BULLETIN DE LA S. M. F.

HA HUY KHOAI

Sur les séries L associées aux formes modulaires

Bulletin de la S. M. F., tome 120, nº 1 (1992), p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1992__120_1_1_0>

Bull. Soc. math. France,
120, 1992, p. 1–13.

SUR LES SÉRIES L ASSOCIÉES AUX FORMES MODULAIRES

PAR

HA HUY KHOAI (*)

RÉSUMÉ. — Nous démontrons quelques théorèmes de type de Weil sur les caractérisations des séries L associées aux formes modulaires et donnons une borne supérieure d'une constante dans la formule de Manin des valeurs propres des opérateurs de Hecke.

ABSTRACT. — We prowe some theorems of the Weil type on characterization of L-series associated to modular forms and give a supper bound of a constant in the Manin's formula of eigenvalues of Hecke operators.

0. Introduction

Dans [11] A. WEIL montre les conditions caractérisant les séries L associées aux formes modulaires relativement au groupe $\Gamma_0(N)$. Une des hypothèses de Weil est que l'équation fonctionnelle satisfaite par les séries L soit valable pour un ensemble infini de caractères. Dans la suite, de nombreux articles (voir [1], [2], [3], [4], [5], [9], [12], [13], [14]) considèrent le problème analogue dans les cas plus généraux, par exemple, les formes automorphes. Dans ces articles, le nombre des équations fonctionnelles qui doivent être satisfaites s'avère également infini.

Dans le présent article nous nous intéressons aux mêmes objets comme dans [11], et démontrons quelques théorèmes de type de Weil où le nombre des équations fonctionnelles est fini.

Dans la deuxième partie nous donnons une borne supérieure pour la constante de la formule de Manin pour les valeurs propres des opérateurs de Hecke.

(*) Texte reçu le 19 novembre 1989, révisé le 13 mai 1991.
H.H. KHOAI, Institut of mathematics, Box 631 Bo Ho, Hanoi, Vietnam.
ICTP, Mathematics Section, Box 586, 34100 Trieste, Italy.
Classification AMS : 11F66, 11F30, 11F03, 11F11.

1. Théorèmes de type de Weil pour les séries L associées aux formes modulaires

Soit $a_0, a_1, a_2, \ldots$ une suite des nombres complexes, $a_n = \mathrm{O}(n^{-\sigma})$ avec $\sigma > 0$, et soit χ un caractère de Dirichlet modulo m. On pose :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \mathrm{e}^{2\pi i n z}, \qquad L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, n^{-s},$$

$$\Lambda(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s), \quad f_\chi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n) \, \mathrm{e}^{2\pi i n z},$$

$$L_\chi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n) \, n^{-s}, \quad \Lambda_\chi(s) = \Big(\frac{2\pi}{m}\Big)^{-s}\Gamma(s)L_\chi(s).$$

Soient $C \neq 0$, $A > 0$, $k > 0$. Rappelons ici les conditions de Hecke-Weil :

a) $\Lambda(s) + N^{-s/2}\Big(\dfrac{a_0}{s} + \dfrac{Ca_0}{k-s}\Big)$ est holomorphe et bornée sur les bandes verticales (HBV) et

$$\Lambda(s) = CN^{k/2-s}\Lambda(k-s)\,;$$

b) $\Lambda_\chi(s)$ est HBV et

$$\Lambda_\chi(s) = C_\chi N^{k/2-s}\Lambda_\chi(k-s)$$

où C_χ est une constante $\neq 0$.

D'après le théorème de Hecke la condition a), où $N = 1$, est équivalente à ce que la fonction $f(z)$ soit une forme modulaire de poids k relativement au groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. A. Weil montre que les conditions a) et b) caractérisent les séries L associées aux formes modulaires relativement au groupe $\Gamma_0(N)$. Une des hypothèses du théorème de Weil (voir [11]) est que la condition b) soit valable pour un ensemble infini des caractères χ. Nous donnons ici la démonstration de théorème de même type, où on demande la condition b) pour un ensemble fini des caractères χ.

Théorème 1.1. — *Soient ε un caractère de Dirichlet modulo N et $C = \pm 1$. Supposons que la condition a) est satisfaite et que la condition b) est satisfaite pour les caractères χ de conducteurs m tels que $(m, N) = 1$ et $m < N^2$, $C_\chi = C\varepsilon(m)G(\chi)/G(\overline{\chi})$. Alors $f(z)$ est une forme modulaire de poids k relativement au groupe $\Gamma_0(N)$ et au caractère ε.*

Démonstration. — En outre pour les conditions a) et b) nous considérons la condition suivante :

c) $f = Ci^k f_{|k}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$, où pour chaque matrice $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ on pose :

$$f_{|k}\alpha(z) = (\det\alpha)^{k/2}(cz+d)^{-k} f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big).$$

Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ satisfasse les conditions a) et b) pour tout caractère χ modulo m tel que $(m,N) = 1$ et $m < N^2$. Comme $f(z)$ satisfait la condition a), elle satisfait aussi la condition c) (cf. [8, chap. 5]). Montrons que pour toute matrice

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$$

on a :

$$f_{|k}\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} = \varepsilon(d) f.$$

Si $b = 0$, alors $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Nc & 1 \end{pmatrix}$ et

$$\begin{aligned} \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Nc & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/N \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= H_N \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H_N^{-1}, \end{aligned}$$

où $H_N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned} f_{|k}\gamma = f_{|k}\Big\{H_N \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H_N^{-1}\Big\} &= C^{-1} i^{-k} f_{|k}\begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H_N^{-1} \\ &= C^{-1} i^{-k} f_{|k} H_N^{-1} = f. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $b \neq 0$. Dans ce cas la démonstration utilise une série de lemmes.

LEMME 1.2. — *Soit* $\gamma = \begin{pmatrix} n & -b \\ -Nc & m \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ *et supposons que pour tout caractère* χ *modulo* m *ou modulo* n *les conditions* a) *et* b) *soient réalisées avec* $C_\chi = C_m \chi(-N) G_\chi/(i^{-k} G_\chi^-)$, $C_m \cdot C_n = (-1)^k$, G_χ*– la somme de Gauss. Alors* :

$$f_{|k}\gamma = \frac{Ci^k}{C_m} f.$$

Démonstration. — Voir [8, chap. V, Lemmes].

LEMMA 1.3. — *Le groupe $\Gamma_0(N)$ admet l'ensemble suivant de générateurs*

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \,;\; |b| \leq N \right\}.$$

Démonstration. — Prenons une matrice arbitraire $\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$. On peut supposer $b > 0$. Si $b > N$, $b^2 > bN$ et dans l'ensemble

$$\{ax - y \,;\; 0 \leq x, y < b\},$$

il existe $ax_1 - y_1, ax_2 - y_2$ tels que $(ax_1 - y_1) \equiv (ax_2 - y_2) \bmod bN$; il existe donc des nombres x, y tels que $|x| < b$, $|y| < b$ et $ax \equiv y \bmod bN$. Soient $ax = y + tbN$ et $-b < y < 0$. On pose $u = (x, Nt + 1)$, $z = (Nt + 1)u$, $s = x/u$. Alors $|s| < b$, $|as + bz| < b$ et $(z, Ns) = 1$. Soient α, β les nombres tels que $\alpha z + \beta N s = 1$. Il est facile de vérifier la relation suivante de matrices de $\Gamma_0(N)$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha - b\beta N & bz + as \\ (c\alpha - d\beta)N & dz + csN \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & -s \\ N\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Le LEMME 1.3 est démontré.

LEMME 1.4. — *Le groupe $\Gamma_0(N)$ admet l'ensemble suivant de générateurs :*

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \,;\; 0 < a, d < N^2 \right\}.$$

Démonstration. — Prenons une matrice arbitraire $\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix}$ dans $\Gamma_0(N)$. Grâce au LEMME 1.3 on peut supposer que $|b| \leq N$. Nous représentons a, d sous la forme suivante

$$a = a_0 + bNs,$$
$$d = d_0 + bNt$$

où $0 < a_0, d_0 < |b|\, N \leq N^2$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Nt & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & b \\ (c - ds - a_0 t)N & d_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Ns & 1 \end{pmatrix}.$$

Le LEMME 1.4 est démontré.

Démontrons maintenant le THÉORÈME 1.1. Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\Gamma_0(N)$, $b \neq 0$. On peut supposer, grâce au LEMME 1.4, que γ a la forme

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Nt & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & b \\ Nx & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Ns & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

où $m, n < N^2$. Il suit des hypothèses du THÉORÈME 1.1 que la condition du LEMME 1.2 est réalisée pour $C_m = Ci^k\varepsilon(m)$, $C_n = Ci^k\varepsilon(n)$. On note alors que $C_m \cdot C_n = (-1)^k$. D'où :

$$f_{|k}\begin{pmatrix} m & b \\ Nx & n \end{pmatrix} = \frac{Ci^k}{Ci^k\varepsilon(m)} f = \varepsilon(m)^{-1} f = \varepsilon(n) f = \varepsilon(d) f.$$

Par conséquent on obtient :

$$\begin{aligned} f_{|k}\gamma &= f_{|k}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Nt & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & b \\ Nx & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Ns & 1 \end{pmatrix} \\ &= f_{|k}\begin{pmatrix} m & b \\ Nx & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Ns & 1 \end{pmatrix} \\ &= \varepsilon(d) f_{|k}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Ns & 1 \end{pmatrix} = \varepsilon(d) f. \end{aligned}$$

L'holomorphie de f est démontrée comme dans l'article de WEIL.

Dans certains cas on peut réduire le nombre des équations fonctionnelles nécessaires dans le théorème.

THÉORÈME 1.5. — *Soit ε un caractère de Dirichlet modulo ℓ^r où ℓ est un nombre premier, $C = \pm 1$. Supposons que les conditions a) et b) soient vérifiées par tout caractère χ de conducteur m tel que $(m, \ell) = 1$ et $m < \ell^r$, $C_\chi = C\varepsilon(m)G(\chi)/G(\overline{\chi})$. Alors $f(z)$ est une forme modulaire de poids k relativement au groupe $\Gamma_0(\ell^r)$.*

Le THÉORÈME 1.5 suit de la démonstration du THÉORÈME 1.1 (la relation (1)) et du LEMME suivant :

LEMME 1.6. — *Le groupe $\Gamma_0(\ell^r)$ admet l'ensemble suivant de générateurs*

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c\ell^r & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(\ell^r)\,;\ 0 < a, d < \ell^r \right\}.$$

Démonstration. — Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c\ell^r & d \end{pmatrix}$ une matrice arbitraire de $\Gamma_0(\ell^r)$. On peut supposer que $a > 0$. Représentons a sous la forme

$$a = a_0 + xb,$$

où $0 < a_0 < b$. Considérons les deux cas possibles :

(i) $(x, \ell) = 1$. Il existe $\alpha, \gamma \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha x + \gamma \ell^r = 1$. On a alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c\ell^r & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\alpha - b\gamma\ell^r & a_0 \\ -(c\alpha + d\gamma)\ell^r & c\ell^r - dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x & -1 \\ \gamma\ell^r & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que

$$\begin{pmatrix} -a\alpha - b\gamma\ell^r & a_0 \\ -(c\alpha + d\gamma)\ell^r & c\ell^r - dx \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x & -1 \\ \gamma\ell^r & -\alpha \end{pmatrix} \in \Gamma_0(\ell^r)$$

et l'égalité est vraie.

ii) $(x+1, \ell) = 1$. Il existe $\alpha, \gamma \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha(x+1) + \gamma\ell^r = 1$. Il est facile de vérifier l'égalité suivante de matrices de $\Gamma_0(\ell^r)$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c\ell^r & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma\ell^r & b - a_0 \\ (c\alpha + d\gamma)\ell^r & c\ell^r + dx + d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 & -1 \\ -\gamma\ell^r & -\alpha \end{pmatrix}.$$

On peut alors supposer que $b = 1$, parce que $0 < a_0, b - a_0 < b$. On a

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ c\ell^r & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t\ell^r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & 1 \\ (c - ds - \bar{a}t)\ell^r & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s\ell^r & 1 \end{pmatrix},$$

où $a = \bar{a} + \ell^r s, d = \bar{d} + \ell^r t$ et $0 < \bar{a}, \bar{d} < \ell^r$. Le LEMME 1.6 est démontré.

Nous démontrons maintenant un théorème de même type où le nombre des équations fonctionnelles est infini, mais l'ensemble de caractères correspondants à ces équations fonctionnelles est décrit plus simplement que celui du théorème de Weil.

THÉORÈME 1.7. — *Soit ε un caractère de Dirichlet modulo ℓ^r ou ℓ est un nombre premier, $C = \pm 1$ et soit p une racine primitive modulo ℓ^r. Supposons que les conditions a) et b) soient vraies pour tout caractère χ de conducteur p^m, $m = 1, 2, \ldots, C_\chi = C\varepsilon(p^m)G(\chi)/G(\bar{\chi})$. Alors $f(z)$ est une forme modulaire de poids k relativement au groupe $\Gamma_0(\ell^r)$.*

Démonstration. — Prenons une matrice arbitraire $a = \begin{pmatrix} a & b \\ c\ell^r & d \end{pmatrix}$ dans $\Gamma_0(\ell^r)$. Grâce à la démonstration du LEMME 1.6 on peut supposer que $b = 1$. D'après les hypothèses il existe m, n tels que $p^m = d - \ell^r t$, $p^n = a - \ell^r s$. Il est facile de vérifier l'égalité suivante dans $\Gamma_0(\ell^r)$:

$$\begin{aligned}(2) \qquad & \begin{pmatrix} a & 1 \\ c\ell^r & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \ell^r t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^n & 1 \\ (c - p^n t - p^m s - \ell^r st)\ell^r & p^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s\ell^r & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Maintenant pour démontrer le THÉORÈME 1.7 il suffit de répéter la démonstration du THÉORÈME 1.1 en prenant la relation (2) au lieu de la relation (1).

2. Les formules explicites pour les valeurs propres des opérateurs de Hecke

Dans [6] Y.-I. MANIN a démontré quelques formules explicites pour les valeurs propres des opérateurs de Hecke. Dans ces formules il y a une constante ineffective, dont la valeur est "assez grande". Nous donnons ici une borne supérieure pour cette constante en utilisant les méthodes du paragraphe précédent.

Soit $P \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'ensemble des paires des nombres premiers entre eux. Une fonction $y : P \to \mathbb{C}$ est dite *localement constante* s'il existe un nombre M tel que $y(a,b)$ ne dépend que de $(a \bmod M, b \bmod M)$.

Soit $d > 0$ un nombre entier. On dit qu'une solution $(\Delta, \Delta', \delta, \delta')$ de l'équation $d = \Delta\Delta' + \delta\delta'$ est *admissible* si elle est contenue dans l'ensemble des nombres entiers sataisfaisants les conditions supplémentaires :

$$(\Delta, \delta) = (\Delta', \delta') = 1,$$

avec $\Delta > \delta > 0$ ou bien $\Delta' > \delta' > 0$ ou bien $\Delta = \delta$, $\Delta' = 1$, $0 < \delta < \frac{1}{2}d$, $\delta' = 0$. Pour chaque caractère de Dirichlet χ et pour chaque fonction localement constante y nous posons :

$$\tau_\chi(d) = \sum_{d \mid n} \chi(d),$$

$$\Lambda_n(y,\chi) = \sum_{d \mid n} \chi\Big(\frac{n}{d}\Big) d - \tau_\chi\Big(\frac{n}{d}\Big) \sum_{d = \Delta\Delta' + \delta\delta'} y(\Delta, \delta),$$

où la somme $\sum_{d=\Delta\Delta'+\delta\delta} y(\Delta,\delta)$ est prise sur toutes les solutions admissibles (et est égale à zéro si $d = 1$).

THÉORÈME 2.1. — *Soit $\phi(z)$ une forme modulaire parabolique de poids 2 relativement au groupe $\Gamma_0(N)$ et $\phi_{|T_n} = \lambda_n \phi$ pour tout n tel que $(n,N) = 1$. Soit encore $N = \ell^r$ où ℓ est un nombre premier, r est un nombre entier et soit p un nombre premier qui est une racine primitive modulo N. Alors il existe un caractère χ de conducteur p^m et une fonction localement constante y tels que*

$$\lambda_n = \bar{\chi}(n) \Lambda_n(y, \chi^2) \tag{3}$$

pour tout n, $(n, p\ell) = 1$.

Remarque. — Le théorème de Manin dit que la formule (3) est vraie pour tout n tel que $(n, M) = 1$, où M est un nombre fixé assez grand.

La démonstration utilise quelques lemmes.

LEMME 2.2. — *Soit $\phi(z)$ une forme modulaire parabolique de poids 2 relativement au groupe $\Gamma_0(N)$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl(2, \mathbb{Z})$. Posons :*

$$Y(c,d) = \Big(\int_{b/d}^{a/c} + \int_{-b/d}^{-a/c}\Big)\phi(z)\,\mathrm{d}z.$$

Alors $Y(c,d) = Y(-c,-d)$ ne dépend que de $(c \bmod N, d \bmod N)$, c'est-à-dire que y est une fonction localement constante.

Démonstration. — Voir [6].

LEMME 2.3. — *Soit $\phi(z)$ une forme modulaire parabolique de poids 2 relativement au groupe $\Gamma_0(N)$ et soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Pour tout d tel que $(d, 2N) = 1$, on a :*

$$\sum_{\substack{0<b<d/2 \\ (b,d)=1}} \Big(\int_0^{b/d} + \int_0^{-b/d}\Big)\phi(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{d=\Delta\Delta'+\delta\delta} Y(\Delta,\delta)$$

où la somme de droite est prise sur toutes les solutions admissibles.

Démonstration. — Voir [6].

LEMME 2.4. — *Soit $\phi(z)$ une forme modulaire parabolique de poids 2 relativement au groupe $\Gamma_0(N)$ et soit $\phi_{|T_n} = \lambda_n\phi$ pour tout n tel que $(n, 2N) = 1$.*

a) *Si $\int_0^{i\infty} \phi(z)\,\mathrm{d}z = 0$, alors :*

$$\sum_{d \mid n} \sum_{d=\Delta\Delta'+\delta\delta} Y(\Delta,\delta) = 0$$

pour tout n tel que $(n, 2N) = 1$.

b) *Si $\int_0^{i\infty} \phi(z)\,\mathrm{d}z \neq 0$, alors, en posant*

$$y(\Delta,\delta) = y(\Delta,\delta) \Big/ \int_0^{i\infty} \phi(z)\,\mathrm{d}z,$$

on a

$$\sigma_0(n) - \lambda_n = \sigma_0(n) \sum_{d \mid n} \sum_{d=\Delta\Delta'+\delta\delta} y(\Delta, \delta)$$

pour tout n tel que $(n, 2N) = 1$. La somme est prise sur toutes les solutions admissibles. Les fonctions $Y(\Delta, \delta)$ et $y(\Delta, \delta)$ ne dépendent que de (Δ, δ) mod *N.*

Démonstration. — Voir [6].

LEMME 2.5. — *Supposons que $\int_0^{i\infty} \phi(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Alors sous les hypothèses du Théorème 2.1, il existe un caractère de Dirichlet χ de conducteur p^m tel que :*

$$\int_0^{i\infty} \phi_\chi(z)\,\mathrm{d}z \neq 0.$$

Démonstration. — Supposons que pour tout caractère de Dirichlet modulo p^m, $m = 1, 2, \ldots$, on a :

$$\int_0^{i\infty} \phi_\chi(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{4}$$

Soit χ un caractère de Dirichlet de conducteur p^m et $G(\chi)$ la somme de Gauss :

$$G(\chi) = \sum_{k \bmod p^m} \chi(k)\,\mathrm{e}^{2\pi ik/p^m}.$$

On a alors

$$\phi_\chi(z) = \frac{G(x)}{p^m} \sum_{b \bmod p^m} \chi^*(b)\phi\Big(z + \frac{b}{p^m}\Big) \tag{5}$$

où $\chi^*(b) = \chi^{-1}(-b)$. Grâces aux relations (4) et (5) on obtient :

$$\sum_{k \bmod p^m} \chi^*(b) \int_0^{i\infty} \phi\Big(z + \frac{b}{p^m}\Big)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{6}$$

Le système d'équations (6) est satisfait par tout caractère primitif χ modulo p^m, $\chi \not\equiv 1$. On montre maintenant qu'il l'est pour $\chi \equiv 1$.

Par les hypothèses et les formules pour les opérateurs de Hecke on a :

$$0 = a_{p^m} \int_0^{i\infty} \phi(\zeta)\,\mathrm{d}z = \int_0^{i\infty} (\phi_{|T_{p^m}})(z)\,\mathrm{d}z \tag{7}$$

$$= \int_0^{i\infty} \Big\{ \sum_{\substack{d \mid p^m \\ b \bmod d}} \phi \,\Big|\, \begin{pmatrix} d^{-1}p^m & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \Big\}(z)\,\mathrm{d}z =$$

$$= \sum_{\substack{d \mid p^m \\ b \bmod d}} \int_0^{i\infty} \phi\Big(\frac{d^{-1}p^m z + b}{d}\Big)\,\mathrm{d}\Big(\frac{d^{-1}p^m z + b}{d}\Big) =$$

$$= \sum_{\substack{d \mid p^m \\ b \bmod d}} = \int_{b/d}^{i\infty} \phi(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{\substack{d \mid p^m \\ b \bmod d}} = \int_0^{i\infty} \phi(z + b/d)\,\mathrm{d}z.$$

La relation (7) pour $m = 1$ nous donne (6) pour $\chi \equiv 1$ et $m = 1$. On note :

$$\sum_{\substack{d \mid p^m \\ b \bmod d}} = \int_0^{i\infty} \phi\Big(z + \frac{b}{d}\Big)\,\mathrm{d}z$$

$$= \sum_{b \bmod p} \int_0^{i\infty} + \sum_{b \bmod p^2} \int_0^{i\infty} + \cdots + \sum_{b \bmod p^m} \int_0^{i\infty}.$$

Alors la relation (6) pour $\chi \equiv 1$ et pour tout m est démontrée par induction. Ainsi, nous avons démontré (6) pour tout caractère primitif χ de conducteur p^m. De l'indépendance de caractères il suit que

$$\int_0^{i\infty} \phi\Big(z + \frac{b}{p^m}\Big)\,\mathrm{d}z = 0$$

pour tout $m \geq 0$ et $b \bmod p^m$.

Nous démontrons maintenant que $\int_0^{b/d} \phi(z)\,\mathrm{d}z = 0$ pour tout $d \in \mathbb{N}$ et $b \bmod d$. On a besoin du lemme suivant.

LEMME 2.6. — *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, le groupe* $\Gamma_0(N)$ *admet l'ensemble suivant de générateurs* :

$$\Big\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ cN & p^m \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)\,;\ m = 0, 1, 2, \dots \Big\}.$$

Démonstration. — Prenons une matrice arbitraire $\begin{pmatrix} x & y \\ zN & t \end{pmatrix}$ dans $\Gamma_0(N)$. Comme dans la démonstration du THÉORÈME 1.7 on peut supposer que $y = 1$. Des hypothèses du THÉORÈME 2.1 il suit qu'il existe $m \geq 0$ et s entier tels que :

$$p^m = t + sN.$$

On a alors :

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ zN & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -sN & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 \\ (z+xs)N & p^m \end{pmatrix}.$$

Le LEMME 2.6 est démontré.

On notera maintenant par H le demi-plan de Poincaré, $X_N(\mathbb{C})$ la surface de Riemann qui est la compactification de $H/\Gamma_0(N)$. Pour chaque paire α, $\beta \in H \cup \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ on notera par $\{\alpha,\beta\} \in H_1(X_N,\mathbb{R})$ la classe d'homologie sur $X_N(\mathbb{C})$ de l'image de la courbe de α à β dans H. Considérons l'application :

$$\begin{aligned} \theta : \Gamma_0(N) &\longrightarrow H_1(X_N,\mathbb{Z}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} &\longmapsto \left\{0,\frac{b}{d}\right\}. \end{aligned}$$

MANIN a démontré que θ est un holomorphisme surjectif (cf. [7]).

Soit φ la forme différentielle sur $X_N(\mathbb{C})$ qui est induite par $\phi(z)\,\mathrm{d}z$. Pour les résultats ci-dessus, on a

$$\int_{\{0,b/p^m\}} \varphi = 0$$

pour tout $m \geq 0$, b mod p^m. Grâce au LEMME 2.6 et la surjectivité de l'holomorphisme de Manin on obtient

$$\int_{\{0,b/d\}} \varphi = 0$$

pour tout $d \in \mathbb{N}$, b mod d, c'est-à-dire, φ est de période nulle, et $\phi(z) \equiv 0$. Le LEMME 2.5 est démontré.

Supposons maintenant que χ est le caractère de Dirichlet de conducteur p^m tel que $\int_0 \phi_\chi(z)\,\mathrm{d}z \neq 0$, qui existe pour le LEMME 2.5. On sait que $\phi_\chi(z)$ est une forme modulaire parabolique de poids 2 relativement au groupe $\Gamma_0(p^{2m}N)$ et que $\phi_{\chi|T_n} = \chi(n)\lambda_n\phi_\chi$ pour tout n tel que $(n,pN) = 1$ (cf. [4]).

Pour toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ nous posons :

$$y(c,d) = \Big(\int_{b/d}^{a/c} + \int_{-b/d}^{-a/c}\Big)\phi_\chi(z)\,\mathrm{d}z \Big/ \int_0^{i\infty} \phi_\chi(z)\,\mathrm{d}z.$$

Pour le LEMME 2.2 cette fonction ne dépend que de

$$(c \bmod p^{2m}N, d \bmod p^{2m}N).$$

De la démonstration de MANIN (voir [6]) on a

$$\sum_{d\,|\,n} \chi^2\left(\frac{n}{d}\right)d - \chi(n)\lambda_n = \sum_{d\,|\,n} \tau_{\chi^2}\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{d=\Delta\Delta'+\delta\delta} y(\Delta,\delta)$$

pour tout n tel que $(n, p^{2m}N) = 1$, c'est-à-dire, pour tout n tel que $(n, p\ell) = 1$. Le THÉORÈME 2.1 est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] JACQUET (H.) and LANGLANDS (R.). — *Automorphic forms on* GL(2), Lecture Notes in Mathematics **114**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970 .

[2] LI (W.-C.) Winnie. — Newforms and functional equations, *Math. Ann.*, t. **212**, 1975, p. 285–315.

[3] LI Winnie (W.-C.). — Une caractérisation des représentations automorphes de GL(2) et de GL(1), *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **A**, **290**, 1980, p. 681–684.

[4] LI Winnie (W.-C.). — *Hecke-Weil-Jacquet-Langlands Theorem revisited*, Lecture Notes in Mathematics **751**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, p. 206–220 .

[5] LI Winnie (W.-C.). — On converse theorems for GL(2) and GL(1), *Amer. J. Math.*, t. **103**, 1981, p. 851–886.

[6] MANIN (Y.I.). — Explicite formulas for the eigenvalues of Hecke operators, *Acta Arith.*, t. **24**, 1973, p. 239–249.

[7] MANIN (Y.I.). — Cusps and the zeta function of modular curves, *Izv. AN SSSR*, t. **3**, **36**, 1972, p. 19–66.

[8] OGG (A.). — *Modular forms and Dirichlet series.* — Benjamin, New York, 1968.

[9] PIATECKII SHAPIRO (I.I.). — On the Weil-Jacquet-Langlands theorem. Lie groups and their Representations, *Halsted*, *New York*, 1975, p. 583-595.

[10] RAZAR (M.). — Modular forms for $\Gamma_0(N)$ and Dirichlet series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **231**, **2**, 1977, p. 489–495.

[11] WEIL (A.). — Uber der Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen, *Math. Ann.*, t. **168**, 1967, p. 149–156.

[12] WEIL (A.). — *Dirichlet Series and Automorphic Forms*, Lecture Notes in Mathematics **189**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[13] WEIL (A.). — *On the analogue of the modular group in characteristic p. Functional Analysis and Related Fields*, p. 211–223, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1970.

[14] WEIL (A.). — *Zeta-functions and Mellin transforms*, Colloque on Algebraic Geometry, Bombay, p. 409-426, *Tata Institute Bombay*, 1969.