BULLETIN DE LA S. M. F.

J. BERTIN

Sur une formule de Shioda et Mitani

Bulletin de la S. M. F., tome 117, nº 1 (1989), p. 121-128

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_1_121_0>

Bull. Soc. math. France,
117, 1989, p. 121–128.

SUR UNE FORMULE DE SHIODA ET MITANI

PAR

J. BERTIN (*)

RÉSUMÉ. — Soit X une variété abélienne de dimension 2 associée à un ordre d'une algèbre de quaternions rationnelle H. Lorsque H est un corps et lorsque X est simple, on détermine le nombre de classes de courbes de genre 2 dont la jacobienne est isomorphe à X.

ABSTRACT. — Let X be a two dimensional complex abelian variety associated to an order of rational quaternion algebra H. When H is a division ring, and X simple, we give a formula for the number of classes of curves of genus two whose jacobian is isomorphic to X.

1. Introduction

Soit X une variété abélienne de dimension 2 définie sur $\mathbb{C}$. Supposons que X soit isomorphe au produit de deux courbes elliptiques mutuellement isogènes, c'est-à-dire, selon une terminologie traditionnelle, supposons X singulière [3, théorème 4.1]. Une telle décomposition de X n'est pas unique en général; cependant, à isomorphisme près, leur nombre est fini. Ce nombre a été déterminé explicitement par SHIODA et MITANI (*loc. cit.* théorème 4.7).

Cela est à rapprocher d'un résultat général de NARASIMHAN et NORI qui affirme que, pour une variété abélienne X de dimension g, le nombre des classes modulo $\mathrm{Aut}(X)$ des courbes C lisses et irréductibles de genre g, contenues dans X et telles que $\mathrm{Jac}(C) \cong X$ est fini. Le nombre de classes ainsi défini est noté h_X.

Dans ce travail, nous allons déterminer h_X lorsque X est obtenue au moyen d'une algèbre de quaternions H sur $\mathbb{Q}$, déployée sur $\mathbb{R}$, et d'un ordre de H (SHIMURA [2]). Lorsque $H = M_2(\mathbb{Q})$, on retrouve essentiellement la situation étudiée par SHIODA et MITANI, ainsi que HAYASHIDA et NISHI [1].

(*) Texte reçu le 14 octobre 1987, révisé le 20 avril 1988.
J. BERTIN, Institut FOURIER, Laboratoire de Mathématiques associé au C.N.R.S., B.P. 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France.

Le résultat que nous allons obtenir sera valable lorsque H est un corps et X simple. Il semble qu'il y ait peu d'exemples de variétés abéliennes X avec $h_X > 1$ pour lesquelles on puisse déterminer explicitement ce nombre.

2. Algèbres de quaternions et surfaces abéliennes

2.1. — Rappelons brièvement, et dans un cas très particulier, une construction de SHIMURA [2].

Soient H une algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}$ et $x \mapsto x'$ l'involution canonique. Pour $x \in H$, on note $N(x) = xx'$ la *norme* de x et $t(x) = x + x'$ la *trace* de x. On suppose dans la suite que H est un corps et $H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong M_2(\mathbb{R})$. Appelons S l'ensemble des nombres premiers p qui sont ramifiés dans H, *i.e.* le complété p-adique H_p est un corps. On sait que S est fini avec un cardinal pair. Si I est un idéal (resp. un ordre, maximal, d'Eichler) de H, l'adhérence I_p de I dans H_p est un idéal (resp. un ordre maximal, d'Eichler) de H_p. La description qui suit est classique.

a) Si H_p est l'unique algèbre à division sur $\mathbb{Q}_p$, le corps H_p a un unique ordre maximal qui est le sous anneau compact maximal de H_p.

b) $H_p = M_2(\mathbb{Q}_p)$. Tout ordre maximal (resp. d'Eichler) est conjugué à l'ordre $M_2(\mathbb{Z}_p)$, resp. à l'ordre

$$\mathcal{O}_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_p) \mid c \in p^n\mathbb{Z}_p \right\}.$$

L'entier n est parfaitement déterminé; on appelle p^n le *niveau* de $\mathcal{O}_n$.

Pour un ordre d'Eichler $\mathcal{O}$ de H, le niveau p^{n_p} de $\mathcal{O}_p$ ($p \notin S$) est égal à un pour presque tout p; on appelle $N = \prod_p p^{n_p}$ le *niveau* de $\mathcal{O}$. L'algèbre H étant indéfinie, on sait (Eichler) que les ordres d'Eichler de même niveau sont deux à deux conjugués et principaux. Le discriminant de $\mathcal{O}$ est $D = Nd$, où $d = \prod_{p \in S} p$.

Considérons une involution $\alpha \mapsto \alpha^*$ de H. Il existe $\rho \in H$ avec $\rho^2 \in \mathbb{Q}$, déterminé à un facteur rationnel près, tel que $\alpha^* = \rho^{-1}\alpha'\rho$. La forme quadratique $\alpha \mapsto t\,(\alpha\alpha^*)$ est définie positive si et seulement si $\rho^2 < 0$ [2]; on dit que l'involution est *positive.*

2.2. — Fixons un isomorphisme $H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} M_2(\mathbb{R})$, *i.e.* une représentation réelle $\chi : H \to M_2(\mathbb{R})$. Le plongement de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ permet de faire agir H sur $\mathbb{C}^2$. Considérons un ordre $\mathcal{O}$ de H, maximal ou bien d'Eichler. Si $\tau \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Im}\tau > 0$, posons $\omega = {}^t[\tau, 1] \in \mathbb{C}^2$. L'application $\alpha \mapsto \chi(\alpha)\omega$ est une bijection $\mathbb{R}$-linéaire de $H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ sur $\mathbb{C}^2$ et l'image de $\mathcal{O}$

$$D_\tau = \{\chi(\alpha)\omega \mid \alpha \in \mathcal{O}\}$$

est un réseau dans $\mathbb{C}^2$.

Considérons le tore complexe $X_\tau := \mathbb{C}^2/D_\tau$; à isomorphisme près, il ne dépend que de la classe de conjugaison de $\mathcal{O}$, c'est-à-dire du niveau. La construction montre que, si $\alpha \in \mathcal{O}$, $\chi(\alpha)$ définit un endomorphisme de X_τ. On obtient ainsi une injection $\chi : H \to \mathrm{End}^0(X)$ et $\chi(\alpha) \in \mathrm{End}(X)$ si et seulement si $\alpha \in \mathcal{O}$ (on note X à la place de X_τ). Rappelons que $\mathrm{End}^0(X)$ désigne la $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathrm{End}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

La structure complexe de $\mathbb{C}^2$ détermine un élément $\mu \in H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ par

$$\sqrt{-1}\xi = \chi(\alpha\mu)\omega \quad \text{si } \xi = \chi(\alpha)\omega.$$

On a $\mu^2 = -1$ et $\mu' = -\mu$. L'élément μ, qui est déterminé par le choix de τ, détermine ω (*i.e.* τ). En effet, on observe facilement que ω est un vecteur propre relativement à la valeur propre $+i$ de l'opérateur $\chi(\mu)$. Nous dirons, pour abréger, que $X(= X_\tau)$ est le tore complexe associé à $(H, \mathcal{O}, \mu)$. Pour préciser la dépendance de X_τ en fonction de τ, on remarquera que deux éléments μ et μ_1 conjugués par une unité de $\mathcal{O}(\exists \varepsilon \in \mathcal{O}^*, \mu_1 = \varepsilon\mu\varepsilon^{-1})$ définissent des tores complexes isomorphes; pour plus de détails voir [2].

PROPOSITION 1. — *Soit X un tore complexe associé à un triplet $(H, \mathcal{O}, \mu)$. Alors X est simple si et seulement si $\mathbb{R}(\mu) \cap H = \mathbb{Q}$.*

Preuve. — La non simplicité de X signifie qu'il existe une droite ℓ de $\mathbb{C}^2$ telle que $D \cap \ell$ est un réseau de ℓ (D est le réseau des périodes de X). Il revient au même de dire qu'il existe $\xi \in \mathbb{C}^2$ et $z \in \mathbb{C}^*$, avec z et $z\xi \in D$ et z non nul, c'est-à-dire ξ et $z\xi$ sont $\mathbb{R}$ indépendants. Supposons $\xi = \chi(\alpha)\omega$ où $\alpha \in \mathcal{O}$ et $z = p + iq$ $(q \neq 0)$. On a

$$z\xi = \chi(\alpha)(z\omega) = \chi\big(\alpha(p + q\mu)\big)\omega.$$

On a donc $\beta := \alpha(p + q\mu) \in \mathcal{O}$. L'algèbre H étant une algèbre à division, on tire de là :

$$p + q\mu = \alpha^{-1}\beta \in \mathbb{R}(\mu) \cap H$$

et $p + q\mu \notin \mathbb{Q}$. La réciproque est claire.

Ainsi, par la PROPOSITION 1, un “membre général” de la famille X_τ est simple. Dans les paragraphes qui suivent, nous supposerons cette hypothèse satisfaite.

PROPOSITION 2. — *La représentation χ fournit des isomorphismes $H \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}^0(X)$ et $\mathcal{O} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(X)$.*

Preuve. — Ceci découle de suite du fait que $\mathrm{End}^0(X)$ est une algèbre à division.

Remarque. — Lorsque la condition de la proposition n'est pas satisfaite, $\mathbb{R}(\mu) \cap H$ est un sous-corps quadratique imaginaire de H. Si K est ce sous-corps, on vérifie que $\mathrm{End}^0(X)$ est isomorphe à $M_2(K)$.

3. Le groupe de Neron-Severi

3.1. — Dans [2], SHIMURA décrit les polarisations de X au moyen d'éléments $\rho \in H$ avec $\rho^2 < 0$. Le même principe va nous conduire à une description du groupe $NS(X)$ ou de l'espace vectoriel $NS(X) \otimes \mathbb{Q}$ avec sa forme d'intersection.

Il est bien connu que le groupe $NS(X)$ s'identifie au groupe des formes $\mathbb{R}$-bilinéaires et alternées sur $V = \mathbb{C}^2$ qui sont entières sur le réseau D. Si $L \in \mathrm{Pic}(X)$ représente $\ell \in NS(X)$, la forme associée à ℓ coïncide avec la forme de Riemann E de L. Comme on suppose X simple, la forme $E(= E_\ell)$ est non dégénérée si $\ell \neq 0$. L'involution de Rosati associée à ℓ, *i.e.* l'adjonction relativement à E, induit une involution $\alpha \mapsto \alpha^*$ sur H, distincte de l'involution canonique. Il existe $\rho \in H$ avec $\rho' = -\rho$ tel que $\alpha^* = \rho^{-1}\alpha'\rho$. On peut en fait choisir ρ de telle sorte que, pour α et β dans H, on ait

$$E_\ell(\alpha, \beta) = t(\rho\alpha\beta').$$

Dans ce cas, ρ est déterminé de manière unique par ℓ. Notons H_0 le sous-espace vectoriel des quaternions purs. L'application qui à ℓ associe l'élément ρ précédent est un isomorphisme de $NS^0(X)$ sur H_0. Dans la suite, nous identifierons ces deux objets. On notera que le cône ample coïncide avec $\{\rho \in H_0 \mid \rho^2 < 0\}$. Soit $\rho \in NS^0(X)$. Alors $\rho \in NS(X)$ si et seulement si $t(\rho\alpha\beta') \in \mathbb{Z}$ pour α et $\beta \in \mathcal{O}$, c'est-à-dire si ρ appartient au module complémentaire (différente inverse) de $\mathcal{O}$, module que nous noterons dans la suite $\overline{\mathcal{O}}$.

3.2. — On note $(\alpha \cdot \beta)$ la forme intersection sur $NS^0(X)$.

PROPOSITION 3. — *Soit D le discriminant réduit de l'ordre $\mathcal{O}$. Si α et $\beta \in NS^0(X)$, on a*

i) $(\alpha \cdot \beta) = -D(\alpha\beta + \beta\alpha)$;
ii) $(\alpha^2) = 2DN(\alpha)$.

Preuve. — Il suffit de vérifier (ii) pour tout $\alpha \in \mathcal{O}$, c'est-à-dire pour une isogénie. Le degré de α est égal à $N(\alpha)^2$. L'opération "image réciproque" par α définit un endomorphisme de $NS(X)$, qui, compte tenu des identifications permises, est

$$\alpha^{-1}(\rho) = \alpha'\rho\alpha.$$

Alors, pour ρ_1, $\rho_2 \in NS^0(X)$, et pour $\alpha \in H$, on a

$$\left(\alpha^{-1}\rho_1\alpha \cdot \alpha^{-1}\rho_2\alpha\right) = \left(\rho_1 \cdot \rho_2\right).$$

Il découle facilement de cette propriété que la forme d'intersection sur $NS^0(X)$ est proportionnelle à la forme bilinéaire sur H_0 déduite de la norme. Il y a donc un $c \in \mathbb{Q}$, $c > 0$, tel que pour tout $\alpha \in H_0$

$$(\alpha^2) = cN(\alpha).$$

Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X ; par le théorème de Riemann-Roch $\chi(\mathcal{L}) = (\mathcal{L}^2)/2$, et, lorsque $\mathcal{L}$ est ample,

$$\chi(\mathcal{L}) = h^0(\mathcal{L}) = \sqrt{\operatorname{disc}(E^{\mathcal{L}})},$$

où disc() désigne le discriminant. Si $[\mathcal{L}] = \rho$ appartient au cône ample de $NS^0(X)$, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Disc}(E_\rho) &= \left|\overline{\mathcal{O}}/\rho\mathcal{O}\right| \\ &= \left|\overline{\mathcal{O}}/\rho\overline{\mathcal{O}}\right|\left|\overline{\mathcal{O}}/\mathcal{O}\right| = N(\rho)^2D^2\end{aligned}$$

d'où il vient $(\rho^2) = 2DN(\rho)$, c'est-à-dire $c = 2D$.

Remarque. — Lorsque l'hypothèse de généricité de la PROPOSITION 1 est non satisfaite, on peut identifier le $\mathbb{Q}$ espace vectoriel $NS(X) \otimes \mathbb{Q}$ avec l'espace vectoriel des formes hermitiennes binaires à coefficients dans le corps quadratique imaginaire K.

4. Calcul du nombre de classes

4.1. — Considérons une surface abélienne X et soit C une courbe sur X avec $(C^2) = 2$. On sait que, soit C est irréductible lisse (de genre 2) et $X \cong \operatorname{Jac}(C)$, soit C est somme de deux courbes elliptiques. Ce dernier cas ne pouvant se produire si X est simple. Ainsi, sous les hypothèses des paragraphes précédents, si $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic}(X)$ avec $\mathcal{L}^2 = 2$, il existe une courbe C lisse, irréductible et de genre 2 telle que $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(\pm C)$. La courbe C est déterminée à une translation près par $\rho = c_1(\mathcal{L})$. Supposons maintenant que C_1 et C_2 sont deux courbes irréductibles lisses et de genre 2 telles que $\operatorname{Jac}(C_1) \cong \operatorname{Jac}(C_2) \cong X$. Si on identifie C_1 et C_2 avec des courbes de X, alors $C_1 \cong C_2$ si et seulement s'il existe $f \in \operatorname{Aut}(X)$ tel que $f(C_1) = C_2$ à une translation près. Cela résulte par exemple du théorème de Torelli. Si ρ_i est la classe de C_i dans $NS(X) = \overline{\mathcal{O}} \cap H_0$, l'isomorphisme $C_1 \cong C_2$

équivaut alors à l'existence d'une unité $\alpha \in \mathcal{O}^*$ telle que $\rho_2 = \alpha' \rho_1 \alpha$. Désignons par G l'ensemble suivant

$$\begin{aligned} G &= \left\{\rho \in \overline{\mathcal{O}} \mid \rho' = -\rho \text{ et } (\rho^2) = 2\right\} \\ &= \left\{\rho \in \overline{\mathcal{O}} \mid \rho' = -\rho \text{ et } N(\rho) = D^{-1}\right\}. \end{aligned}$$

Si $\rho \in G$ alors $-\rho \in G$. Il est clair que pour $\rho \in G$ et $\alpha \in \mathcal{O}^*$, $(\rho, \alpha) \mapsto \alpha' \rho \alpha$ définit une opération de $\mathcal{O}^*$ sur G. Notons $G|_{\mathcal{O}^*}$ l'ensemble des classes.

PROPOSITION 4. — *Le nombre de classes h_X de X est donné par*

$$2h_X = \operatorname{Card}(G|_{\mathcal{O}^*}).$$

L'ordre $\mathcal{O}$ est principal, alors $\rho \in G$ si et seulement si ρ engendre l'idéal $\overline{\mathcal{O}}$ et si $\rho' = -\rho$. Il est plus commode de travailler avec la différente $\mathcal{V} = \overline{\mathcal{O}}^{-1}$. L'application $\rho \mapsto \rho^{-1}$ applique G sur l'ensemble des $\rho \in \mathcal{V}$ de polynôme caractéristique $T^2 + D$. En particulier, on a :

$$\begin{aligned} 2h_X = {} & \textit{nombre des classes de conjugaisons modulo } \mathcal{O}^* \\ & \textit{d'éléments } \rho \in \mathcal{V} \textit{ de polynôme caractéristique } T^2 + D. \end{aligned}$$

Un élément de ce type définit un plongement du corps quadratique imaginaire $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ dans H tel que l'image ρ de $\sqrt{-D}$ soit un élément de $\mathcal{O}$. Nous nous autorisons à identifier $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ à son image $\mathbb{Q}(\rho)$ dans H. Posons $B = \mathbb{Z}[\sqrt{-D}]$, et, si $D \equiv -1 \pmod 4$, $C = \mathbb{Z}[1 + \sqrt{-D}/2]$. L'ordre maximal de $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ est B si $D \not\equiv -1 \pmod 4$ et C si $D \equiv -1 \pmod 4$. On notera que, dans tous les cas, $\mathcal{O} \cap \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ contient B, donc

$$(*) \qquad \mathcal{O} \cap \mathbb{Q}(\sqrt{-D}) = \begin{cases} B & \text{si } D \not\equiv -1 \pmod 4, \\ B \text{ ou } C & \text{si } D \equiv -1 \pmod 4. \end{cases}$$

Il est clair que les classes de conjugaison modulo $\mathcal{O}^*$ d'éléments de $\mathcal{O}$ de polynôme caractéristique $T^2 + D$ sont en bijection avec les classes de conjugaison des plongements de $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ dans H soumis à (*). Il s'agit de déterminer parmi ces plongements ceux dont l'image ρ de $\sqrt{-D}$ appartient à $\mathcal{V}$.

Pour tout discriminant fondamental D, on note h_D le nombre de classes d'idéaux du corps quadratique de discriminant D, *cf.* la formule de DIRICHLET [5, p. 79].

4.2. — Retournons à l'algèbre de quaternions $H/\mathbb{Q}$; soit d son discriminant. Soit $\mathcal{O}$ un ordre d'Eichler de niveau N sans facteur carré ; le discriminant de $\mathcal{O}$ est $D = Nd$.

THÉORÈME. — *Soit X une surface abélienne simple associée à l'ordre d'Eichler $\mathcal{O}$, de l'algèbre de quaternions indéfinie H. Le nombre h_X des classes de courbe de genre 2 contenues dans X (dont X est la jacobienne) est donné par*

$$h_X = \begin{cases} \frac{1}{2}h_{-4D} & \text{si } D \not\equiv -1 \pmod 4, \\ h_{-D} & \text{si } D \equiv -1 \pmod 8, \\ 2d_{-D} & \text{si } D \equiv -3 \pmod 8, \end{cases}$$

où $D = Nd$ est le discriminant de $\mathcal{O}$.

4.3. Preuve du théorème. — Déterminons les composants locaux $\mathcal{V}_p$ de la différente $\mathcal{V}$ de $\mathcal{O}$. Si $\rho \in S$, $\mathcal{O}_p$ est l'unique ordre maximal du corps de quaternions H_p et $\mathcal{V}_p$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_p$. Si $p \mid N$, N étant sans facteur carré, on peut après conjugaison supposer que (paragraphe 2)

$$\mathcal{O}_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_p) \mid c \in p\mathbb{Z}_p \right\}.$$

La différente $\mathcal{V}_p$ de $\mathcal{O}_p$ est l'idéal entier engendré par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$.

Considérons maintenant un plongement de $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ dans H tel que l'image ρ de $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ appartienne à $\mathcal{O}$. Si p est un nombre premier qui divise d, $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ est ramifié sur $\mathbb{Q}_p$, et il est facile de voir que ρ est une uniformisante de H_p, *i.e.* engendre l'idéal maximal. Si $p \mid N$ et $H_p = M_2(\mathbb{Q}_p)$, on peut supposer que $\rho = \begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_p$. Comme le polynôme caractéristique de ρ est $T^2 + D$, on a

$$a + d = 0 \quad \text{et} \quad a^2 + pbc = -D \in p\mathbb{Z}_p.$$

Alors a et $d \in p\mathbb{Z}_p$ et $\rho \in \mathcal{V}_p$. Si $(p, D) = 1$, $\mathcal{O}_p$ est un ordre maximal de $M_2(\mathbb{Q}_p)$ et ρ est une unité de $\mathcal{O}_p$.

Appelons N_B (resp. N_C) le nombre des classes de plongements maximaux de B (resp. C) dans $\mathcal{O}$ [4]. Il découle de la discussion qui précède l'énoncé du théorème que

$$2h_X = \begin{cases} N_B & \text{si } D \not\equiv -1 \pmod 4, \\ N_B + N_C & \text{si } D \equiv -1 \pmod 4. \end{cases}$$

Le calcul du nombre N_B (resp. N_C) se fait par une spécialisation de la formule des traces d'Eichler. Si on tient compte du fait que l'ordre $\mathcal{O}$ est principal, la formule est la suivante [4, p. 92]

$$N_B = h_B \prod_p m_p(B)$$

et la formule analogue pour N_C. Dans le membre de droite $m_p(B)$ désigne le nombre de classes modulo $\mathcal{O}_p^*$ de plongements locaux maximaux de B_p dans $\mathcal{O}_p$.

Si $(p,D) = 1$, $\mathcal{O}_p$ est maximal et $H_p = M_2(\mathbb{Q}_p)$; alors $m_p(B) = m_p(c) = 1$ (*loc. cit.* théorème 3.2). Si $p \mid d$ et $(p,N) = 1$, l'extension $\mathbb{Q}_p(\sqrt{-D})$ de $\mathbb{Q}_p$ est ramifiée, par suite $m_p(B) = m_p(C) = 1$. Si $p \mid N$, on a $m_p(B) = 1$ lorsque B_p est maximal. Mais l'ordre B_p est non maximal que pour $p = 2$ et $Nd \equiv -1 \pmod 4$, cela ne peut donc se produire si $p \mid N$. Par suite, dans tous les cas $m_p(B) = m_p(C) = 1$. On obtient ainsi $N_B = h_B$ et $N_C = h_C$, où h_B (resp. h_C) est le nombre de classes d'idéaux de l'ordre B (resp. C). Pour déterminer h_B lorsque B n'est pas maximal on peut utiliser la formule de DEDEKIND [5, p. 74]. Le conducteur de l'ordre B étant $2C$, cette formule s'écrit

$$\frac{h_B}{h_C} = 2\left(C^* : B^*\right)^{-1}\left(1 - \tfrac{1}{2}\chi_{-D}(2)\right)$$

où B^* et C^* sont les groupes d'unités de B et C. Le cas $D = 3$ est exclu puisque $D = Nd$ et $d = \prod_{p\in S} p$, l'ensemble S des nombres premiers ramifiés ayant un cardinal pair. La valeur du symbole $\chi_{-D}(2)$ est [5, p. 38]

$$\chi_{-D}(2) = \begin{cases} 1 & \text{si } D \equiv -1 \pmod 8, \\ -1 & \text{si } D \equiv -5 \pmod 8. \end{cases}$$

Par suite on obtient

$$h_B = \begin{cases} h_C & \text{si } D \equiv -1 \pmod 8, \\ 3h_C & \text{si } D \equiv -5 \pmod 8, \end{cases}$$

d'où $h_X = h_{-D}$ si $D \equiv -1 \pmod 8$ et $h_X = 2h_{-D}$ si $D \equiv -5 \pmod 8$.

Remarque. — De manière analogue au cas réductible, on a $h_X \to \infty$ lorsque $D \to \infty$ [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] HAYASHIDA (T.) and NISHI (M.). — Existence of curves of genus two on a product of two elliptic curves, *J. Math. Soc. Japan*, t. **17**, 1967, p. 1–16.

[2] SHIMURA (G.). — On the theory of automorphic functions, *Ann. of Math.*, t. **70**, 1959, p. 101–144.

[3] SHIODA (T.) and MITANI (N.). — Singular abelian surfaces and binary quadratic forms, *Lectures Notes in Math.*, **412**, 1974.

[4] VIGNERAS (M.F.). — Arithmétique des Algèbres de Quaternions, *Lectures Notes in Math.*, **800**, 1980.

[5] ZAGIER (D.). — *Zetafunktionen und quadratische körper.* — Springer Verlag, 1981.