontinue en un nombre finie de points. On vérifie directement que  $g^3$  possède 3 points fixes, et est une contraction de rapport  $\alpha^3$  autour de ces points, donc l'intersection des  $I_n$  est réduite à 3 points qui sont  $\alpha^4/2$ ,  $(\alpha + \alpha^2 - \alpha^3)/2$ ,  $1/2$ .

2.3. — On a le théorème suivant, dû à RAUZY, (cf. [R]).

THÉORÈME. — *Il existe trois ouverts connexes  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  de  $\mathbb{T}^2$ , mutuellement disjoints, de réunion dense dans  $\mathbb{T}^2$ , vérifiant  $T^n(0) \in \omega_{u_n}$ , où  $T$  est la translation de  $\mathbb{T}^2$  définie ci-dessus, et  $(u_n)$  la suite point fixe de la substitution  $\Pi$ .*

La démonstration consiste à associer à  $S^k((u_n))$  le point de  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{pmatrix} k\alpha \\ k\alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |u_0 \dots u_{k-1}|_1 \\ |u_0 \dots u_{k-1}|_2 \end{pmatrix}$$

où  $|u_0 \dots u_{k-1}|_i$  est le nombre de lettres du mot  $u_0 \dots u_{k-1}$  égales à  $i$ .

Comme  $\alpha^{-1}$  est un nombre de Pisot, ce qui est essentiel, ces points restent bornés; on montre que leur adhérence est un domaine fondamental de  $\mathbb{R}^2$  pour l'action de  $\mathbb{Z}^2$ . Les  $\omega_i$  sont définis comme l'intérieur de l'adhérence des points correspondant aux suites  $S^k((u_n))$  dont la première lettre est  $i$ , et on montre qu'ils sont disjoints.

Une remarque importante pour la suite est que, si  $S^k((u_n)) = v_0 \dots v_j \dots$ , le point associé est contenu dans  $\bigcap_{i=0}^j T^{-i}\omega_{v_i}$ ; or (cf. [R, p. 164]), le diamètre de cette intersection tend vers 0 quand  $j$  tend vers l'infini. Donc si des éléments de l'orbite de  $(u_n)$  tendent vers une limite dans  $\Omega$ , les points associés sur  $\mathbb{T}^2$  aussi.

On peut montrer que  $\omega_1$  est image de  $\omega$  par la matrice  $B$  :

$$\begin{pmatrix} -\alpha & -\alpha \\ 1 - \alpha^2 & -\alpha^2 \end{pmatrix}$$

et que cette matrice conjugue la translation  $T$  modulo  $\mathbb{Z}^2$  sur  $\omega$  à une translation sur  $\omega_1$  modulo un réseau de maille plus petite, qui est l'induite de  $T$  sur  $\omega_1$  ; on a donc une situation tout à fait analogue à celle sur  $\mathbb{S}^1$ . La matrice  $B$  n'est pas quelconque : c'est la restriction de la multiplication par  $\alpha^{-1}$  dans  $\mathbb{Q}(\alpha)$  au sous-espace stable complémentaire du sous-espace propre associé à  $\alpha^{-1}$ .

### 3. Construction de la semi-conjugaison

**3.1.** — Nous allons d'abord construire une application de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\Omega$ . Pour tout point  $x$  de  $\mathbb{S}^1$ , on note  $\nu(x)$  le numéro de l'intervalle  $J_{\nu(x)}$  qui le contient. On définit alors l'application :

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \{1, 2, 3\}^{\mathbb{N}} \\ x &\longmapsto (\nu(f^n(x)))_{n \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Il est clair que  $\theta$  conjugue  $f$  au décalage  $S$  ; d'autre part, les intervalles  $J_1, J_2, J_3$  étant ouverts à droite, et  $f$  étant continue à droite, les applications  $\nu$ , et donc  $\theta$ , sont continues à droite. Il reste à montrer que l'image de  $\theta$  est bien  $\Omega$ .

On peut définir de même une application  $\theta'$  sur  $J_1$  en considérant l'application  $f|_{J_1}$  ; de l'étude de  $f$  faite précédemment, il découle que l'on a  $\theta(x) = \Pi(\theta'(x))$  sur  $J_1$  ; par récurrence, on voit que  $\theta$  associe aux trois points qui sont dans l'intersection de tous les intervalles d'induction la suite  $(u_n)$  point fixe de  $\Pi$ . Donc ces points et tous leurs itérés ont bien une image contenue dans  $\Omega$  ; le résultat suit par minimalité de  $f$  et continuité à droite de  $\theta$ .

On peut remarquer que  $\theta$  est en fait continue en dehors des orbites négatives des points de discontinuité de  $f$ .

**3.2.** — Nous construisons maintenant une application  $\eta$  qui conjugue  $S$  à  $T$ . On la définit d'abord sur l'orbite de  $(u_n)$ , en posant  $\theta((u_n)) = 0$ , et  $\theta(S(x)) = T(\theta(x))$ . Soit alors  $y$  un point de  $\Omega$  ; par définition de  $\Omega$ , il existe une suite  $n_i$  telle que  $S^{n_i}(u_n)$  tende vers  $y$ . D'après la remarque faite en 2.3, la suite  $\theta(S^{n_i}(u_n)) = T^{n_i}(0)$  tend sur  $\mathbb{T}^2$  vers une limite, ne dépendant que de  $y$ , que nous prenons comme image de  $y$ .

L'application  $\eta$  est continue par définition, et son image est dense dans  $\mathbb{T}^2$ , car la translation  $T$  est irrationnelle, donc l'orbite de 0 est dense;  $\Omega$  étant compacte,  $\eta$  est surjective.

**3.3.** — Posons  $h = \eta \circ \theta$ .  $h$  est bien une semi-conjugaison entre  $f$  et  $T$ , dont l'image est dense dans  $\mathbb{T}^2$ , et qui est continue sauf sur l'orbite négative des points de discontinuité de  $f$ . La seule chose qui reste à prouver est donc la continuité en ces points, ce qui entraîne la surjectivité.

Montrons d'abord que  $h$  est continue en  $\alpha/2$ ; en fait,  $\theta$  est continue en ce point, car les limites à droite et à gauche de  $f$  en  $\alpha/2$  sont  $\frac{1}{2}$  et  $\alpha^4/2$ , qui ont tous deux ( $u_n$ ) pour image par  $\theta$ . Le raisonnement est aussi valable pour  $\alpha + \alpha^2/2$  et  $\alpha + \alpha^2 + \alpha^3/2$ .

Il reste à étudier les points  $0, \alpha, \alpha + \alpha^2$ . On va commencer par chercher leur image par  $\theta$ . Rappelons que  $\theta'$  est l'application analogue à  $\theta$  définie pour  $f|_{J_1}$ ; on a vu en 3.1 que si  $x$  appartient à  $J_1$ , on a  $\theta(x) = \Pi\theta'(x)$ . Les extrémités des intervalles de continuité de  $f|_{J_1}$  sont  $\alpha/2 + \alpha^4/2, \alpha/2 - \alpha^4/2$  et  $\alpha^2/2 - \alpha^3/2$ , dont les images respectives par  $f$  sont  $\alpha, 0, \alpha + \alpha^2$ ; de tout cela on déduit, si l'on note  $p_1, p_2, p_3$  les points  $0, \alpha, \alpha + \alpha^2$  et  $q_1, q_2, q_3$  leurs antécédents par  $f$  :

$$\theta(q_i) = \Pi\theta'(q_i) \quad \theta(p_i) = \theta'(q_{i+1}) \quad \theta(p_i) = S\theta(q_i)$$

ce qui entraîne immédiatement :

$$\theta(0) = (S\Pi)^3\theta(0).$$

Il est facile de vérifier que cette équation ne peut avoir qu'une seule solution commençant par 1.

Or on montre par récurrence que pour  $n > 1$ , on peut écrire  $\Pi^n(1)$  sous la forme

$$\Pi^{n-2}(1)\Pi^{n-3}(1) \dots \Pi(1)1W_n,$$

où  $W_n$  vérifie :  $W_{n+1} = S\Pi(W_n)$ ; les mots  $W_{3n}$  commencent par 1, et convergent donc vers  $\theta(0)$ . Le point  $h(0)$  est donc la limite des points  $T^{N_i}(0)$ , avec  $N_i = \sum_{n=0}^i |\Pi^n(1)|$  où  $|\Pi^n(1)|$  est la longueur de  $\Pi^n(1)$ ; c'est aussi  $h(\alpha)$  et  $h(\alpha + \alpha^2)$ , ce qui entraîne la continuité de  $h$ , et termine la démonstration.

Puisque  $h$  fait correspondre au point  $f^n(\frac{1}{2})$  de  $\mathbb{S}^1$  le point  $T^n(0)$  de  $\mathbb{T}^2$ , on peut facilement calculer une approximation de la courbe partout dense sur  $\mathbb{T}^2$  image de  $\mathbb{S}^1$  par  $h$ ; la figure ci-dessous représente une telle approximation. On peut remarquer le caractère réplicatif de la courbe, et l'amorce des points triples.



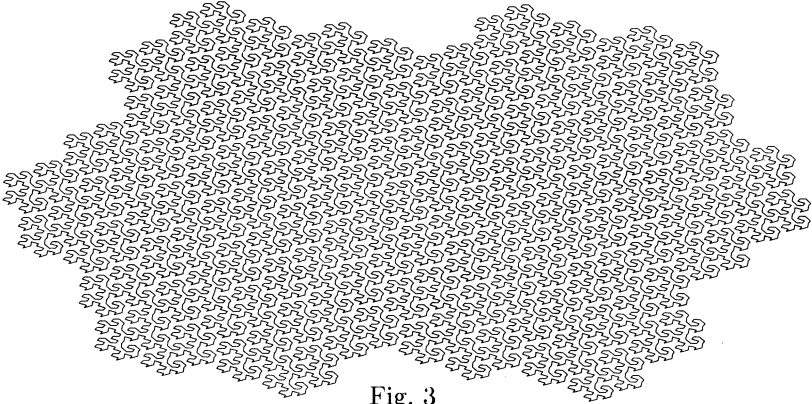


Fig. 3

#### 4. Suspensions

4.1. — On peut, de façon classique, construire le feuilletage mesuré suspension de  $f$ , c'est-à-dire un feuilletage mesuré  $(\mathcal{F}, \mu)$  orienté, avec des singularités, sur une surface  $M$  compacte connexe sans bord, muni d'une courbe simple fermée transverse au feuilletage (on identifiera cette courbe à  $S^1$ ) sur laquelle l'application de premier retour du flot associé est  $f$ . Un calcul simple montre que  $M$  est une surface de genre 3, que le feuilletage possède deux selles à six branches, et que le segment  $[0, \alpha]$  peut se relever, par glissement le long des feuilles, en une courbe fermée transverse (cf. [A]). La propriété d'auto-induction de  $f$  vue en 2.2 entraîne qu'il existe un difféomorphisme de  $M$  qui envoie  $(\mathcal{F}, \mu)$  sur  $(\mathcal{F}, \alpha^{-1}\mu)$ ; la théorie de THURSTON (cf. [FLP, p. 12]) montre qu'il est isotope à un difféomorphisme pseudo-Anosov  $\Phi$  de  $M$ , pour lequel il existe deux feuilletages  $(\mathcal{F}_u, \mu_u)$  équivalent à  $(\mathcal{F}, \mu)$ , et  $(\mathcal{F}_s, \mu_s)$  vérifiant :

$$\Phi^*(\mathcal{F}_u, \mu_u) = (\mathcal{F}_u, \alpha^{-1}\mu_u)$$

$$\Phi^*(\mathcal{F}_s, \mu_s) = (\mathcal{F}_s, \alpha\mu_s).$$

Nous allons construire un paramétrage explicite de  $M$  et  $\Phi$ , en utilisant la structure plate donnée par les deux feuilletages.

On considère trois rectangles juxtaposés dans  $\mathbb{R}^2$ , basés sur le segment horizontal de longueur 1 issu du point  $(0, 0)$ , de longueurs respectives  $\alpha$ ,  $\alpha^2$ ,  $\alpha^3$ , et de hauteurs respectives 1,  $\alpha + \alpha^2$ ,  $\alpha$ ; on pratique dans ces rectangles trois incisions verticales à partir de la base, de hauteurs respectives  $(\alpha + \alpha^2)/2$ ,  $(1 + \alpha^2)/2$ ,  $(\alpha^2 + \alpha^4)/2$ , et d'abscisses  $(\alpha - \alpha^2)/2$ ,  $(\alpha + \alpha^2)/2$ ,  $(1 + \alpha)/2$  (voir Figure 4). On recolle le bord supérieur au bord inférieur en identifiant le point du haut d'abscisse  $x$  au point du

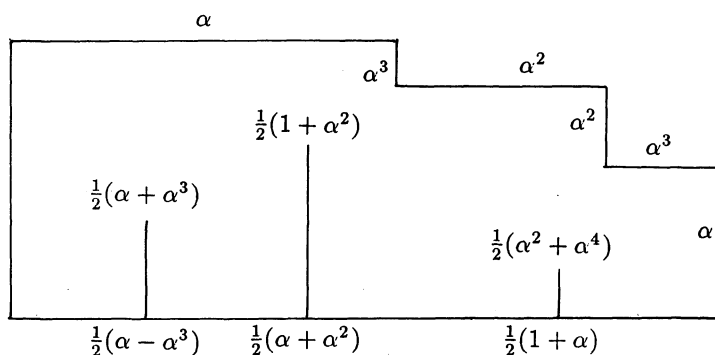


Fig. 4

bas d'abscisse  $f(x)$ ; on recolte ensuite les bords verticaux en identifiant, dans les notations de la Figure 5 ci-dessous : 0 avec 10, 9 et 2 avec 5 (remarquer que, par suite du recollement horizontal, le segment 9 est dans le prolongement de 2), 6 et 7 avec 3, 1 et 8 avec 4. Les longueurs choisies entraînent que ces recollements peuvent être isométriques. On obtient donc une surface  $M$  sans bord, munie naturellement d'une structure plate singulière; il y a deux singularités qui ont chacune un excès angulaire de  $4\pi$ ,  $M$  est donc de genre 3; elle est naturellement munie de deux feuilletages mesurés transverses, le feuilletage par les horizontales, et celui par les verticales, qui est bien sûr la suspension de  $f$ .

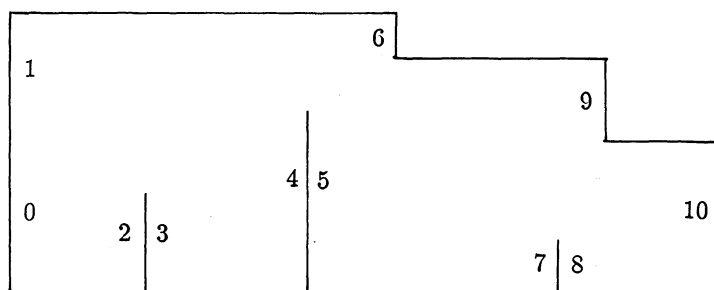


Fig. 5

Il nous reste à montrer  $\Phi$ ; pour ce faire, nous allons définir un deuxième paramétrage de  $M$  : dans la carte donnée ci-dessus, on peut prendre les deux petits rectangles et les mettre au-dessus du premier en utilisant le fait que leur bord inférieur est identifié à une partie du bord supérieur du grand

rectangle (on est obligé dans l'opération de couper en deux le rectangle moyen), puis couper la figure suivant la verticale d'abscisse  $(\alpha + \alpha^4)/2$  et permuter les deux morceaux (ce qui rétablit le rectangle coupé par l'opération précédente). On obtient ainsi un deuxième paramétrage de  $M$ , qui est exactement semblable au premier, sauf que toutes les abscisses  $y$  sont multipliées par  $\alpha$  et les ordonnées par  $\alpha^{-1}$  (voir Figure 6).  $\Phi$  est l'application qui, au point de coordonnées  $(x, y)$  dans le premier paramétrage, associe le point de coordonnées  $(\alpha x, y/\alpha)$  dans le second; comme les identifications faites dans les deux cas sont identiques,  $\Phi$  s'étend bien en une application de  $M$ , qui possède les propriétés voulues.

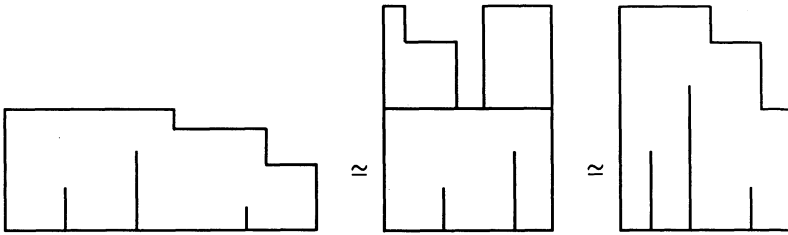


Fig. 6

**4.2.** — Nous allons maintenant construire de façon analogue une suspension de la translation  $T$ .

On note  $\omega$  le domaine fondamental de  $\mathbb{R}^2$  pour l'action naturelle de  $\mathbb{Z}^2$  construit en 2.3, et  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  les trois ouverts associés; remarquons que la définition de  $\omega_1$  entraîne que c'est l'intérieur de l'intersection de  $\omega$  et de son translaté par  $(1 - \alpha, -\alpha^2)$ , et de même pour  $\omega_2$  et  $(-\alpha, 1 - \alpha^2)$ ,  $\omega_3$  et  $(-\alpha, -\alpha^2)$ .

Dans  $\mathbb{R}^3$ , où on identifie le plan  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  à  $\mathbb{R}^2$ , on définit un domaine  $C$  comme union de trois cylindres  $C_1, C_2, C_3$  de base  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  et de hauteur  $1, \alpha + \alpha^2, \alpha$ . Le domaine  $C$  est un domaine fondamental de  $\mathbb{R}^3$  pour le réseau de base

$$\begin{aligned} e_1 &= (1 - \alpha, -\alpha^2, 1), \\ e_2 &= (-\alpha, 1 - \alpha^2, \alpha + \alpha^2), \\ e_3 &= (-\alpha, -\alpha^2, \alpha). \end{aligned}$$

En effet, d'une part le volume  $\alpha + \alpha^3 + 2\alpha^4$  de  $C$  est égal à celui de la maille du réseau, d'autre part  $C$  est disjoint de ses translatés par les vecteurs du réseau, à cause de la remarque ci-dessus (les vecteurs  $e_i$  ont été choisis de façon à ce que le haut du cylindre  $c_i$  vienne se recoller avec

la base d'un translaté de  $C$  suivant la translation  $T$ ). En quotientant par le réseau, on obtient un tore  $\mathbb{T}^3$  muni d'un feuilletage par les verticales qui est suspension de  $T$  sur  $\omega$ .

Comme on l'a fait ci-dessus, on peut définir un nouveau domaine  $C'$  en posant  $C_2$  et  $C_3$  au-dessus de  $C_1$ , avec les identifications naturelles; c'est évidemment encore un domaine fondamental pour le réseau, et il est image de  $C$  par une application linéaire qui préserve le réseau dans son ensemble, et qui passe donc au quotient en un automorphisme  $A$  de  $\mathbb{T}^3$  préservant le feuilletage vertical. Il est facile de vérifier que cet automorphisme a pour matrice dans la base  $e_1, e_2, e_3$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui représente la multiplication par  $1/\alpha$  dans  $\mathbb{Q}(\alpha)$ , dans la base  $1, \alpha + \alpha^2, \alpha$ .

**4.3.** — Il est maintenant facile de définir la semi-conjugaison  $\psi$  entre  $\Phi$  et  $A$ ; au point  $(x, y)$  de  $M$ , dans les coordonnées définies en 4.1, on fait correspondre le point  $(h(x), y)$ , où  $h$  est l'application définie en 3. Puisque  $h$  envoie l'intervalle  $J_i$  surjectivement sur  $\omega_i$ , l'image de  $\psi$  est exactement  $C$ . Comme  $h$  conjugue les applications de premier retour des feuilletages verticaux,  $\psi$  respecte bien les identifications sur les bords horizontaux; les bords verticaux sont formés de segments de séparatrices; mais on voit que les différents points du paramétrage correspondant à un même point singulier de  $M$  sont envoyés sur le même point de  $\mathbb{T}^3$ , donc les séparatrices sont envoyées isométriquement sur la feuille passant par ce point, ce qui implique que  $\psi$  respecte toutes les identifications, et définit bien une application de  $M$  dans  $\mathbb{T}^3$  qui conjugue automatiquement  $\Phi$  et  $A$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [A] ARNOUX (P.). — Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, *Université de Reims*, 1981.
- [AY] ARNOUX (P.) et YOCOZ (J.C.). — Construction de difféomorphismes pseudo-Anosov, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **292**, 1981, p. 75-78.
- [F] FATHI (A.). — Some compact invariant sets for hyperbolic linear automorphisms of torii, *Ergodic Theory Dynamical Systems*, t. **8**, 1988, p. 191-204.
- [FLP] FATHI (A.), LAUDENBACH (F.) et POENARU (V.). — *Travaux de Thurston sur les surfaces*. — Astérisque 66-67, 1979.
- [R] RAUZY (G.). — Nombres algébriques et substitutions, *Bull. Soc. Math. France*, t. **110**, 1982, p. 147-178.
- [V] VEECH (W.A.). — Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps, *Ann. of Math.*, t. **115**, 1982, p. 201-242.
-