BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL BRION
JACQUES DIXMIER

Comportement asymptotique des dimensions des covariants

Bulletin de la S. M. F., tome 119, nº 2 (1991), p. 217-230
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1991__119_2_217_0>

Bull. Soc. math. France,
119, 1991, p. 217–230.

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES DIMENSIONS DES COVARIANTS

PAR

MICHEL BRION ET JACQUES DIXMIER (*)

RÉSUMÉ. — Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et soit $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ une k-algèbre graduée intègre de type fini, avec $A_0 = k \cdot 1$ et $A_n \neq 0$ pour n assez grand. Soient G un groupe réductif sur k, e son élément neutre, Λ l'ensemble des classes de représentations rationnelles simples de dimension finie de G, 0 l'élément trivial de dimension 1 de Λ. On suppose que G opère fidèlement rationnellement dans A par automorphismes gradués. Pour $\lambda \in \Lambda$, soit $m_{\lambda,n}$ la multiplicité de λ dans A_n. Soit X la variété affine irréductible sur k définie par A. Le groupe G opère dans X. Pour simplifier ce résumé, supposons que $m_{0,n} \neq 0$ pour n assez grand, que l'orbite générique de G dans X soit fermée et que le stabilisateur générique d'un point de X soit trivial. Alors $m_{\lambda,n}/m_{0,n} \to \dim\lambda$ quand $n \to \infty$. Cela généralise un résultat de R. Howe, relatif au cas où G est fini. Supposons que G soit la complexification d'un groupe de Lie compact connexe K. Soit ψ_n le caractère, convenablement normalisé, de K opérant dans A_n. Alors $\psi_n \to \varepsilon_e$ (masse de Dirac en e) au sens des distributions quand $n \to \infty$.

ABSTRACT. — Let k be an algebraically closed field, of characteristic 0, $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ a graded k-algebra which is finitely generated and a domain, with $A_0 = k \cdot 1$ and $A_n \neq 0$ for n big enough. Let G be a reductive group over k, e its unit element, Λ the set of classes of finite dimensional rational simple representations of G, 0 the trivial element of dimension 1 of Λ. Assume that G operates faithfully and rationally in A by graded automorphisms. For $\lambda \in \Lambda$, let $m_{\lambda,n}$ be the multiplicity of λ in A_n. Let X be the affine irreducible variety over k defined by A. The group G operates in X. To simplify this abstract, assume that $m_{0,n} \neq 0$ for n big enough, that the generic orbit of G in X is closed, and that the stabilizer of a generic point of X is trivial. Then $m_{\lambda,n}/m_{0,n} \to \dim\lambda$ as $n \to \infty$. This generalizes a result by R. Howe, which concerns the case where G is finite. Assume that G is the complexification of a connected compact Lie group K. Let ψ_n be the character of the representation of K in A_n, with a suitable normalization. Then, as $n \to \infty$, $\psi_n \to \varepsilon_e$ (Dirac mass at e) in the space of distributions on K.

(*) Texte reçu le 27 décembre 1990, révisé le 14 mars 1991.
M. BRION, Institut Fourier, Grenoble et J. DIXMIER, Paris, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1991/217/$ 5.00

1. Introduction

1.1. — Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Soit $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ une k-algèbre graduée de type fini, intègre, avec $A_0 = k \cdot 1$, $A \neq A_0$. Par un changement de graduation, on peut supposer que $\operatorname{pgcd}\{n \mid A_n \neq 0\} = 1$; alors $A_n \neq 0$ pour n assez grand. Nous nous placerons désormais dans cette situation.

1.2. — Soit G un groupe fini qui opère fidèlement dans A par automorphismes, en laissant stable chaque A_n. Soit ρ_n la représentation de G dans A_n ainsi définie. Dans [3], R. Howe a étudié la structure de ρ_n pour n grand. Pour éviter, dans cette introduction, des complications techniques, supposons que le centre de G soit trivial. Alors, *quand $n \to \infty$, ρ_n tend vers un multiple de la représentation régulière de G* (cf. [3], p. 378, corollary pour un énoncé précis et plus général).

Nous allons étendre le résultat de R. Howe au cas où G est réductif.

2. Le résultat principal

2.1. — Pour les notions et les propositions générales de 2.1 et 2.2, on renvoie à [4] et [6]. Les notations k, A, A_n sont celles de 1.1. On pose :

$$\sum_{p \leq n} A_p = A_{\leq n}.$$

Soit G un groupe réductif sur k, d'élément neutre e. On note Λ l'ensemble des classes de représentations simples rationnelles de dimension finie de G. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on note $d(\lambda)$ la dimension de λ. Soit 0 la classe de la représentation triviale de dimension 1 de G. On suppose que G opère fidèlement dans A par automorphismes gradués, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la représentation ρ_n de G dans A_n est rationnelle. Pour $\lambda \in \Lambda$, soit $m_{\lambda,n}$ (resp. $m_{\lambda,\leq n}$) la multiplicité de λ dans A_n (resp. $A_{\leq n}$), et soit $A(\lambda)$ la composante isotypique de type λ de A. On a $\dim A(\lambda)_n = m_{\lambda,n} d(\lambda)$.

Soit X la variété affine irréductible sur k définie par A. Le groupe G opère régulièrement dans X (autrement dit, l'application naturelle $G \times X \to X$ est un morphisme au sens de la géométrie algébrique). On considère la condition suivante :

(*) L'orbite générique de G dans X est fermée.

Soit H le stabilisateur dans G d'un point générique de X. Supposons (*) vérifiée. Alors H est réductif. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on note p_λ la multiplicité de λ dans l'algèbre $k[G/H]$ des fonctions régulières sur G/H (G opère dans G/H par la représentation régulière). Par réciprocité de Frobenius, p_λ est la dimension de l'espace des vecteurs H-invariants dans l'espace de λ. On considère aussi la condition suivante :

(**) L'orbite générique de G dans X est fermée et $H = \{e\}$.

Si G est fini, la condition (**) est vérifiée.

2.2. — On notera B l'algèbre A^G des éléments G-invariants de A, et d sa dimension de Krull. Soit $B_n = B \cap A_n$. Supposons (*) vérifiée et montrons que $B \neq B_0$.

Supposons $B = B_0$. Comme les éléments de B séparent les orbites fermées de X, la condition (*) entraîne que X se réduit à une orbite. La structure graduée G-invariante de A entraîne l'existence d'un point fixe de G dans X, que nous noterons ω. Donc $X = \{\omega\}$, d'où $A = A_0$, cas exclu. Cela prouve notre assertion.

Soit S l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $B_n \neq 0$. Alors S est un sous-semi-groupe de $\mathbb{N}$ pour l'addition, non réduit à $\{0\}$. *Soit n_0 le* pgcd *des éléments non nuls de S.* Alors S contient tous les multiples assez grands de n_0. Il existe une constante $c > 0$ telle que $\dim B_n \sim cn^{d-1}$ pour $n \in n_0\mathbb{N}$, $n \to \infty$ (cf. par exemple [3], p. 377). Evidemment, $\dim B_n = 0$ pour $n \notin n_0\mathbb{N}$. Si l'on pose $m'_{0,n} = \sum_{p=n}^{n+n_0-1} m_{0,n}$, on a donc

$$m'_{0,n} \sim cn^{d-1} \quad \text{quand} \quad n \to \infty .$$

Les notations de 2.1 et 2.2 seront employées dans tout l'article.

LEMME 2.3. — *Soient k, A, G comme en* 2.1, *vérifiant* (*). *Alors, pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a*

$$m_{\lambda, \leq n}/m_{0, \leq n} \longrightarrow p_\lambda \quad \textit{quand} \quad n \to \infty .$$

a) Le B-module $A(\lambda)$ est de type fini, et sans torsion. Montrons que :

(1) Le rang du B-module $A(\lambda)$ est égal à $p_\lambda d(\lambda)$.

Soit $\pi : X \to Y$ le quotient par G. Montrons qu'il existe un ouvert non vide Y_0 de Y tel que pour tout $y \in Y_0$, le rang du B-module $A(\lambda)$ est la dimension de $k[\pi^{-1}(y)](\lambda)$ (la composante isotypique de type λ dans l'algèbre des fonctions régulières sur $\pi^{-1}(y)$). L'assertion (1) en résulte, car $\pi^{-1}(y) \simeq G/H$ pour tout y dans un ouvert non vide de Y_0.

Soient $f_1, \dots, f_r$ dans $A(\lambda)$, linéairement indépendants sur B, avec $r = \mathrm{rg}_B A(\lambda)$; on note M le B-sous-module de $A(\lambda)$ qu'ils engendrent. Il existe $f \in B \setminus \{0\}$ tel que $fA(\lambda) \subset M$. Montrons que

$$Y_0 = \{y \in Y \mid f(y) \neq 0\}$$

convient.

Choisissons $y \in Y_0$, et notons $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de B défini par y. Alors $k[\pi^{-1}(y)](\lambda) = A(\lambda)/\mathfrak{m}A(\lambda)$. Pour tout $u \in A(\lambda)$, notons $\bar{u}$ son image dans $\overline{A(\lambda)} = A(\lambda)/\mathfrak{m}A(\lambda)$. Les éléments $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r$ sont linéairement indépendants dans $\overline{A(\lambda)}$; sinon, il existe $b_1, \dots, b_r$ dans B tels que $\sum_{i=1}^r b_i f_i \in \mathfrak{m}A(\lambda)$ et que (par exemple) $b_1 \notin \mathfrak{m}$. Alors

$$f \cdot \sum_{i=1}^{r} b_i f_i \in f\mathfrak{m}A(\lambda) \subset \mathfrak{m}M,$$

donc $fb_1 \in \mathfrak{m}$, contradiction. Par suite $\dim \overline{M} = r$. Puisque $fA(\lambda) \subset M \subset A(\lambda)$ et que $\overline{fA(\lambda)} = \overline{A(\lambda)}$, on conclut que $\dim \overline{A(\lambda)} = r$.

b) Choisissons $f_1, f_2, \dots, f_{p_\lambda d(\lambda)} \in A(\lambda)$, homogènes, linéairement indépendants sur B. Soit M le sous-B-module de $A(\lambda)$ engendré par les f_i. Puisque le B-module $A(\lambda)/M$ est de torsion, sa dimension de Krull est au plus $(d-1)$, d'où $\dim M_{\leq n} \sim \dim A(\lambda)_{\leq n}$ quand $n \to \infty$. De plus,

$$\dim M_{\leq n} = \sum_{i=1}^{p_\lambda d(\lambda)} \sum_{m=0}^{n} \dim B_{m-q_i}$$

où $q_i = \deg f_i$. On en déduit que, quand $n \to \infty$,

$$m_{\lambda, \leq n} = \frac{1}{d(\lambda)} \dim A(\lambda)_{\leq n} \sim p_\lambda \dim B_{\leq n}.$$

LEMME 2.4. — *Soient k, A, G comme en 2.1, vérifiant (*). Pour tout $\lambda \in \Lambda$, soit $m'_{\lambda,n} = \sum_{p=n}^{n+n_0-1} m_{\lambda,n}$ la multiplicité de λ dans $\sum_{p=n}^{n+n_0-1} A_p$. Alors $m'_{\lambda,n}/m'_{0,n} \to p_\lambda$ quand $n \to \infty$.*

Rappelons (2.2) l'existence d'une constante $c > 0$ telle que

$$m'_{0,n} \sim cn^{d-1} \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{2}$$

De même, comme $A(\lambda)$ est un B-module de type fini, sans torsion, il existe une constante $c' > 0$ telle que

$$m'_{\lambda,n} \sim c' n^{d-1} \text{ quand } n \to \infty. \tag{3}$$

(A défaut de référence explicite pour ce résultat connu, citons le lemme 1.4 de [5], qui l'entraîne facilement). D'après (2) et (3), on a :

$$m'_{\lambda, \leq n}/m'_{0, \leq n} \to c'/c.$$

Compte tenu de 2.3, on a $c'/c = p_\lambda$, d'où le lemme.

2.5. — Soit F l'ensemble des $g \in G$ tels que $\rho_n(g)$ soit scalaire pour tout n. Alors $\rho_n(F)$ commute à $\rho_n(G)$ pour tout n, donc F est un sous-groupe central de G. Pour tout n, on a $\rho_n|F = \chi_n \cdot I$, où χ_n est un caractère de F, bien défini si $A_n \neq 0$. Si $A_m \neq 0$ et $A_n \neq 0$, on a $\chi_{m+n} = \chi_m \chi_n$.

Si $n \in S$, on a $B_n \neq 0$, et F opère trivialement dans B_n, donc $\chi_n = 1$. *Soit* n'_0 *le* pgcd *des* n *tels que* $\chi_n = 1$. On voit que n_0 *est un multiple de* n'_0 et que tout χ_n est d'ordre fini, de sorte que F est fini.

2.6. — En général, $n_0 \neq n'_0$. Toutefois :

PROPOSITION. — *Soient* k, A, G *comme en* 2.1. *On suppose que l'orbite générique de* G *dans* X *est fermée et que le stabilisateur générique de* $G \times k^*$ *dans* X *est central* (*l'action de* k^* *dans* X *est définie par la graduation de* A). *Alors* $n_0 = n'_0$.

a) On note $\mathbb{P}(X)$ la variété projective associée au "cône" X. Montrons que F est le noyau de l'opération de G dans $\mathbb{P}(X)$.

Si $g \in F$, g opère trivialement dans $\mathbb{P}(X)$. Réciproquement, soit g un élément de G opérant trivialement dans $\mathbb{P}(X)$. On peut trouver un entier $e > 0$ tel que $A^{(e)} =: \sum_n A_{ne}$ soit engendré par $A_1^{(e)} = A_e$. Puisque $\mathbb{P}(X) = \operatorname{Proj} A^{(e)}$, g opère scalairement dans chaque $A_n^{(e)} = A_{ne}$. Comme A est intègre, g opère scalairement dans chaque A_n (cf. [3], p. 375, lignes -1 à -4). Donc $g \in F$.

b) Soit Ω une orbite de G dans X ; notons Y l'adhérence de $k^*\Omega$ dans X. Soient $F(Y)$, $n_0(Y)$, $n'_0(Y)$ le sous-groupe de G et les entiers associés à la k-algèbre graduée $k[Y]$. Montrons que, pour toute orbite Ω assez générale, on a $F = F(Y)$, $n_0 = n_0(Y)$, $n'_0 = n'_0(Y)$. Puisque $k[Y]$ est un quotient de A, on a, si Ω est assez générale :

$$A_n \neq 0 \Longleftrightarrow k[Y]_n \neq 0 \quad \text{et} \quad A_n^G \neq 0 \Longleftrightarrow k[Y]_n^G \neq 0.$$

D'où $n_0 = n_0(Y)$, et $n_0' = n_0'(Y)$ pourvu que $F = F(Y)$. On a évidemment $F \subset F(Y)$. Soit $g \in F(Y)$. Alors g laisse fixe tout point de $\mathbb{P}(Y)$. Par suite, g est central dans G si Ω est générique, donc $g \in F$ d'après a).

c) On est donc ramené au cas où $k^*\Omega$ est dense dans X, avec Ω fermée dans X. Soit $x \in \Omega$. Posons

$$\Gamma = \{(g,t) \in G \times k^* \mid gx = tx\}.$$

L'image de l'application $\Gamma \to k^* : (g,t) \mapsto t$ est finie (sinon $\omega \in \overline{\Omega} = \Omega$) ; c'est donc un groupe fini cyclique, dont on note γ l'ordre. On a

$$k(Y)^G = k(G \times k^*)^{\Gamma \times G}$$

où Γ opère dans $G \times k^*$ par translations à droite. Donc $k(Y)^G \simeq k(k^*)^\Gamma$ est engendré par une indéterminée homogène, de degré γ. Puisque A^G est graduée et a pour corps des fractions $k(Y)^G$, on a $\gamma = n_0$.

D'autre part, Γ est central dans $G \times k^*$, donc

$$F = \{g \in G \mid \exists t \in k^* \quad \text{tel que} \quad (g,t) \in \Gamma\} \simeq \Gamma.$$

Soient $\varphi \in A_n$ et $g \in F$. Alors, pour tout $z \in \Omega$, on a

$$(g \cdot \varphi)(z) = \varphi(g^{-1}z) = t^{-n}\varphi(z)$$

et par suite :

$$F \text{ opère trivialement dans } A_n \iff n \text{ est multiple de } \gamma.$$

Ainsi, $n_0' = \gamma = n_0$.

2.7 Remarque. — Lorsque G est fini, les hypothèses de la PROPOSITION 2.6 sont vérifiées. En effet, avec les notations précédentes, le stabilisateur générique de G dans $\mathbb{P}(X)$ opère trivialement dans $\mathbb{P}(X)$, donc est central dans G.

2.8. — Soit χ le caractère de F dans $A_{nn_0'+1}$ pour n assez grand. Soit $\ell \in \{0,1,2,\dots,n_0'-1\}$. Alors $\chi_{nn_0'+\ell} = \chi^\ell$ pour n assez grand. En particulier, χ est d'ordre n_0'.

Soit $k[G/H]_\ell$ le sous-espace vectoriel de $k[G/H]$ formé des éléments sur lesquels F opère suivant le caractère χ^ℓ. Ce sous-espace est G-stable. On a

$$k[G/H] \supset \bigoplus_{\ell=0}^{n_0'-1} k[G/H]_\ell$$

et le quotient est de dimension finie. Si $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \mid F$ est un caractère χ_λ de F. Soit Λ_ℓ l'ensemble des $\lambda \in \Lambda$ tels que $\chi_\lambda = \chi^\ell$. Alors λ apparaît dans $k[G/H]_\ell$ si et seulement si $\lambda \in \Lambda_\ell$.

THÉORÈME 2.9. — (Cf. 2.1 pour les notations k, A, G, p_λ ; 2.2 et 2.5 pour les définitions de n_0 et n'_0 ; 2.8 pour la définition de Λ_ℓ.)

On suppose vérifiée la condition (*). *Soient* $\ell \in \{0, 1, \ldots, n'_0 - 1\}$ *et* $\lambda \in \Lambda_\ell$. *Soit* $m''_{\lambda,n}$ *la multiplicité de* λ *dans* $A_n + A_{n+n'_0} + A_{n+2n'_0} + \cdots + A_{n+n_0-n'_0}$.

(i) *Si* $n \not\equiv \ell \mod n'_0$, *on a* $m''_{\lambda,n} = 0$ *pour* n *assez grand.*

(ii) *Si* $n \equiv \ell \mod n'_0$, *on a* $m''_{\lambda,n}/(\sum_{p=n}^{n+n_0-1} m_{0,p}) \to p_\lambda$ *quand* $n \to \infty$.

L'assertion (i) est évidente. Compte tenu de (i), l'assertion (ii) résulte de 2.4.

COROLLAIRE 2.10. — (Mêmes notations qu'en 2.9.)

On suppose vérifiées les hypothèses de la Proposition 2.6.

Soient $\ell \in \{0, 1, \ldots, n_0 - 1\}$ *et* $\lambda \in \Lambda_\ell$.

(i) *Si* $n \not\equiv \ell \mod n_0$, *on a* $m_{\lambda,n} = 0$ *pour* n *assez grand.*

(ii) *Si* $n \equiv \ell \mod n_0$, *on a* $m_{\lambda,n}/(\sum_{p=n}^{n+n_0-1} m_{0,p}) \to p_\lambda$ *quand* $n \to \infty$.

Cela résulte de 2.6 et 2.9.

(En particulier, pour G fini, on retrouve le résultat de HOWE.)

2.11. Remarque. — Soient k, A, G comme en 2.1, vérifiant (*). Soit $\lambda \in \Lambda$. Alors :

$$\lambda \text{ apparaît dans } A \Longleftrightarrow \lambda \text{ apparaît dans } \mathbb{C}[G/H].$$

En effet, $\Leftarrow$ résulte de 2.9. Réciproquement, soit f un élément non nul de $A(\lambda)$. Alors il existe au moins une orbite générique Ω dans X telle que $f \mid \Omega \neq 0$, et $f \mid \Omega$ s'identifie à un élément non nul de $\mathbb{C}[G/H]$ de type λ.

2.12. — Dans cette section, on suppose G connexe; alors Λ est un monoïde (pour le produit de Cartan). Soit R la $\mathbb{Z}$-algèbre de Λ. Un élément de R est une somme finie $\sum \alpha_\lambda \mathrm{e}^\lambda$ où les α_λ appartiennent à $\mathbb{Z}$.

Soit $\mathcal{H}$ la G-série de Hilbert de A au sens de [2]. On a donc $\mathcal{H} = \sum_{i \geq 0} [A_i] x^i$, où $[A_i] \in R$ est la classe du G-module A_i. On sait (cf. par exemple [2], chap. 1) que :

$$\mathcal{H} = \frac{P_0(x) + P_1(x)\mathrm{e}^{\lambda_1} + P_2(x)\mathrm{e}^{\lambda_2} + \cdots}{(1 - x^\alpha)(1 - x^\beta) \cdots (1 - x^\gamma \mathrm{e}^{\mu_1})(1 - x^\delta \mathrm{e}^{\mu_2}) \cdots}. \tag{4}$$

D'une manière précise, $\mathcal{H} = \mathcal{N}/\mathcal{D}$, avec

$$\mathcal{N} = \sum_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda(x)\,\mathrm{e}^\lambda \quad \text{(somme finie, } P_\lambda \in \mathbb{Z}[x]\text{)}\,;$$

$$\mathcal{D} = \prod_\lambda \mathcal{D}_\lambda \quad \text{(produit fini)}\,;$$

$$\mathcal{D}_\lambda = \prod_i (1 - x^{n_{i.\lambda}}\,\mathrm{e}^\lambda) \quad \text{(produit fini)}.$$

La série de Poincaré de B est alors :

$$P_0(x)/\mathcal{D}_0 = P_0(x)/\prod_i (1 - x^{n_{i.0}}). \tag{5}$$

PROPOSITION 2.13. — *On conserve les notations de* 2.12 *et l'on suppose vérifiée la condition* (*). *Alors, pour tout* $\lambda \in \Lambda$, *l'entier* $P_\lambda(1)$ *est un multiple de* $P_0(1)$.

La dimension de Krull d de B est aussi le nombre de facteurs $1 - x^{n_{i.0}}$ figurant dans (5). D'après [8], si $\mathcal{H} = \sum_\lambda \mathcal{H}_\lambda(x)\,\mathrm{e}^\lambda$, il existe une constante $c > 0$ indépendante de λ telle que

$$m_{\lambda,\leq n} \sim cn^d \lim_{x\to 1} (1-x)^d \mathcal{H}_\lambda(x).$$

Compte tenu de 2.3, on a donc, avec une autre constante c',

$$c' \sum_\lambda p_\lambda\,\mathrm{e}^\lambda = \frac{\sum P_\lambda(1)\,\mathrm{e}^\lambda}{\prod_{\lambda\neq 0} \mathcal{D}_\lambda(1)},$$

$$\sum P_\lambda(1)\,\mathrm{e}^\lambda = c' \Big(\sum_\lambda p_\lambda\,\mathrm{e}^\lambda\Big) \prod_{\lambda\neq 0} (1 - \mathrm{e}^\lambda)^{m_\lambda},$$

où les m_λ sont certains entiers ≥ 0. Comme $p_0 = 1$, la comparaison des termes en e^0 donne $c' = P_0(1)$. On a donc l'identité :

$$\sum P_\lambda(1)\,\mathrm{e}^\lambda = P_0(1) \Big(\sum_\lambda p_\lambda\,\mathrm{e}^\lambda\Big) \prod_{\lambda\neq 0} (1 - \mathrm{e}^\lambda)^{m_\lambda}$$

qui entraîne la proposition.

2.14. — Le nombre $P_\lambda(1)$ est la somme des coefficients de P_λ. La PROPOSITION 2.13 a été observée empiriquement par SYLVESTER ([9], p. 48) dans les cas suivants : $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, $A = \mathbb{C}[V_i]$ où V_i est l'espace des formes binaires de degré i muni de l'action naturelle de G, $2 \leq i \leq 10$ ou $i = 12$.

3. Cas des groupes compacts

3.1. — On conserve les notations du § 2, et l'on suppose G connexe. Soient $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de Lie (G), et $\mathfrak{h}_0^*$ l'espace vectoriel réel engendré par les poids des représentations de G. On identifie tout élément λ de Λ à son plus grand poids, de sorte que $\lambda \in \mathfrak{h}_0^*$ et que l'on peut parler de la norme $\|\lambda\|$ de λ.

Soient U un sous-groupe unipotent maximal de G, et A^U l'ensemble des éléments U-invariants de A. Alors A^U est une sous-algèbre de type fini de A. Pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $n \in \mathbb{N}$, soit $A^U_{\lambda,n}$ l'ensemble des éléments de A^U_n de poids λ, de sorte que A^U est multigraduée de type $\Lambda \times \mathbb{N}$. On a : $A^U_{0,\mathbb{N}} = B$.

Soit $(f_1, \ldots, f_r)$ une suite finie d'éléments multihomogènes de A^U qui engendrent la B-algèbre A^U. Soit $f_i \in A^U_{\mu_i,n_i}$; on peut supposer $\mu_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq r$.

Une partie I de $\{1, 2, \ldots, r\}$ sera dite *distinguée* si l'ensemble des μ_i, où $i \in I$, est contenu dans un demi-espace homogène ouvert de $\mathfrak{h}_0^*$. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des parties distinguées de $\{1, 2, \ldots, r\}$. Si $I \in \mathcal{D}$, on choisit une forme linéaire φ_I sur $\mathfrak{h}_0^*$ telle que $\varphi_I(\mu_i) > 0$ pour tout $i \in I$.

Pour tout $J \notin \mathcal{D}$, on choisit $(a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{N}^r$ tel que $\sum_{i=1}^r a_i\mu_i = 0$, $a_i = 0$ pour $i \notin J$, $\operatorname{pgcd}(a_i) = 1$. Soit $C = \sup(a_i)$, la borne supérieure étant prise sur tous les i et tous les $(a_1, \ldots, a_r)$. Pour $I \in \mathcal{D}$, soit $P(I)$ l'ensemble des $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^r$ tels que $\alpha_i \leq C$ pour $i \notin I$. Soit $P = \bigcup_{I \in \mathcal{D}} P(I)$.

LEMME 3.2. — *Soit $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r) \in \mathbb{N}^r$. Alors β est somme d'un élément de P et d'un élément $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ de $\mathbb{N}^r$ tel que*

$$\gamma_1\mu_1 + \cdots + \gamma_r\mu_r = 0.$$

C'est évident pour $\beta = 0$. On raisonne par récurrence sur $\beta_1 + \cdots + \beta_r$.

Soit J l'ensemble des $i \in \{1, \ldots, r\}$ tels que $\beta_i \neq 0$. Si J est distingué, on a $\beta \in P(J) \subset P$. Supposons J non distingué. On a une relation $a_1\mu_1 + \cdots + a_r\mu_r = 0$ avec des $a_i \in \mathbb{N}$ non tous nuls tels que $\operatorname{pgcd}(a_i) = 1$, $a_i = 0$ pour $i \notin J$, et $a_1, \ldots, a_r \leq C$. Si $\beta_i \geq a_i$ pour tout i, on écrit $(\beta_i) = (a_i) + (\beta_i - a_i)$ et l'on applique l'hypothèse de récurrence à $(\beta_i - a_i)$. Sinon, il existe un élément de J, disons 1 pour simplifier les notations, tel que $0 < \beta_1 < a_1$. On écrit $\beta = \gamma + \delta$ avec $\gamma = (\beta_1, 0, \ldots, 0)$. L'hypothèse de récurrence appliquée à δ donne $\delta = \varepsilon + \zeta$ avec $\varepsilon \in P$. Or $\varepsilon = (0, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r)$; comme $\beta_1 \leq C$, on a $\gamma + \varepsilon = (\beta_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_r) \in P$ et $\beta = (\gamma + \varepsilon) + \zeta$ vérifie le lemme.

LEMME 3.3. — *Pour tout* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^r$, *posons*

$$M_\alpha = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_r^{\alpha_r} \in A^U_{\Sigma\alpha_i\mu_i, \Sigma\alpha_i n_i}.$$

Alors

$$A^U = \sum_{\alpha \in P} BM_\alpha.$$

Si $\alpha_1\mu_1 + \cdots \alpha_r\mu_r = 0$, on a $M_\alpha \in A_0^U = B$. Il suffit alors d'appliquer le LEMME 3.2.

PROPOSITION 3.4. — *On suppose vérifiée la condition* (*). *Il existe des constantes* $\sigma > 0$ *et* $\beta > 0$ *telles que*

$$m_{\lambda,n} \le \sigma\big(1 + \|\lambda\|^\beta\big)(1 + n^{d-1})$$

pour tout λ *et tout* n.

D'après 3.3, on a

$$A^U = \sum_{I \in \mathcal{D}} \sum_{\alpha \in P(I)} BM_\alpha$$

d'où

$$A^U_{\lambda,n} = \sum_{I \in \mathcal{D}} \sum_{\alpha \in P(I,\lambda)} B_{n - \Sigma\alpha_i n_i} M_\alpha$$

où $P(I,\lambda)$ est l'ensemble des $\alpha \in P(I)$ tels que $\sum_{i=1}^r \alpha_i\mu_i = \lambda$. Donc il existe une constante $k > 0$ telle que

$$m_{\lambda,n} = \dim A^U_{\lambda,n} \le kn^{d-1} \sum_{I \in \mathcal{D}} \operatorname{card} P(I,\lambda).$$

Si $\alpha \in P(I,\lambda)$, on a :

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i\in I} \alpha_i\Big)\big(\min_{i \in I} \varphi_I(\mu_i)\big) &\le \varphi_I\Big(\sum_{i \in I} \alpha_i\mu_i\Big) = \varphi_I\Big(\lambda - \sum_{i \notin I} \alpha_i\mu_i\Big)\\ &\le \varphi_I(\lambda) + C\sum_{i \notin I} \big|\varphi_I(\mu_i)\big|.\end{aligned}$$

Donc il existe une fonction affine ψ_I sur $\mathfrak{h}_0^*$ telle que

$$\alpha \in P(I,\lambda) \Longrightarrow \sum_{i=1}^r \alpha_i \le \psi_I(\lambda).$$

Par suite, card $P(I,\lambda)$ a une croissance polynomiale en $\|\lambda\|$, d'où la proposition.

3.5. — Dans la suite du § 3, on prend $k = \mathbb{C}$. Soit K un groupe de Lie compact connexe, d'élément neutre e. On suppose que K opère fidèlement dans A par automorphismes gradués. Par complexification, on obtient un groupe réductif G opérant dans A, auquel on va appliquer ce qui précède. On suppose vérifiée la condition (*).

LEMME 3.6. — *Il existe des constantes $\rho > 0$ et $\alpha > 0$ telles que*

$$\sum_{p=n}^{n+n_0-1} m_{\lambda,p} \leq \rho\big(1+\|\lambda\|^\alpha\big)\Big(1+\sum_{p=n}^{n+n_0-1} m_{0,p}\Big)$$

pour tout n et tout λ.

Cela résulte de 2.2 et 3.4.

PROPOSITION 3.7. — *Soient A, K comme en* 3.5, *vérifiant* (**). *Soit ψ_n le caractère de la représentation de K dans $\sum_{p=n}^{n+n_0-1} A_p$. Soit $d_n = \dim(\sum_{p=n}^{n+n_0-1} A_p)^K$. Soit ε_e la masse de Dirac en e sur K. Alors, quand $n \to \infty$, on a $d_n^{-1}\psi_n \to \varepsilon_e$ au sens des distributions.*

(On identifie les fonctions sur K à des distributions grâce à la mesure de Haar normalisée de K. Pour certaines propriétés utilisées dans cette preuve, cf. par exemple [1], § 8.)

a) Soient $\lambda \in \Lambda$, et ψ_λ le caractère de $\lambda \mid K$. La multiplicité de λ dans $\mathbb{C}[G]$ est $\dim\lambda = \psi_\lambda(e)$. Soit r_n la multiplicité de ψ_λ dans ψ_n. D'après 2.4, on a $r_n/d_n \to \psi_\lambda(e)$ quand $n \to \infty$. Donc

$$\big\langle d_n^{-1}\overline{\psi}_n, \psi_\lambda\big\rangle = d_n^{-1}\int_K \overline{\psi_n(g)}\psi_\lambda(g)\,\mathrm{d}g = d_n^{-1}r_n \longrightarrow \psi_\lambda(e) = \langle\varepsilon_e, \psi_\lambda\rangle.$$

Soit $D(K)$ le sous-espace dense de $C^{\infty,c}(K)$ (espace des fonctions centrales indéfiniment différentiables sur K) formé des combinaisons linéaires finies de caractères. D'après ce qui précède,

$$\big\langle d_n^{-1}\overline{\psi}_n, \psi\big\rangle \longrightarrow \langle\varepsilon_e, \psi\rangle \quad \text{pour tout} \quad \psi \in D(K).$$

b) Soient $\varphi \in C^\infty(K)$ et $\varepsilon > 0$. On a $\varphi = \varphi' + \varphi''$ avec $\varphi' \in C^{\infty,c}(K)$, φ'' orthogonale aux fonctions centrales, $\varphi(e) = \varphi'(e)$. Ensuite,

$\varphi' = \sum_{\lambda\in\Lambda} \beta_\lambda \psi_\lambda$ où la famille $(\beta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est à décroissance rapide. Il existe une partie finie Λ_0 de Λ telle que, avec les notations de 3.6 :

$$\sum_{\Lambda\setminus\Lambda_0} |\beta_\lambda| \left(1+\|\lambda\|^\alpha\right) \leq \varepsilon/\rho, \quad \Big(\sum_{\Lambda\setminus\Lambda_0} \beta_\lambda\psi_\lambda\Big)(e) \leq \varepsilon.$$

Alors

$$\begin{aligned}\Big|\Big\langle d_n^{-1}\overline{\psi}_n, \sum_{\Lambda\setminus\Lambda_0} \beta_\lambda\psi_\lambda\Big\rangle\Big| &\leq d_n^{-1} \sum_{\Lambda\setminus\Lambda_0} |\beta_\lambda|\, \rho\left(1+\|\lambda\|^\alpha\right)(1+d_n)\\ &\leq 2\rho \sum_{\Lambda\setminus\Lambda_0} |\beta_\lambda| \left(1+\|\lambda\|^\alpha\right) \leq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Pour n assez grand, on a, d'après la partie a) de la preuve,

$$\Big|\Big\langle d_n^{-1}\overline{\psi}_n, \sum_{\Lambda_0} \beta_\lambda\psi_\lambda\Big\rangle - \Big\langle \varepsilon_e, \sum_{\Lambda_0} \beta_\lambda\psi_\lambda\Big\rangle\Big| \leq \varepsilon.$$

Alors, pour n assez grand,

$$\begin{aligned}\big|\langle d_n^{-1}\overline{\psi}_n, \varphi\rangle - \langle \varepsilon_e, \varphi\rangle\big| &= \big|\langle d_n^{-1}\overline{\psi}_n, \varphi'\rangle - \langle \varepsilon_e, \varphi'\rangle\big|\\ &\leq \Big|\Big\langle d_n^{-1}\overline{\psi}_n, \sum_{\Lambda_0} \beta_\lambda\psi_\lambda\Big\rangle - \Big\langle \varepsilon_e, \sum_{\Lambda_0} \beta_\lambda\psi_\lambda\Big\rangle\Big|\\ &\quad + \Big|\Big\langle d_n^{-1}\overline{\psi}_n, \sum_{\Lambda\setminus\Lambda_0} \beta_\lambda\psi_\lambda\Big\rangle\Big| + \Big|\Big\langle \varepsilon_e, \sum_{\Lambda\setminus\Lambda_0} \beta_\lambda\psi_\lambda\Big\rangle\Big|\\ &\leq 4\varepsilon.\end{aligned}$$

Donc $d_n^{-1}\psi_n \to \varepsilon_e$ au sens des distributions, ce qui prouve la proposition.

3.8. — Dans l'énoncé 3.7, *on ne peut pas* remplacer la convergence au sens des distributions par la convergence au sens des mesures. En effet, soient x, y des indéterminées et $A = \mathbb{C}[x,y]$, avec la graduation usuelle. On a $X = \mathbb{C}^2$. Soit $K = \mathbb{T}$, avec $e^{i\theta} \cdot x = e^{i\theta}x$, $e^{i\theta} \cdot y = e^{-i\theta}y$, d'où une action de K dans A par automorphismes. On a $G = \mathbb{C}^*$, l'action de $\lambda \in \mathbb{C}^*$ dans X étant définie par la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}$. La condition (**) est vérifiée. On a $n_0 = 2$, $2\pi\psi_n = e^{(n+1)i\theta} + e^{ni\theta} + \cdots + e^{-(n+1)i\theta}$. D'après la théorie des séries de Fourier, ψ_n ne tend pas vers ε_e au sens des mesures.

3.9. — On laisse au lecteur le soin de généraliser 3.7 au cas où la condition (**) est remplacée par (*), et où l'on considère le caractère de K dans $A_n + A_{n+n_0'} + \cdots + A_{n+n_0-n_0'}$.

4. Une remarque sur le résultat de R. Howe

4.1. — La proposition suivante est une conséquence directe du résultat de Howe, et n'utilise pas ce qui précède.

PROPOSITION 4.2. — *Soit Z un groupe simple complexe connexe. Soit M l'ensemble des classes de Z-modules simples de dimension finie, identifié à l'ensemble des poids dominants de Z.*

Soit G un sous-groupe fini de Z de centre $\{e\}$. Pour toute classe de représentation irréductible λ de G et tout $\mu \in M$, soit $m_{\mu\lambda}$ la multiplicité de λ dans $\mu \mid G$. Soit 0 la représentation triviale de dimension 1 de G.

Alors $m_{\mu\lambda}/m_{\mu 0} \to \dim \lambda$ quand $\|\mu\| \to \infty$.

Soit U un sous-groupe unipotent maximal de Z. Soit $A = \mathbb{C}[Z/U]$. Alors A est une algèbre de type fini intègre, et A s'identifie à $\bigoplus_{\mu \in M} \mu$ de telle sorte que A devienne multigraduée de type M (cf. par exemple [7], th. 3). L'action naturelle de Z dans A conserve la structure d'algèbre multigraduée.

Le théorème de Howe s'applique (il faut observer que la preuve de HOWE, faite dans le cas gradué, s'adapte au cas multigradué considéré ici). D'où la proposition.

4.3. — Ainsi, lorsqu'on prend une "très grande" représentation simple de Z, sa restriction à G est "à peu près" un multiple de la représentation régulière.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). — *Groupes et algèbres de Lie, Chap. 9.* — Masson, 1982.

[2] BROER (B). — *Hilbert series in invariant theory.* — Thesis, Rijksuniversiteit te Utrecht, 1990.

[3] HOWE (R). — Asymptotics of dimensions of invariants for finite groups, *J. of Algebra*, t. **122**, 1989, p. 374–379.

[4] KRAFT (H). — *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie.* Aspects of mathematics, Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1984.

[5] MORALÈS (M.). — Fonctions de Hilbert, genre géométrique d'une singularité quasi-homogène de Cohen-Macaulay, *C. R. Acad. Sci. Sér. I Math.*, t. **301**, 1985, p. 699–702.

[6] MUMFORD (D.) and FOGARTY (J.). — *Geometric invariant theory.* 2nd ed., Springer-Verlag, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **34**, 1982.

[7] POPOV V.L. — Contractions of the actions of reductive algebraic groups, *Math. USSR Sbornik*, t. **58**, 1987, p. 311–335.

[8] SPRINGER (T.A.). — *Invariant theory.* — Lecture Notes in Math., **585**, 1977.

[9] SYLVESTER (J.J.). — Tables of the generating functions and groundforms of the binary duodecimic, with some general remarks, and tables of the irreducible syzygies of certain quantics, *Amer. J. Math.*, t. **4**, 1881, p. 41–61.