BULLETIN DE LA S. M. F.

AHMED JEDDI

Un cas d'indépendance des courants polaires de $f^{\lambda+m}\bar{f}^{\lambda-m}$

Bulletin de la S. M. F., tome 119, n° 2 (1991), p. 127-139

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1991__119_2_127_0>

Bull. Soc. math. France,
119, 1991, p. 127–139.

UN CAS D'INDÉPENDANCE DES COURANTS POLAIRES DE $f^{\lambda+m}\bar{f}^{\lambda-m}$

PAR

AHMED JEDDI (*)

RÉSUMÉ. — Dans ce travail, nous montrons que si f est un germe en 0 de $\mathbb{C}^{n+1}$ d'une fonction holomorphe appartenant à son idéal jacobien $J_f = \bigl(\partial f/\partial z_i\bigr)_{0\le i\le n}$, alors les courants polaires de type (1,1) du prolongement méromorphe de $f^{\lambda+m}\bar{f}^{\lambda-m}\,\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\bar{f} \wedge \square$ sont linéairement indépendants. Comme application de ce résultat, nous donnons une généralisation du théorème classique de E. Borel.

ABSTRACT. — In this work, we show that for a germ f of holomorphic function at 0 in $\mathbb{C}^{n+1}$ such that f is in its jacobian ideal $J_f = \bigl(\partial f/\partial z_i\bigr)_{0\le i\le n}$, the polar currents of type (1,1) of the meromorphic extension of $f^{\lambda+m}\bar{f}^{\lambda-m}\,\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\bar{f} \wedge \square$ are linearly independent. As application of this result, we give a generalization of the classical E. Borel theorem.

Mots clés : courant, fonction holomorphe, prolongement méromorphe, singularité.

Remerciements

Je remercie le Professeur D. BARLET pour le temps précieux qu'il m'a accordé durant mon séjour à Nancy et pour ses encouragements. Je remercie également le Département de Mathématiques de Nancy I pour son hospitalité et le rapporteur pour ses critiques constructives.

(*) Texte reçu le 17 avril 1990, révisé le 14 janvier 1991.
A. JEDDI, Département de Mathématiques et Informatique, Faculté des Sciences, Université Mohammed V, BP 1014, Rabat, Maroc. Adresse actuelle : Université Nancy I, Département de Mathématiques, BP 239, 54506 Vandœuvre les Nancy Cedex.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1991/127/$ 5.00

Introduction

Soit $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ un germe d'une fonction holomorphe telle que $\mathrm{d}f(0) = 0$. Nous notons également $f : X \to D$ un représentant de Milnor de ce germe (voir [M]). Nous pouvons supposer que sur X on a :

$$\{\mathrm{d}f = 0\} \subset \{f = 0\}.$$

Dans cette situation, pour tout φ dans l'espace $C_c^{(n,n)}(X)$ des formes C^∞ de type (n,n) à support compact dans X, la fonction $F_\varphi(s) = \int_{f=s} \varphi$ admet le développement asymptotique suivant :

$$\text{(I)} \qquad F_\varphi(s) \underset{s\to 0}{\sim} \widetilde{F}_\varphi(s) := \sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \\ 0\le i\le r, 0\le k\le n}} T_{p,q}^{i,k}(\varphi) s^p \bar{s}^q |s|^{2u_i} \big(\operatorname{Log}|s|\big)^k,$$

où $R = \{u_0 = 0, u_1, \dots, u_r\}$ est une suite finie de nombres rationnels, contenus dans $[0,1[$, associés à la singularité de f en 0 et où les $T_{p,q}^{i,k}$ sont des courants de type (1,1). Ce résultat est montré par D. BARLET dans [B] et redémontré conjointement par le même auteur et H.M. MAIRE dans [B-M].

La transformation de Mellin complexe permet de voir que les courants polaires de type (1,1) du prolongement méromorphe de

$$f^{\lambda+m} \bar{f}^{\lambda-m} \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\bar{f} \wedge \square$$

sont justement (à des constantes près) les courants $T_{p,q}^{i,k}$ du développement asymptotique (I).

Notons par θ l'ensemble $\{(i,k,p,q) \, ; \, T_{p,q}^{i,k} \neq 0\}$ et par J_f l'idéal jacobien de f. Le but de ce travail est de montrer que sous l'hypothèse :

$$\text{(H)} \qquad f \in J_f = \Big(\frac{\partial f}{\partial z_j}\Big)_{0\le j\le n},$$

la famille $(T_{p,q}^{i,k})_{(i,k,p,q)\in\theta}$ est libre.

Notre démonstration est inspirée de celle donnée par H. RUBENTHALER pour un polynôme homogène à variables réelles (voir [R]). Remarquons que dans le cas où f est à singularité isolée, notre hypothèse (H) est équivalente au fait que f se ramène (par un changement de variables biholomorphe) à un polynôme quasi-homogène (voir [S]).

Notre démarche est la suivante : nous montrons dans le § 1 que notre résultat est vrai sous l'hypothèse technique (H′). Dans le § 2, nous montrons que l'hypothèse (H) entraîne l'hypothèse (H′). Enfin, dans le § 3, nous donnons une généralisation du théorème classique de E. BOREL, que nous établissons par un argument d'algèbre. Nous donnons également dans le § 3 une autre démonstration de cette généralisation qui utilise un critère de surjectivité entre espaces de Fréchet. Cela nécessite une estimation des ordres des courants $T^{i,k}_{p,q}$ (LEMME 3.3), que nous établissons en utilisant un résultat dû à D. BARLET (voir Appendice).

1. Indépendance linéaire des courants $(T^{i,k}_{p,q})_{(i,k,p,q)\in\theta}$ sous l'hypothèse (H′).

Rappelons quelques résultats de [B-M].

Pour n un entier naturel non nul et une suite finie de nombres rationnels $R=\{u_0=0,u_1\ldots,u_r\}$ dans $[0,1[$, on note :

$$I(R,n)=\{(u_i,k,p,q)\in R\times\mathbb{N}^3\ ;\ 0\le k\le n\}.$$

a) On note par $\mathrm{ASY}_{R,n}(\mathbb{C}^*)$ l'espace vectoriel formé par les fonctions $g:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$ telles que :

i) g est C^∞ sur $\mathbb{C}^*$;

ii) Le support de g est borné;

iii) $g(s)\underset{s\to 0}{\sim}\displaystyle\sum_{(u_i,k,p,q)\in I(R,n)} a^{i,k}_{p,q}s^p\bar{s}^q|s|^{2u_i}(\mathrm{Log}\,|s|)^k$, $a^{i,k}_{p,q}\in\mathbb{C}$.

b) On note par $\mathrm{MERO}_{R,n}(\mathbb{C}\times\frac12\mathbb{Z})$ l'espace vectoriel formé par les fonctions méromorphes $F:\mathbb{C}\times\frac12\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ telles que :

i′) L'ensemble des pôles de F est contenu dans

$$\bigcup_{0\le i\le r}\{(\lambda,m)\in\mathbb{C}\times\tfrac12\mathbb{Z}\ ;\ -(\lambda+u_i+|m|)\in\mathbb{N}\}\cdot$$

ii′) Il existe une constante $A>0$ telle que

$$\sup_{\substack{\sigma>-N,\ \tau\in\mathbb{R},\\ m\in\frac12\mathbb{Z},\ \sigma^2+\tau^2\ge N^2+1}} A^{-2\sigma}\big(1+|\tau|+|m|\big)^N\big|F(\sigma+i\tau,m)\big|<+\infty.$$

Pour tout $g\in\mathrm{ASY}_{R,n}(\mathbb{C}^*)$, la fonction :

$$\lambda\in\mathbb{C}_0=\{\lambda\in\mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}\,\lambda>0\}\mapsto\tfrac12\sqrt{-1}\int_{\mathbb{C}_0}s^{\lambda+m-1}\bar{s}^{\lambda-m-1}g(s)\mathrm{d}s\wedge\mathrm{d}\bar{s}$$

se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, qui est un élément de $\mathrm{MERO}_{R,n}(\mathbb{C}\times\frac{1}{2}\mathbb{Z})$, qu'on note par M_g. La transformation de Mellin ainsi obtenue :

$$M : \mathrm{ASY}_{R,n}(\mathbb{C}^*) \longrightarrow \mathrm{MERO}_{R,n}(\mathbb{C}\times\tfrac{1}{2}\mathbb{Z}),$$
$$g \mapsto M_g$$

est un isomorphisme.

Soit $f : X \to D$ un représentant de Milnor d'un germe

$$f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0) \qquad (n \geq 1)$$

de fonction holomorphe telle que $\mathrm{d}f(0) = 0$. Ceci veut dire que X est l'intersection d'une boule $B(0,\varepsilon) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ assez petite avec l'image réciproque d'un disque assez petit $D(0,\eta)$, l'ouvert X est de Stein contractible et la fonction f induit une fibration C^∞ localement triviale de $X - f^{-1}(0)$ sur $D^* = D - \{0\}$. Dans cette situation, il existe une suite finie R telle que la fonction $F_\varphi(s) = \int_{f=s} \varphi$ soit dans $\mathrm{ASY}_{R,n}(\mathbb{C}^*)$, pour toute forme φ dans $C_c^{(n,n)}(X)$. Le fait que $\mathrm{d}f(0) = 0$ implique que la suite R contient d'autres rationnels que 0; la preuve de cette assertion est due à D. BARLET (voir sa conférence†). La transformation de Mellin de F_φ est donnée par le prolongement méromorphe :

$$M_{F_\varphi}(\lambda, m) = \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\int_X f^{\lambda+m-1}\bar{f}^{\lambda-m-1}\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\bar{f} \wedge \varphi.$$

Nous notons par $B_{p,q}^{i,k}$ le courant de type $(1,1)$ qui est donné par le coefficient de $(\lambda + u_i + \frac{1}{2}(p+q))^{-k}$ dans le développement de Laurent de M_{F_φ} au point $(-u_i - \frac{1}{2}(p+q), -\frac{1}{2}(p-q))$. On a la relation :

$$B_{p,q}^{i,k} = 2\pi(-1)^{k-1}(k-1)!\,2^{-k}\,T_{p,q}^{i,k-1}.$$

Considérons l'hypothèse suivante :

(H′) *Pour tout ouvert relativement compact $\Omega \subset X$, il existe un voisinage ouvert U de $1 \in \mathbb{C}^*$ satisfaisant la condition suivante : $\forall \xi \in U$, il existe $\xi_* : C_c^{(n,n)}(\Omega) \to C_c^{(n,n)}(X)$, linéaire vérifiant*

$$\xi_*\big(B_{p,q}^{i,k}(\varphi)\big) = \xi^{u_i+p}\bar{\xi}^{u_i+q} \sum_{k\leq h\leq n+1} \frac{\big(\log|\xi|^{-2}\big)^{h-k}}{(h-k)!} B_{p,q}^{i,h}(\varphi),$$

pour toute forme φ dans $\mathbb{C}^{(n,n)}(\Omega)$, $\forall (i,k,p,q)$.

---

† Monodromy and poles of $\int_X |f|^{2l}$. Complex Analysis and Algebraic Geometry. Göttingen (1985), Lectures Notes 1194.

On a le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Sous l'hypothèse* (H′), *la famille des courants* $(T_{p,q}^{i,k})_{i,k,p,q)\in\theta}$ *est libre.*

Démonstration. — Nous allons utiliser les courants $B_{p,q}^{i,k}$. Introduisons l'ensemble :

$$\tilde{\theta} = \left\{(i,k,p,q) \in [0,r] \times [1,n+1] \times \mathbb{N}^2 \ ; \ B_{p,q}^{i,k} \neq 0\right\}$$

et posons

$$k(i,p,q) = \max\left\{h \in [1,n+1] \ ; \ (i,h,p,q) \in \tilde{\theta}\right\},$$

pour $(i,p,q) \in \mathrm{pr}_2(\tilde{\theta})$, où pr_2 désigne la projection de $\tilde{\theta}$ sur $[0,r] \times \mathbb{N}^2$.

Soit F une partie finie de $\tilde{\theta}$ telle que l'on ait :

$$\sum_{(i,k,p,q)\in F} a_{p,q}^{i,k} B_{p,q}^{i,k} = 0, \qquad a_{p,q}^{i,k} \in \mathbb{C}.$$

En posant au besoin $a_{p,q}^{i,k} = 0$, on peut supposer que $(i,k,p,q) \in F$ pour tout $k \leq k(i,p,q)$ dès que $(i,p,q) \in \mathrm{pr}_2(F)$. L'hypothèse (H′) entraîne (en utilisant la linéarité de ξ_*) que pour tout φ dans $C_c^{(n,n)}(\Omega)$, on a :

$$\sum_{(i,k,p,q)\in F} a_{p,q}^{i,k} \xi^{u_i+p} \bar{\xi}^{u_i+q} \sum_{k\leq h\leq k(i,p,q)} \frac{\left(\log|\xi|^{-2}\right)^{h-k}}{(h-k)\,!} B_{p,q}^{i,h}(\varphi) = 0, \quad \forall \xi \in U.$$

Comme le membre de gauche est une fonction analytique réelle de $\xi \in \mathbb{C}^*$, cette relation est vraie pour tout $\xi \in \mathbb{C}^*$. Puisque la famille de fonctions sur $\mathbb{C}^*$ donnée par $\xi \mapsto \xi^{u_i+p}\bar{\xi}^{u_i+q}(\log|\xi|)^k$ est libre (cf. remarque (1.3) de [B–M]), il vient, pour tout $(i,p,q) \in \mathrm{pr}_2(F)$:

$$\begin{cases} a_{p,q}^{i,1} B_{p,q}^{i,k(i,p,q)}(\varphi) = 0, \\ a_{p,q}^{i,1} B_{p,q}^{i,k(i,p,q)-1}(\varphi) + a_{p,q}^{i,2} B_{p,q}^{i,k(i,p,q)}(\varphi) = 0, \\ \dots \\ a_{p,q}^{i,1} B_{p,q}^{i,1}(\varphi) + a_{p,q}^{i,2} B_{p,q}^{i,2}(\varphi) + \cdots + a_{p,q}^{i,k(i,p,q)} B_{p,q}^{i,k(i,p,q)}(\varphi) = 0 \end{cases}$$

pour tout $\varphi \in C_c^{(n,n)}(\Omega)$.

Ce système est de Cramer pour $(a_{p,q}^{i,k})_{1\le k\le k(i,p,q)}$ si $B_{p,q}^{i,k(i,p,q)}(\varphi) \neq 0$, or on peut choisir Ω pour qu'il existe de telles φ, puisque $B_{p,q}^{i,k(i,p,q)} \neq 0$. Finalement, on a $a_{p,q}^{i,k} = 0$, $\forall (i,p,q) \in \mathrm{pr}_2(F)$, $\forall k \in [1, k(i,p,q)]$. Nous avons ainsi fini la démonstration du THÉORÈME 1.1. □

2. L'hypothèse (H) entraîne l'hypothèse (H′).

Rappelons que notre hypothèse (H) est le fait que f soit dans son idéal jacobien $J_f = (\partial f/\partial z_i)_{0\le i\le n}$. Nous pouvons donc supposer qu'il existe une famille $(a_i)_{0\le i\le n}$ des fonctions holomorphes sur X, telle que

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i(z)\frac{\partial}{\partial z_i} f(z).$$

Ceci veut dire que si l'on note W le champ de vecteurs $\sum_{i=0}^{n} a_i(z)\partial/\partial z_i$, on a $W(f) = f$.

On considère le flot complexe associé à W. Les courbes intégrales :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_z(t) = W\big(\gamma_z(t)\big), & t \in \mathbb{C}, \\ \gamma_z(0) = z, \end{cases}$$

donnent, pour tout ouvert relativement compact Ω de X contenant 0, un difféomorphisme

$$\Gamma_t : \Omega \xrightarrow{\sim} \Gamma_t(\Omega) \subset X, \Gamma_t(z) = \gamma_z(t)$$

pour tout $|t| < \alpha$, α réel petit (voir par exemple [S]).

LEMME 2.1. — *Pour tout ouvert relativement compact Ω de X contenant* 0, *il existe un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ autour de* 1 *tel que pour $\xi \in U$, on ait un difféomorphisme* :

$$D_\xi : \Omega \xrightarrow{\sim} D_\xi(\Omega) \subset X$$

vérifiant :

i) $f(D_\xi(z)) = \xi^{-1} f(z)$;

ii) $D_\xi\{f = 0\} \subset \{f = 0\}$.

Démonstration. — Pour $|t| < \alpha$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(\Gamma_t(z)\big) &= \big\langle \mathrm{d}f\big(\Gamma_t(z)\big), W\big(\Gamma_t(z)\big)\big\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f(\Gamma_t(z))}{\partial z_i} a_i\big(\Gamma_t(z)\big) = f\big(\Gamma_t(z)\big),\end{aligned}$$

d'où $f(\Gamma_t(z)) = \mathrm{e}^t f(z)$.

Il suffit maintenant de prendre $U = \{\exp t,\ |t| < \alpha\}$ et $D_\xi = \Gamma_{-\operatorname{Log}\xi}$. □

Nous sommes en mesure de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 2.2. — *L'hypothèse* (H) *entraîne l'hypothèse* (H').

Démonstration. — L'application ξ_* est la transposée de l'application linéaire qui, à φ dans $C_c^{(n,n)}(\Omega)$, associe $\varphi_\xi = \varphi \circ D_{\xi^{-1}}$ dans $C_c^{(n,n)}(X)$. On a donc par définition :

$$\langle \xi_*(B_{p,q}^{i,k}), \varphi\rangle = \langle B_{p,q}^{i,k}, \varphi_\xi\rangle,$$

et

$$M_{F_{\varphi\xi}}(\lambda, m) = \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\int_X f^{\lambda+m-1}\bar{f}^{\lambda-m-1}\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\bar{f} \wedge \varphi \circ D_{\xi^{-1}}.$$

Précisons que pour $z \notin D_\xi(\operatorname{support}(\varphi))$, on a $\varphi \circ D_{\xi^{-1}}(z) = 0$, ce qui donne :

$$\operatorname{support}(\varphi_\xi) \subset D_\xi\big(\operatorname{support}(\varphi)\big).$$

Effectuons le changement de variables $z' = D_{\xi^{-1}}(z)$. On obtient :

$$\begin{aligned} &M_{F_{\varphi\xi}}(\lambda, m)\\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\int_{\operatorname{support}(\varphi)} \big(f(D_\xi)\big)^{\lambda+m-1}\big(\bar{f}(D_\xi)\big)^{\lambda-m-1}\mathrm{d}f(D_\xi) \wedge \mathrm{d}\bar{f}(D_\xi) \wedge \varphi. \end{aligned}$$

La propriété $f(D_\xi(z)) = \xi^{-1}f(z)$ entraîne que

$$M_{F_{\varphi\xi}}(\lambda, m) = \xi^{-(\lambda+m)}\bar{\xi}^{-(\lambda-m)}M_{F_\varphi}(\lambda, m).$$

Comme la fonction holomorphe (inversible) $|\xi|^{-2\lambda}$ admet le développement en série entière suivant, au voisinage de $\lambda_0 = -u_i - \frac{1}{2}(p+q)$,

$$\xi^{u_i+p}\bar{\xi}^{u_i+q}\sum_{\ell\geq 0}\frac{(\operatorname{Log}|\xi|^{-2})^\ell}{\ell\,!}(\lambda - \lambda_0)^\ell,$$

le coefficient de $(\lambda + u_i + \frac{1}{2}(p+q))^{-k}$, $1 \leq k \leq n+1$, dans le développement de Laurent de $M_{F_{\varphi\xi}}$ au point $(-u_i - \frac{1}{2}(p+q), -\frac{1}{2}(p-q))$, est égal à :

$$\xi^{u_i+p}\bar{\xi}_{u_i+q}\sum_{\ell-h=-k}\frac{\big(\operatorname{Log}|\xi|^{-2}\big)^\ell}{\ell\,!}B_{p,q}^{i,h}(\varphi).$$

La proposition est ainsi établie. □

3. Application : une généralisation du théorème classique de E. Borel.

Rappelons que l'isomorphisme $\mathbb{C}[[s,\bar{s}]] \xrightarrow{\sim} C_0^\infty / I_0^\infty$ (Théorème classique de E. BOREL), où I_0^∞ désigne l'idéal des germes plats en 0, permet de construire pour toute série formelle $S \in \mathbb{C}[[s,\bar{s}]]$ un germe de fonction C^∞ qui admet S comme série de Taylor à l'origine. Nous nous proposons de généraliser ce résultat comme suit :

THÉORÈME 3.1. — *Supposons que la famille des courants $(T_{p,q}^{i,k})_{(i,k,p,q)\in\theta}$ soit libre (ce qui est le cas sous l'hypothèse* (H)). *Alors pour toute suite de nombres complexes $(a_{p,q}^{i,k})_{(i,k,p,q)\in\theta}$, il existe une forme φ dans $C_c^{(n,n)}(X)$ telle que $T_{p,q}^{i,k}(\varphi) = a_{p,q}^{i,k}$, $\forall (i,k,p,q) \in \theta$.*

Démonstration. — Soit K un compact de X tel que $0 \in \mathring{K}$. Posons

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \widetilde{\mathcal{M}}_K = \big\{\widetilde{F}_\varphi \ ; \ \varphi \in C_0^{(n,n)}(K)\big\},$$

où
$$C_0^{(n,n)}(K) = \big\{\varphi \in C_c^{(n,n)}(X) \ ; \ \text{support}(\varphi) \subset K\big\},$$

et
$$\widetilde{\mathcal{M}}^\infty = \{\widetilde{F}_\varphi \in \widetilde{\mathcal{M}} \ ; \ T_{p,q}^{i,k}(\varphi) = 0, \ \ \forall (i,k,p,q) \in \theta\}$$

(espace des développements asymptotiques plats) et $\mathcal{M} = \widetilde{\mathcal{M}} / \widetilde{\mathcal{M}}^\infty$, alors l'espace vectoriel $\mathcal{M}$ peut être muni d'une structure de module sur l'anneau des séries formelles $\mathbb{C}[[s,\bar{s}]]$, par la multiplication :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\big[[s,\bar{s}]\big] \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (S, \widetilde{F}_\varphi) &\mapsto S \cdot \widetilde{F}_\varphi = \widetilde{F}_{f^*(g)\cdot\varphi}, \end{aligned}$$

où g est le germe en 0 d'une fonction C^∞, dont la série de Taylor est S. La multiplication est bien définie puisque l'on a $\widetilde{gF_\varphi} \in \widetilde{\mathcal{M}}^\infty$ si $g \in I_0^\infty$ ou si $\widetilde{F}_\varphi \in \widetilde{\mathcal{M}}^\infty$.

En fait, $\mathcal{M}$ est un sous-module du module de type fini :

$$\mathcal{N} = \bigoplus_{\substack{0 \le i \le r \\ 0 \le k \le n}} \mathbb{C}[[s,\bar{s}]]\, |s|^{2u_i} \big(\operatorname{Log}|s|\big)^k.$$

Le module $\mathcal{M}$ est de type fini puisque $\mathbb{C}[[s,\bar{s}]]$ est noéthérien. Si $\mathfrak{M}$ désigne l'idéal maximal $(s,\bar{s})$, le module $\mathcal{M}$ est complet pour la topologie $\mathfrak{M}$-adique puisque $\mathbb{C}[[s,\bar{s}]]$ est local (donc de Zariski).

D'autre part, une application du lemme d'Artin-Rees permet de voir que la filtration $\mathfrak{M}$-adique sur $\mathcal{M}$ est équivalente à la filtration par les :

$$\mathcal{M}^{(\nu)} = \{\widetilde{F}_\varphi \in \mathcal{M} \ ; \ T^{i,k}_{p,q}(\varphi) = 0, \ p+q \leq v\},$$

qui est en fait la trace de la filtration $\mathfrak{M}$-adique de $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{M}$. Il existe donc un entier naturel $d \neq 0$ tel que $\mathcal{M}^{(d+N)} \subset \mathfrak{M}^N\mathcal{M}$, pour tout $N \in \mathbb{N}$ (voir [Z-S]).

Soit maintenant une suite de nombres complexes $(a^{i,k}_{p,q})_{(i,k,p,q)\in\theta}$; si N est un entier naturel, on peut trouver φ_N , telle que :

$$T^{i,k}_{p,q}(\varphi_N) = a^{i,k}_{p,q}, \qquad p+q \leq N+d.$$

Ceci est dû au fait que la famille $(T^{i,k}_{p,q})_{p+q\leq N+d}$ est libre. Ainsi on a :

$$(*) \qquad \widetilde{F}_{\varphi_N}(s) - \sum_{p+q\leq n+d} a^{i,k}_{p,q} s^p \bar{s}^q |s|^{2u_i} \big(\operatorname{Log}|s|\big)^k \in \mathfrak{M}^{N+1}\mathcal{M},$$

puisque $\mathcal{M}^{(N+1+d)} \subset \mathfrak{M}^{N+1}\mathcal{M}$. Considérons la suite $(\widetilde{F}_{\varphi_N})_{N\in\mathbb{N}}$; elle est de Cauchy à cause de (*). Le module $\mathcal{M}$ étant complet, elle converge vers un élément de $\mathcal{M}$ (encore à cause de (*)), qui n'est autre que le développement formel fixé à l'avance :

$$\sum_{(i,k,p,q)\in\theta} a^{i,k}_{p,q} s^p \bar{s}^q |s|^{2u_i} \big(\operatorname{Log}|s|\big)^k.$$

La démonstration du théorème est terminée. □

Le théorème précédent peut être établi par un critère de surjectivité entre espaces de Fréchet (Théoreme 1.7, [T]), au lieu des arguments d'algèbre donnés ci-dessus. En fait, il découle du résultat plus général qui est donné par la proposition suivante :

PROPOSITION 3.2. — *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions linéairement indépendantes sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ et soit K un compact de U tel que* $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{ordre}_K T_n = +\infty$. *Alors l'application linéaire continue :*

$$u : C^\infty_0(K) \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \quad u(g) = \big(T_n(g)\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

est surjective.

Démonstration. — Les espaces $C^\infty_0(K)$ et $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ étant munis de leurs topologies naturelles d'espaces de Fréchet, nous savons que (cf. Théorème 17.1

de [T]) : u est surjective si et seulement si ${}^t u$ est injective et $\operatorname{Im} {}^t u = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$. Rappelons que si a appartient au dual de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ alors a est une suite finie de nombres complexes (a_n) et ${}^t u(a) = \sum a_n T_n$. L'injectivité de ${}^t u$ résulte immédiatement de l'indépendance linéaire des distributions T_n . Pour vérifier la deuxième condition, il suffit de montrer que $\operatorname{Im} {}^t v$ est faiblement fermé, puisque $(\operatorname{Ker} v)^{\perp}$ est la fermeture (faible) de $\operatorname{Im} {}^t v$. D'après un résultat de Banach, il suffit de voir que son intersection avec le polaire de tout voisinage de $0 \in C_0^{\infty}(K)$ est faiblement fermée. On peut se contenter d'examiner les voisinages du type :

$$U = \{\varphi \in C_0^{\infty}(K) \; ; \; \sup_{|\alpha| \leq m, \; x \in K} |D^{\alpha} \varphi(x)| \leq \varepsilon\},$$

où $k \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ sont fixés. On a :

$$U^0 = \{T \in (C_0^{\infty}(K))' \; ; \; \sup_{\varphi \in U} |\langle T, \varphi \rangle| \leq 1\}.$$

Donc U^0 est formé de distributions d'ordre au plus k. Par conséquent, $\operatorname{Im} {}^t u \cap U_k^0$ est contenue dans un espace vectoriel de dimension finie, puisque $\lim_{n \to +\infty} \operatorname{ordre}_K T_n = +\infty$, il en résulte qu'elle est faiblement fermée. □

Dans notre situation, nous avons seulement à expliquer comment établir la croissance des ordres (sur un voisinage compact de 0) des courants $T_{p,q}^{i,k}$ en fonction de (p,q) pour déduire le THÉORÈME 3.1 de la PROPOSITION 3.2. Pour ce faire, donnons la définition suivante : nous dirons qu'un courant $T \in (C_0^{(n,n)}(K))'$ (K étant un compact de X tel que $0 \in \overset{\circ}{K}$) est *minimal* si

$$fT = 0 \quad \text{et} \quad \bar{f}T = 0.$$

Notons par Σ_K' le sous-espace vectoriel de $(C_0^{(n,n)}(K))'$ qui est engendré par la famille $(T_{p,q}^{i,k})_{(i,k,p,q) \in \theta}$ et par Σ_K le sous-espace de Σ_K' engendré par les courants minimaux. Nous donnons en appendice une démonstration du fait que Σ_K est de dimension finie (sans hypothèse sur la singularité). Il y a donc un nombre fini de courants minimaux $T_{p,q}^{i,k}$, puisqu'ils sont linéairement indépendants ! Notons par M l'entier naturel

$$\max\{p + q \; ; \; T_{p,q}^{i,k} \text{ minimal}, \; (i,k,p,q) \in \theta\}.$$

On a le lemme suivant :

LEMME 3.3. — *L'ordre du courant $T_{p,q}^{i,k}$, $(i,k,p,q) \in \theta$, sur le compact K, est au moins égal à $p + q - M - 1$ dès que $p + q \geq M + 1$.*

Démonstration. — L'identité $f^a \bar{f}^b T_{p,q}^{i,k} = T_{p-a,q-b}^{i,k}$ pour a et b dans $\mathbb{N}$, permet de construire un courant minimal $T_{p,q}^{i,k} \neq 0$ tel que :

i) $p' \leq p$ et $q' \leq q$;

ii) $f^{p-p'}\bar{f}^{q-q'}T^{i,k}_{p,q} = T^{i,k}_{p',q'}$.

Soit $\varphi \in C_0^{(n,n)}(K)$ une forme telle que $T^{i,k}_{p',q'}(\varphi) \neq 0$. On a $T^{i,k}_{p,q}(\Psi) \neq 0$ si $\Psi = f^{p-p'}\bar{f}^{q-q'}\varphi$. Il est clair que Ψ et ses dérivées d'ordre inférieur à $p+q-p'-q'-1$ sont nulles sur la fibre singulière $\{f=0\}$ (qui contient le support de $T^{i,k}_{p,q}$). Il vient alors que l'ordre de $T^{i,k}_{p,q}$ sur K est au moins égal à $p+q-p'-q'-1 \geq p+q-M-1$. Le lemme est ainsi établi. $\square$

REMARQUE 3.4. — On peut établir des résultats analogues à ceux de cet article pour un germe analytique $f : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$, pour les développements asymptotiques des fonctions obtenues par intégration sur la trace de la fibre de f sur une composante connexe de l'ouvert $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} ; f(x) \neq 0\}$ ou sur $\mathbb{R}^{n+1}$ entier. Plus précisément, si f appartient à son idéal jacobien : $f = \sum_{i=0}^{n} a_i \partial f/\partial x_i$ où les a_i sont des fonctions analytiques (à variables réelles), on démontre des résultats analogues aux THÉORÈME 1.1, PROPOSITION 2.2 et THÉORÈME 3.1.

Nous terminons cet article par la question suivante :

QUESTION. — Soit $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe à singularité isolée. Supposons que la famille des courants $(T^{i,k}_{p,q})_{(i,k,p,q)\in\theta}$ soit libre. Ceci entraîne-t-il que le réseau de Gauss-Manin est saturé ?

La réponse à cette question permettrait probablement d'éclaircir le cas où l'hypothèse (H) n'est pas satisfaite. Nous ne disposons pas d'exemple où ces courants sont liés.

Appendice

Nous donnons ci-dessous un résultat, sur le module des développements asymptotiques, dû à D. BARLET.

Soit K un compact de X, tel que $0 \in \overset{\circ}{K}$, considérons $\mathcal{M} = \widetilde{\mathcal{M}}/\widetilde{\mathcal{M}}^{\infty}$ (voir début de la démonstration du THÉORÈME 3.1). Notons par Σ'_K le sous-espace vectoriel de $(C_0^{(n,n)}(K))'$ qui est engendré par la famille $(T^{i,k}_{p,q})_{i,k,p,q)\in\theta}$ et par Σ_K le sous-espace engendré par les courants minimaux de Σ'_K. Rappelons qu'un courant T de $(C_0^{(n,n)}(K))'$ est dit minimal si $fT = 0$ et $\bar{f}T = 0$.

PROPOSITION. — *L'espace vectoriel Σ_K est naturellement isomorphe au dual de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}/\mathfrak{M}\mathcal{M}$, avec $\mathfrak{M} = (s, \bar{s})$.*

Démonstration. — Posons $\Sigma = \Sigma_K$ et $E = \mathcal{M}/\mathfrak{M}\mathcal{M}$. Si ℓ est un élément de E^* et si φ est dans $C_0^{(n,n)}(K)$, on pose $\langle T_\ell, \varphi\rangle = \ell([\widetilde{F}_\varphi])$, où $[\widetilde{F}_\varphi]$ désigne l'image de $\widetilde{F}_\varphi$ dans E.

Montrons déjà que T_ℓ définit un élément de Σ. D'après le lemme d'Artin-Rees, il existe un entier $d \neq 0$ tel que l'annulation de $T_{p,q}^{i,k}(\varphi)$ pour $p+q \leq d+1$ entraîne que $\widetilde{F}_\varphi \in \mathfrak{M}\mathcal{M}$ (voir par exemple le corollaire du Théorème 1 bis de [B], p. 167). Dans ces conditions, on aura *a fortiori* $\ell([\widetilde{F}_\varphi]) = 0$. Ceci montre que la forme linéaire T_ℓ que l'on a définie sur $C_0^{(n,n)}(K)$ est une combinaison linéaire des courants $T_{p,q}^{i,k}$ pour $p+q \leq d+1$, c'est-à-dire $T_\ell \in \Sigma'_K$. De plus, il est clair que T_ℓ est un élément de Σ car $\langle fT_\ell, \Psi\rangle = \ell([s\widetilde{F}_\Psi]) = 0$ puisque, par définition, $s\widetilde{F}_\Psi \in \mathfrak{M}\mathcal{M}$ (resp. $\bar{f}T_\ell = 0\ldots$).

L'application linéaire $E^* \to \Sigma$, que nous venons de définir, est injective ; en effet, s'il existe $\widetilde{F}_\Psi$ tel que $\ell([\widetilde{F}_\Psi]) \neq 0$, on aura $\langle T_\ell, \Psi\rangle \neq 0$.

Il nous reste à prouver que cette application est surjective. Si T est un élément de Σ, nous cherchons donc ℓ dans E^* tel que $T_\ell = T$. Pour φ dans $C_0^{(n,n)}(K)$, nous voudrions poser $\ell([\widetilde{F}_\varphi]) = \langle T, \varphi\rangle$. Pour que cela ait un sens, nous devons vérifier que si $\widetilde{F}_\varphi \in \mathfrak{M}\mathcal{M}$, alors on a $\langle T, \varphi\rangle = 0$. Mais si $\widetilde{F}_\varphi \in \mathfrak{M}\mathcal{M}$, il existe des formes Ψ et χ dans $C_0^{(n,n)}(K)$ telles que $\widetilde{F}_{\varphi - f\Psi - \bar{f}\chi}$ soit nulle dans $\mathcal{M}$, c'est-à-dire admette un développement asymptotique nul en $s = 0$. D'après la Proposition 9 de [B], ceci entraîne que cette fonction est C^∞ au voisinage de $s = 0$ et plate en $s = 0$. Notons par g cette fonction et écrivons $g = sa + b\bar{s}$, où a et b sont C^∞ au voisinage de $s = 0$. Comme nous savons que toute fonction C^∞ au voisinage de $s = 0$ est de la forme $F_\omega, \omega \in C_0^{(n,n)}(K)$ (voir le Lemme 1 de [B], p. 167), il existe des formes Ψ_1 et χ_1 dans $C_0^{(n,n)}(K)$ telles que $F_{\varphi - f\Psi_1 - \bar{f}\chi_1}$ soit identiquement nulle au voisinage de $s = 0$. Alors T est nul sur $\varphi - f\Psi_1 - \bar{f}\chi_1$ et $fT = \bar{f}T = 0$ montre alors que $\langle T, \varphi\rangle = 0$. Finalement, la formule $\ell([\widetilde{F}_\varphi]) = \langle T, \varphi\rangle$ définit ℓ dans E^* et $T_\ell = T$, ce qui prouve la surjectivité annoncée. Ceci achève la démonstration de la proposition. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[B] BARLET (D.). — Développement asymptotique des fonctions obtenues par intégration sur les fibres, *Invent. Math.*, t. **68**, 1982, p. 129-174.

[B-M] BARLET (D.) et MAIRE (H.M.). — Asymptotic expansion of complex integrals via Mellin transform, *J. Funct. Anal.*, t. **83**, 1989, p. 233–257.

[M] MILNOR (J.). — *Singular points of complex hypersurfaces.* — Ann. of Math. Studies 61, Princeton , 1968.

[R] RUBENTHALER (H.). — La surjectivité de l'application moyenne pour les espaces préhomogènes., *J. Funct. Anal.*, t. **60**, 1985, p. 80–94.

[S] SAITO (K.). — Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflachen, *Invent. Math.*, t. **14**, 1971, p. 123–142.

[T] TREVES (F.). — *Locally convex spaces and linear partial differential equations.* — Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1967.

[Z–S] ZARISKI (O.) et SAMUEL (P.). — *Commutative algebra.* — Van Nostrand, 1967.