Bulletin de la S. M. F.

Francesco Amoroso

Multiplicité et formes éliminantes

Bulletin de la S. M. F., tome 122, n° 2 (1994), p. 149-162

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1994__122_2_149_0>

Bull. Soc. math. France,
122, 1994, p. 149–162.

MULTIPLICITÉ ET FORMES ÉLIMINANTES

PAR

FRANCESCO AMOROSO (*)

RÉSUMÉ. — Nous étudions les relations entre un idéal homogène premier $\wp \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ ($\mathbb{K}$ corps de caractéristique 0) et l'idéal $\wp_1^{\#}$ obtenu par sa forme de Chow. En supposant que l'anneau local $\mathcal{O}_{\wp,\alpha}$ en α soit de Cohen-Maculay, nous démontrons que si $\wp = \wp_1^{\#}$ localement, alors $\wp$ est un idéal principal ou $\mathcal{O}_{\wp,\alpha}$ est régulier. Nous arrivons aussi à déterminer une borne explicite pour le plus petit entier $N \geq 1$ tel que $\wp^N \subset \wp_1^{\#}$.

ABSTRACT. — We study the relations between a homogenous prime ideal $\wp \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ ($\mathbb{K}$ field of characteristic 0) and the ideal $\wp_1^{\#}$ obtained from its Chow form. Assuming the local ring $\mathcal{O}_{\wp,\alpha}$ at a point α is a Cohen-Maculay ring, we prowe that if $\wp = \wp_1^{\#}$ locally, the the $\wp$ is a principal ideal or $\mathcal{O}_{\wp,\alpha}$ is a regular. We also find an explicit bound for the minimum integer $N \geq 1$ for which $\wp^N \subset \wp_1^{\#}$.

1. Introduction

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique zéro et soit $\mathbb{V} \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ une variété projective de dimension $(r-1)$ définie par un idéal homogène premier $\wp \subset \mathbb{A} = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$. La projection sur $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})' \times \cdots \times (\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})'$ de l'ensemble

$$\{(x, H_1, \dots, H_r) \in \mathbb{V} \times (\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})' \times \cdots \times (\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})' \,;\ x \in H_j,\ j = 1, \dots, r\}$$

définit une hypersurface irréductible et donc une forme multi-homogène $f = f_\wp$ en les coordonnées u^i_j, $i = 1, \dots, r$, $j = 0, \dots, n$ des hyperplans H_i. On appelle f *forme de Chow* ou, en suivant les notations de Patrice PHILIPPON, *forme éliminante* de l'idéal $\wp$. Cette forme qui constitue un outil désormais classique en géométrie algébrique, a été récemment redécouverte par Ju V. NESTERENKO et P. PHILIPPON qui l'ont utilisée en théorie de la transcendance.

(*) Texte reçu le 27 mai 1991, révisé le 6 juillet 1993.
F. AMOROSO, Dipartimento di matimatica, Via Buonarroti 2, 56127 Pisa, Italie.
Classification AMS : 13H15, 11S99, 13B25.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1994/149/$ 5.00

On sait que f permet de reconstruire la variété du départ ; en effet :

$$\mathbb{V} = \Big\{ x \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \, ; \, \sum_{j=0}^{n} u^i_j x_j = 0 \ \forall u \in \mathbb{P}^n_{\overline{\mathbb{K}}} \times \cdots \times \mathbb{P}^n_{\overline{\mathbb{K}}} \text{ tel que } f(u) = 0 \Big\}.$$

Les coordonnées de l'hyperplan générique passant par le point x sont données par Sx, où $S = (s_{ij})$ est une matrice antisymétrique générique. Donc l'idéal $\wp_1^{\#}$ engendré par les coefficients de $f(S^1 x, \dots, S^r x)$ (vu comme polynôme à coefficients dans $\mathbb{A}$ en les variables s^h_{ij}) définit $\mathbb{V}$ comme ensemble. De plus, on peut montrer que $\wp$ est la seule composante isolée de $\wp_1^{\#}$ (voir [N1, lemme 1]). Nous nous sommes intéressés aux composantes immergées de $\wp_1^{\#}$. Cet idéal a généralement une composante $(x_0, \dots, x_n)$-primaire non-significative : il semble donc naturel de considérer l'idéal $\wp_1$ saturé de $\wp_1^{\#}$ par rapport à $(x_0, \dots, x_n)$, c'est-à-dire

$$\wp_1 = \bigcup_{k \geq 0} \big(\wp_1^{\#} :_{\mathbb{A}} (x_0, \dots, x_n)^k \big).$$

Le lien entre les singularités de la variété $\mathbb{V}$ et les composantes immergées de $\wp_1$ a été observé depuis longtemps. WEIL, par exemple, remarque (cf. [W, p. 325–326]) que $\wp = \wp_1$ lorsque $\mathbb{V}$ est lisse. En utilisant une notion de multiplicité introduite dans [A1] et développée par PHILIPPON dans [P2], nous démontrerons le résultat suivant :

THÉORÈME A. — *Soit $\alpha \in \mathbb{V}$ et supposons que l'anneau local $\mathcal{O}_{\wp,\alpha}$ de $\mathbb{V}$ en α soit de Cohen-Macaulay. Alors si $\wp \mathcal{O}_{\wp,\alpha} = \wp_1 \mathcal{O}_{\wp,\alpha}$ et si* $\dim \mathbb{V} < n - 1$, *la variété $\mathbb{V}$ est lisse en α.*

L'idéal $\wp$ étant la seule composante isolée de $\wp$, on peut se poser le problème de déterminer pour chaque $\alpha \in \mathbb{V}$ le plus petit entier positif $N = N(\alpha)$ tel que $\wp^N \subset \wp_1$ dans l'anneau local $\overline{\mathbb{A}}_{M_\alpha}$, M_α étant l'idéal de définition de α dans $\overline{\mathbb{A}} = \overline{\mathbb{K}}[x_0, \dots, x_n]$. On arrive à démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME B. — *Pour tout $\alpha \in \mathbb{V}$ on a*

$$\wp^{n m_\alpha(\wp)} \subset \wp_1 \overline{\mathbb{A}}_{M_\alpha} \cap \mathbb{A}$$

où $m_\alpha(\wp)$ désigne la multiplicité de $\mathbb{V}$ en α.

L'exposant ci-dessus est « presque » optimal, comme le montre l'exemple suivant. Considérons l'idéal

$$\wp = (x_1^d - x_2^m x_0^{d-m}, x_3)$$

dans $\mathbb{A} = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$, où d, m sont des paramètres entiers satisfaisants $d > m \geq 2$. L'idéal $\wp$ définit une courbe plane ayant un seul point singulier, $\alpha = (1, 0, 0, 0)$ pour lequel $m_\alpha(\wp) = m$. A l'aide d'un programme d'interpolation algébrique† on montre que l'idéal $\wp_1$ est engendré par les polynômes

$$\begin{cases} x_1^d - x_2^m x_0^{d-m}, & \\ x_2^a x_3^b & (a+b=m,\ b \geq 1), \\ x_1^A x_3^B & (A+B=d,\ m > B \geq 1) \end{cases}$$

et donc $\wp_1 \bar{\mathbb{A}}_{M_\beta} = \wp \bar{\mathbb{A}}_{M_\beta}$ si et seulement si $\beta \neq \alpha$, en accord avec le THÉORÈME A. De plus,

$$\wp^e \bar{\mathbb{A}}_{M_\alpha} \cap \mathbb{A} \subset \wp$$

si et seulement si $e \geq m$, ce qui montre que l'estimation du THÉORÈME B est presque optimale.

J'ai commencé à rédiger ce texte pendant mon séjour au sein de l'équipe « Problèmes diophantiens » de l'Institut Henri Poincaré à Paris. Je voudrais remercier ici Roberto DVORNICICH pour m'avoir donné la possibilité de faire ce séjour et tous les membres de l'équipe pour leur chaleureux accueil et leurs précieux conseils, en particulier Michel WALDSCHMIDT. Les idées contenues dans ce texte proviennent de nombreuses et intéressantes conversations avec Patrice PHILIPPON que je remercie vivement.

2. Rappels sur les formes éliminantes

Nous rappelons ici la terminologie développée dans [P1]. Il s'agit de généraliser la notion de la forme de Chow en considérant des hypersurfaces génériques à la place des hyperplans.

Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique zéro, $\bar{\mathbb{K}}$ sa clôture algébrique et $\mathbb{A} = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ (resp. $\bar{\mathbb{A}} = \bar{\mathbb{K}}[x_0, \dots, x_n]$) l'anneau des polynômes en les variables $x_0, \dots, x_n$. Étant donné un entier $d \geq 1$, on identifie la forme homogène de degré d

$$\sum_{|\lambda|=d} u_\lambda x^\lambda$$

avec le vecteur $(u_\lambda)_{|\lambda|=d} \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\nu(n,d)}$ $\big($où $\nu(n,d) = \binom{n+d}{n}\big)$. Soit maintenant $\wp \subset \mathbb{A}$ un idéal homogène premier définissant une variété projective $\mathbb{V}$ de

† Nous remercions ici P. GIANNI pour nous avoir aidé à utiliser Scratchpad II.

dimension $(r-1)$ et fixons un multi-indice $\boldsymbol{d} \in \mathbb{N}^r$. On note $\mathcal{U}_{\boldsymbol{d}}$ l'ensemble

$$\mathcal{U}_{\boldsymbol{d}} = \{u_\lambda^i \,;\; |\lambda| = d_i\,,\; i = 1, \dots, r\}$$

et on considère les anneaux $\mathbb{K}[\mathcal{U}_{\boldsymbol{d}}]$ et $\mathbb{A}[\mathcal{U}_{\boldsymbol{d}}]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathbb{A}$ respectivement en les variables $u_\lambda^i \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{d}}$. La projection sur $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\nu(n,d_1)} \times \cdots \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\nu(n,d_r)}$ de l'ensemble

$$\Big\{(x, u^1, \dots, u^r) \in \mathbb{V} \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\nu(n,d_1)} \times \cdots \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\nu(n,d_r)} \,;\; u^i(x) = 0,\; i = 1, \dots, r\Big\}$$

définit une hypersurface irréductible (voir [P1, prop. 1.5]) et donc une forme multi-homogène $f_{\boldsymbol{d}} = f_{\boldsymbol{d},\wp} \in \mathbb{K}[u]$. On l'appelle *forme éliminante d'indice* $\boldsymbol{d}$ de l'idéal $\wp$.

Remarque 1.

1) Comme dans le cas classique, on a

$$\mathbb{V} = \Big\{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \,;\; u^i(x) = 0 \;\; \forall u \in \mathbb{P}_{\overline{\mathbb{K}}}^{\nu(n,d_1)} \times \cdots \times \mathbb{P}_{\overline{\mathbb{K}}}^{\nu(n,d_r)} \text{ tel que } f_{\boldsymbol{d}}(u) = 0\Big\}$$

(théorème de l'élimination, voir [P1, prop. 1.4]).

2) Utilisant le théorème de Bézout, on voit que le degré total de $f_{\boldsymbol{d},\wp}$ par rapport aux variables u^i est $\big(\prod_{j \neq i} d_j\big) \deg \wp$.

Soit maintenant $\mathbb{K}[\mathcal{S}_{\boldsymbol{d}}]$ (resp. $\mathbb{A}[S_{\boldsymbol{d}}]$) l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ (resp. $\mathbb{A}$) en les nouvelles variables

$$\mathcal{S}_{\boldsymbol{d}} = \{s_{\lambda,\mu}^i \,;\; |\lambda| = |\mu| = d_i,\; i = 1, \dots, r\}$$

liées algébriquement par les seules relations

$$s_{\lambda,\mu}^i + s_{\mu,\lambda}^i = 0.$$

On considère l'homomorphisme

$$\theta_{\boldsymbol{d}} : \mathbb{A}[U_{\boldsymbol{d}}] \longrightarrow \mathbb{A}[\mathcal{S}_{\boldsymbol{d}}]$$

défini par

$$\theta_{\boldsymbol{d}}\, u_\lambda^i = \sum_{|\mu| = d_i} s_{\lambda,\mu}^i x^\mu.$$

Soit $\wp$ un idéal homogène premier et f une forme éliminante d'indice $\boldsymbol{d}$ de $\wp$. On pose $\wp^{\#}_{0,\boldsymbol{d}} = (0)$ et, pour $\ell \in \mathbb{N}$, on définit $\wp^{\#}_{\ell,\boldsymbol{d}}$ comme l'idéal engendré dans $\mathbb{A}$ par les coefficients des formes

$$\theta_{\boldsymbol{d}} \frac{\partial^{\ell-1} f}{\partial u^{\tau}}, \quad \tau \in \mathbb{N}^{\Sigma_{i=1}^{r} \nu(n,d_i)}, \quad |\tau| = \ell - 1.$$

On appelle ensuite $\wp_{\ell,\boldsymbol{d}}$ le *saturé* de $\wp^{\#}_{\ell,\boldsymbol{d}}$. Remarquons que pour tout $\ell \geq 2$, l'idéal $\wp_{\ell,\boldsymbol{d}}$ est égal au saturé de l'idéal engendré par les polynômes

$$\frac{\partial P}{\partial x_i}, \quad 0 \leq i \leq n, \quad P \in \wp^{\#}_{\ell-1,\boldsymbol{d}}$$

(voir [P2, prop. 1] pour le cas $\boldsymbol{d} = (1, \ldots, 1)$).

3. Variété lisses et idéal $\wp_{\mathbf{1}}$

Dans ce qui suit, on fixe $\alpha \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ et on suppose

$$\boldsymbol{d} = \mathbf{1} = (1, \ldots, 1).$$

On oubliera d'écrire l'indice $\mathbf{1}$ dans $\wp_{\ell,\mathbf{1}}$, $\mathcal{U}_{\mathbf{1}}$, $\mathcal{S}_{\mathbf{1}}$ et $\theta_{\mathbf{1}}$.

Soient M_α l'idéal de définition de α dans $\bar{\mathbb{A}} = \bar{\mathbb{K}}[x]$ et f la fome éliminante d'un idéal homogène premier $\wp$ de codimension $n + 1 - r$. Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, les assertions suivantes sont équivalentes (voir [P2, cor. de p. 148] et [A2, prop. 2]) :

(i) $\wp_\ell$ est contenu dans M_α ;

(ii) $\wp_1$ est contenu dans M_α^ℓ ;

(iii) $\theta \dfrac{\partial^{\ell-1} f}{\partial (u_j^r)^{\ell-1}}$ appartient à $M_\alpha[\mathcal{S}]$ pour $j = 0, \ldots, n$.

On appelle $i_\alpha(\wp)$ le plus grand entier ℓ pour lequel elles sont satisfaites.

Soient R un anneau local nœthérien et $\mathcal{M}$ son idéal maximal. Pour tout idéal $\mathcal{M}$-primaire Q de R et pour tout n assez grand, la longueur $\ell(E_n)$ du R-module $E_n = R/Q^n$ est un polynôme en n de degré $d = \dim R$ et de coefficient directeur $e_R(Q)/d!$ avec $e_R(Q) \in \mathbb{N}$ (cf. [ZS, chap. VIII, § 8, th. 19]). On appelle *multiplicité de l'anneau local* l'entier $e_R(\mathcal{M})$.

Soit maintenant $\wp \subset M_\alpha$ un idéal homogène. On note $\mathcal{O}_{\wp,\alpha}$ l'anneau local $\bar{\mathbb{A}}_{M_\alpha}/\wp\bar{\mathbb{A}}_{M_\alpha}$ et on appelle *multiplicité de $\wp$ en α* l'entier

$$m_\alpha(\wp) = e_{\mathcal{O}_{\wp,\alpha}}\big(M\bar{\mathbb{A}}_M/\wp\bar{\mathbb{A}}_M\big).$$

THÉORÈME 1 (PHILIPPON [P2]). — *On a l'égalité :*

$$i_\alpha(\wp) = m_\alpha(\wp).$$

Pour démontrer le THÉORÈME A nous avons besoin du lemme suivant.

LEMME 1. — *Soit $\wp \subset M_\alpha$ un idéal homogène de codimension $k > 1$ et supposons que $m_\alpha(\wp) > 1$. Alors, si l'anneau local $\mathcal{O}_{\wp,\alpha}$ est Cohen-Maculay, $\wp \not\subset M_\alpha^{m_\alpha(\wp)}$.*

Démonstration. — Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_{r-1} \in M$ des éléments génériques; l'anneau $\mathcal{O}_{\wp,\alpha}$ étant Cohen-Maculay, on déduit des théorèmes 22, § 10, p. 294 et 3, app. 6, p. 400 de [ZS] que $m = m_\alpha(\wp)$ est égal à la longueur de l'idéal M-primaire $J = (\wp, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-k})$ dans l'anneau $\bar{\mathbb{A}}_M$. Supposons $\wp \subset M^m$; alors on a

$$J \subset M^m + (\gamma_1, \dots, \gamma_{r-1}) = (\gamma_r, \dots, \gamma_n)^m + (\gamma_1, \dots, \gamma_{r-1})$$

où $\gamma_r, \dots, \gamma_n \in M$ sont des éléments convenables. La longueur de l'idéal $(\gamma_r, \dots, \gamma_n)^m + (\gamma_1, \dots, \gamma_{r-1})$ est

$$\binom{n-r+1+m-1}{m-1} \geq \binom{m+1}{m-1} = \tfrac{1}{2}m(m+1),$$

donc $m \geq \frac{1}{2}m(m+1)$, c'est-à-dire $m \leq 1$.

REMARQUE 2. — L'hypothèse sur $\mathcal{O}_{\wp,\alpha}$ est nécessaire : en effet l'idéal premier

$$\wp = \left(x_1^3 - x_2^2, x_1x_3 - x_2x_4, x_3^2 - x_1x_4^2, x_2x_3 - x_1^2x_4\right) \subset (x_1, x_2, x_3, x_4)^2$$

a codimension 2 et multiplicité 2 en $(0,0,0,0)$ (cf. [HIO, (7.7), p. 39–40]).

Démonstration du théorème A. — Soit $\wp$ un idéal homogène premier de codimension > 1. Pour le THÉORÈME 1, on a $\wp_1\mathbb{A}_M \subset M^{m_\alpha(\wp)}\mathbb{A}_M$ et, si $m_\alpha(\wp) > 1$, on a aussi $\wp_1\mathbb{A}_M \not\subset M^{m_\alpha(\wp)}\mathbb{A}_M$ pour le lemme précédent. Ceci montre que $m_\alpha(\wp) = 1$ et donc [F, prop. 7.2] $\mathcal{O}_{\wp,\alpha}$ est régulier.

La proposition suivante montre une première relation entre les idéaux $\wp_\ell$.

PROPOSITION 1. — *Si $\wp$ est engendré par des polynômes homogènes de degrés $\leq d$, on a :*

$$\wp \cdot (\wp_2)^d \subset \wp_1.$$

Démonstration. — Soit f une forme éliminante de $\wp$ et notons u^i la forme linéaire $u^i = \sum_{j=0}^n u_j^i x_j$. Pour tout $h \in \{0, \dots, n\}$ il existe un entier M tel que

$$x_h^M f = p_h + q_{1,h}u^1 + \cdots + q_{r,h}u^r$$

avec $p_h \in \wp\mathbb{A}[\mathcal{U}]$ et $q_{1,h}, \dots, q_{r,h} \in \mathbb{A}[\mathcal{U}]$. Donc, pour $j, h = 0, \dots, n$, on a :

$$x_h^M \frac{\partial f}{\partial u_j^r} \equiv q_{r,h} x_j \mod (\wp, u^1, \dots, u^r)\mathbb{A}[\mathcal{U}].$$

Soit $P(x) = \sum_{|\lambda|=d} p_\lambda x^\lambda \in \wp$ et notons

$$g = \sum_{|\lambda|=d} p_\lambda \Big(\frac{\partial f}{\partial u_0^r}\Big)^{\lambda_0} \cdots \Big(\frac{\partial f}{\partial u_n^r}\Big)^{\lambda_n} \in \mathbb{K}[\mathcal{U}].$$

En utilisant les congruences ci-dessus, on trouve $x_h^{dM} g(\wp, u^1, \dots, u^r)$ et donc g est un multiple de f et $\theta g \in \wp_1^{\#}\mathbb{A}[\mathbb{S}]$. D'autre part, pour $i = 0, \dots, n$, on a

$$x_i \theta \frac{\partial f}{\partial u_j^r} - x_j \theta \frac{\partial f}{\partial u_i^r} = \frac{\partial \theta f}{\partial s_{ij}} \in \wp_1^{\#}\mathbb{A}[\mathbb{S}] \tag{1}$$

ce qui entraîne

$$P(x)\Big(\frac{\partial \theta f}{\partial u_j^r}\Big)^d \equiv x_j^d g \equiv 0 \mod \wp_1^{\#}\mathbb{A}[\mathbb{S}].$$

On constate d'après (1) que l'idéal $(\wp_2)^d$ est engendré par les coefficients des formes

$$\Big(\frac{\partial \theta f}{\partial u_j^r}\Big)^d, \quad j = 0, \dots, n.$$

Donc on en déduit $\wp \cdot (\wp_2)^d \subset \wp_1$.

REMARQUE 3. — En utilisant cette proposition on retrouve le résultat de Weil cité dans l'introduction : en effet si $m_\alpha(\wp) = 1$, on a $\wp_2 \not\subset M_\alpha$.

4. Étude des idéaux $\wp_{l,d}$

Retournons maintenant au cas général, $\boldsymbol{d} \in \mathbb{N}^r$. L'objet des propositions suivantes est l'étude de la variation en fonction de l'indice $\boldsymbol{d}$ des idéaux $\wp_{\ell,\boldsymbol{d}}$.

Soient $\boldsymbol{d}^1 = (d_1, \dots, d_{r-1}, d_r^1)$ et $\boldsymbol{d}^2 = (d_1, \dots, d_{r-1}, d_r^2)$ deux multi-indices avec $d_r^1 \le d_r^2$. Étant donné un polynôme

$$Q = \sum_{|\lambda| = d_r^2 - d_r^1} q_\lambda x^\lambda \in \mathbb{A}\backslash\wp$$

de degré $(d_r^2 - d_r^1)$, on considère l'homomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbre

$$\phi = \phi_Q : \mathbb{K}[u_\lambda^r]_{|\lambda|=d_r^2} \longrightarrow \mathbb{K}[u_\mu^r]_{|\mu|=d_r^1}$$

défini par

$$\phi(u_\lambda^r) = \sum_{\tau+\mu=\lambda} q_\tau u_\mu^r$$

c'est-à -dire $\phi(u^r)(x) = Q(x)u^r(x)$.

LEMME 2. — *Soient $f_{\boldsymbol{d}^1}$, $f_{\boldsymbol{d}^2}$ deux formes éliminantes de $\wp$ d'indice $\boldsymbol{d}^1$ et $\boldsymbol{d}^2$ respectivement. Alors on a*

$$\phi f_{\boldsymbol{d}^2} = h_1^{e_1} \cdots h_s^{e_s} f_{\boldsymbol{d}^1}$$

où $h_1, \dots, h_s$ sont des formes éliminantes d'indice $(d_1, \dots, d_{r-1}) \in \mathbb{N}^{r-1}$ des idéaux premiers minimaux associés à $(\wp, Q)$.

Démonstration. — Soit $g = \phi f_{\boldsymbol{d}^2} = f_{\boldsymbol{d}^2}(u^1, \dots, u^{r-1}, \phi(u^r))$. Alors $g(u) = 0$ si et seulement si :

- $f_{\boldsymbol{d}^1}(u) = 0$ ou bien
- $(u^1, \dots, u^{r-1})$ est un zéro d'une des formes éliminantes $h_1, \dots, h_s$.

En effet, d'après la REMARQUE 1, 1) (théorème de l'élimination), $g(u) = 0$ équivaut à l'existence d'un zéro $x \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ de $\wp$ tel que $u^i(x) = 0$ $(i = 1, \dots, r-1)$ et $Q(x)u^r(x) = 0$. Si $u^r(x) = 0$, alors $f_{\boldsymbol{d}^1}(u) = 0$; sinon x est un zéro de l'idéal $(\wp, Q(x))$ et donc $(u^1, \dots, u^{r-1})$ est un zéro d'une des formes $h_1, \dots, h_s$. En utilisant le fait que les $h_1, \dots, h_s, f_{\boldsymbol{d}^1}$ sont irréductibles, on en déduit (quitte à multiplier h_1 par une constante) la factorisation $g = h_1^{e_1} \cdots h_s^{e_s} f_{\boldsymbol{d}^1}^{e}$. Mais $\deg_{u^r} g = \deg_{u^r} f_{\boldsymbol{d}^2}$ car ϕ est linéaire et $\deg_{u^r} f_{\boldsymbol{d}^1} = d_1^1 \cdots d_{r-1}^1 = d_1^2 \cdots d_{r-1}^2 = \deg_{u^r} f_{\boldsymbol{d}^2}$ d'après la REMARQUE 1, 2) ; donc $e = 1$.

Soient R un anneau commutatif et T un anneau de polynômes à coefficients dans R. Étant donnés deux multi-indices $\lambda, \mu \in \mathbb{N}^m$, nous dirons que $\lambda \le \mu$ si $\lambda_i \le \mu_i$ pour $i = 1, \dots, m$. Un monôme x^λ dans $P \in T$ est dit *extrémal* pour P si tous les coefficients des monômes x^μ de P avec $\mu \le \lambda$, $\mu \ne \lambda$) sont nuls.

REMARQUE 4. — Soit $\psi : T \to T$ un homomorphisme donné par la spécialisation à zéro de certaines variables. Alors, si $P \in T$, tout monôme extrémal pour ψP est extrémal pour P.

On aura aussi besoin du lemme facile suivant :

LEMME 3. — *Soient $P, Q \in T$ et considérons les idéaux I et J engendrés dans R par les coefficients de Q et PQ respectivement. Soit encore p le coefficient dans P d'un monôme extrémal pour P. Alors il existe un entier positif N tel que dans R on ait $p^N I \subset J$.*

PROPOSITION 2. — *Soient $\boldsymbol{d}^1, \boldsymbol{d}^2 \in \mathbb{N}^r$ avec $d_j^1 \leq d_j^2$ pour $j = 1, \ldots, r$. Alors, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ on a $\wp_{\ell,\boldsymbol{d}^1} \subset \wp_{\ell,\boldsymbol{d}^2}$.*

Démonstration. — Par récurrence, on est amené au cas $d_j^1 = d_j^2 = d_j$ $(j = 1, \ldots, r-1)$ et $\ell = 1$. Il suffit de démontrer que dans $\mathbb{A}[\mathbb{S}_{\boldsymbol{d}}]$ on a

$$x_{j_0}^N \wp_{1,\boldsymbol{d}^2}^{\#} \subset \wp_{1,\boldsymbol{d}^1}^{\#}$$

pour $j = 0, \ldots, n$. On peut supposer $j_0 = 0$.

• Si x_0 appartient à $\wp$, il existe un entier positif N tel que $x_0^N \in \wp_{1,\boldsymbol{d}^1}$ (car les idéaux $\wp$ et $\wp_{1,\boldsymbol{d}^1}$ ont le même radical) et donc $x_0^N \wp_{1,\boldsymbol{d}^2}^{\#} \subset \wp_{1,\boldsymbol{d}^1}^{\#}$.

• Supposons maintenant que x_0 n'appartient pas à $\in \wp$ et utilisons le LEMME 2 avec $Q = x_0^{d_r^2 - d_r^1}$. Donc

$$\theta_{\boldsymbol{d}^1}(h)\theta_{\boldsymbol{d}^1}(f_{\boldsymbol{d}^1}) = (\theta_{\boldsymbol{d}^1} \circ \phi)(f_{\boldsymbol{d}^2})$$

où h est un produit de formes éliminantes d'indice $(d_1, \ldots, d_{r-1})$ d'idéaux premiers $\wp^{(1)}, \ldots \wp^{(s)}$ de codimension $n + 2 - r$ contenant x_0 et

$$\phi(u_\lambda^r) = \begin{cases} u_\mu^r & \text{si } \lambda = \mu + (d_r^2 - d_r^1, 0, \ldots, 0)\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $\rho : \mathbb{A}[\mathbb{S}_{\boldsymbol{d}^1}] \to \mathbb{A}[\mathbb{S}_{\boldsymbol{d}^1}]$ définie par

$$\rho(s_{\lambda,\lambda'}^i) = \begin{cases} s_{\lambda,\lambda'}^i & \text{si } \lambda = (d_i, 0, \ldots, 0) \text{ et } \lambda' = (d_i, 0, \ldots, 0)\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant le théorème d'élimination (REMARQUE 1, 1)) et le fait que x_0 est dans $\wp^{(1)}, \ldots, \wp^{(s)}$, on voit que

$$(\rho \circ \theta_{\boldsymbol{d}^1})(h) = x_0^e a$$

où $e = \sum_{i=1}^{r-1} d_i \deg_{u^i} h$ et $a \in \mathbb{K}[\mathbb{S}_{\boldsymbol{d}^1}] \setminus \{0\}$. Soit donc $\mathcal{M}$ un monôme extrémal pour $(\rho \circ \theta_{\boldsymbol{d}^1})(h)$; d'après la REMARQUE 4, $\mathcal{M}$ est extrémal pour $\theta_{\boldsymbol{d}^1}(h)$ et donc le LEMME 3 donne un entier N tel que $x_0^{eN} \wp_{1,\boldsymbol{d}^1}^{\#}$ est dans l'idéal J engendré par les coefficients de $(\theta_{\boldsymbol{d}^1} \circ \phi(f_{\boldsymbol{d}^1}))$. Enfin, soit $\psi : \mathbb{A}[\mathbb{S}_{\boldsymbol{d}^2}] \to \mathbb{A}[\mathbb{S}_{\boldsymbol{d}^1}]$ donné par

$$\psi(s_{\lambda,\lambda'}^r) = \begin{cases} s_{\mu,\mu'}^r, & \text{si } \lambda = \mu + (d_r^2 - d_r^1, 0, \ldots, 0) \\ & \qquad \text{et } \lambda' = \mu' + (d_r^2 - d_r^1, 0, \ldots, 0)\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors on a
$$x_0^{d_r^2-d_r^1}(\theta_{\boldsymbol{d}^1}\circ\phi)=\psi\circ\theta_{\boldsymbol{d}^2}\,,$$
ce qui montre que $x_0^{d_r^2-d_r^1}J\subset\wp^{\#}_{1,\boldsymbol{d}^2}$ et donc $x_0^{eN+d_r^2-d_r^1}\wp_{\ell,\boldsymbol{d}^1}\subset\wp_{\ell,\boldsymbol{d}^2}$.

On peut se demander si on a toujours l'égalité entre les idéaux $\wp_\ell$ et $\wp_{\ell,\boldsymbol{d}}$. Nous arrivons à démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION 3. — *Pour tout $\boldsymbol{d}\in\mathbb{N}^r$, l'idéal $\wp_{1,\boldsymbol{d}}$ est entier sur $\wp_1$ (i.e. pour tout $p\in\wp$, on a une relation de la forme $p^k+a_1p^{k-1}+\cdots+a_k=0$ avec $a_i\in(\wp_1)^i$, $1\le i\le k$).*

Démonstration. — Soient $\boldsymbol{d}^1=(d_1,\dots,d_{r-1},1),\boldsymbol{d}^2=(d_1,\dots,d_{r-1},d_r)$ deux éléments de $\mathbb{N}^r$; il suffit de démontrer que $\wp_{\boldsymbol{d}^2}$ est entier sur $\wp_{\boldsymbol{d}^1}$. Pour ce faire, on va démontrer qu'il existe un entier positif M tel que pour tout $j=0,\dots,n$, on ait
$$x_j^M\wp^{\#}_{1,\boldsymbol{d}^2}\subset\overline{\wp^{\#}_{1,\boldsymbol{d}^1}},$$
où nous avons noté $\bar{I}$ la clôture intégrale de l'idéal I. On peut supposer $j=0$ et $x_0\notin\wp$ (car sinon l'inclusion précédente est évidente). Soit $f_{\boldsymbol{d}^1}$ une forme éliminante d'indice $\boldsymbol{d}^1$ de $\wp$; le même argument que celui du lemme 2 de [N1] montre alors qu'il existe $a\in\mathbb{K}[\mathfrak{U}_{(d_1,\dots,d_{r-1})}]$ et des éléments α_j^h, $h=1,\dots,\delta=\deg_{u^r}f$; $j=0,\dots,n$, avec $\alpha_1^h=1$, entiers sur $\mathbb{K}[\mathfrak{U}_{(d_1,\dots,d_{r-1})},a^{-1}]$ tels que :
$$f_{\boldsymbol{d}^1}=a\prod_{h=1}^{\delta}\sum_{j=0}^{n}u_j^r\alpha_j^h.$$

En regardant les degrés, on voit que le polynôme
$$f_{\boldsymbol{d}^2}=a^{d_r}\prod_{h=1}^{\delta}\sum_{|\lambda|=d_r)}u_\lambda^r(\alpha^h)^\lambda$$
est une forme éliminante d'indice $\boldsymbol{d}^2$ de $\wp$. Soit
$$\nu:\mathbb{B}=\mathbb{K}[u^1,\dots,u^{r-1},x]\longrightarrow\mathbb{R}\cup\{\infty\}$$
une valuation discrète. Tout d'abord, on peut étendre ν au corps $\mathbb{L}=\mathbb{K}(u^1,\dots,u^{r-1},x,\alpha_j^h)$, car $\mathbb{L}$ est une extension algébrique du corps des

fractions de $\mathbb{B}$; ensuite, on étend ν à l'anneau $\mathbb{L}[\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_{d_r}]$ de façon canonique. Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{N}^{n+1}$ et pour $i, j = 0, \dots, n$ notons

$$\begin{cases} \Lambda_{\lambda,\mu}(x,y) = x^\lambda y^\mu - y^\lambda x^\mu, \\ \Lambda_{i,j}(x,y) = x_i y_j - y_i x_j \end{cases}$$

où $x = (x_0, \dots, x_n)$ et $y = (y_0, \dots, y_n)$. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{N}^{n+1}$ avec $|\lambda| = |\mu| = d_r$ on a

$$\Lambda_{\lambda,\mu}(x,y) = \sum_{0 \le i < j \le n} P_{i,j}(x,y) \Lambda_{i,j}(x,y)$$

où les $P_{i,j}$ sont des polynômes bi-homogènes de bi-degrés $(d_r - 1, d_r - 1)$. Les $a\alpha_j^h$ étant entiers sur $\mathbb{B}$, on en déduit que les $a^{d_r - 1} \Lambda_{\lambda,\mu}(x, \alpha^h)$ (avec $|\lambda| = |\mu| = d_r$) sont des combinaisons linéaires des $\Lambda_{i,j}(x, \alpha^h)$ $(0 \le i < j \le n)$ à coefficients entiers sur $\mathbb{B}$, et donc :

$$\min_{\lambda \ne \mu} \Lambda_{\lambda,\mu}(x, \alpha^h) \le \min_{0 \le i < j \le n} \nu\big(\Lambda_{i,j}(x, \alpha^h)\big). \tag{2}$$

Par ailleurs,

$$\theta_{d_r} f_{\boldsymbol{d}^2} = a^{d_r} \prod_{h=1}^{\delta} \sum_{(\lambda,\mu) \in \Gamma} s^r_{\lambda,\mu} \Lambda_{\lambda,\mu}(x, \alpha^h),$$

$$\theta_1 f_{\boldsymbol{d}^1} = a \prod_{h=1}^{\delta} \sum_{0 \le i < j \le n} s^r_{i,j} \Lambda_{i,j}(x, \alpha^h),$$

où Γ contient un seul des couples (λ, μ), (μ, λ) pour chaque $\lambda \ne \mu$ avec $|\lambda| = |\mu| = d_r$ et θ_1 (resp. θ_{d_r}) est l'analogue de l'opérateur $\theta_{\boldsymbol{d}^1}$ (resp. $\theta_{\boldsymbol{d}^2}$) n'agissant que sur les variables u^r. En utilisant (2), on en déduit :

$$\nu\big(a^{(d_r - 1)(\delta - 1)} \theta_{d_r} f_{\boldsymbol{d}^2}\big) \ge \nu(\theta_1 f_{\boldsymbol{d}^1}).$$

Le critère valuatif d'intégralité [ZS, th. 3, p. 353–354] montre alors que l'idéal $a^{(d_r-1)(\delta-1)} J_{\boldsymbol{d}}$ est entier sur J, où nous avons noté $J_{\boldsymbol{d}} \subset \mathbb{B}$ (resp. $J \subset \mathbb{B}$) l'idéal engendré par les coefficients de $\theta_{d_r} f_{\boldsymbol{d}^2}$ (resp. $\theta_1 f_{\boldsymbol{d}^1}$). Donc, pour tout $g \in J_{\boldsymbol{d}}$, les coefficients dans $\mathbb{A}$ du polynôme

$$\theta_{\boldsymbol{d}^2}\big(a^{(d_r-1)(\delta-1)} f_{\boldsymbol{d}^2}\big)$$

sont entiers sur $\wp^{\#}_{1,\boldsymbol{d}^1}$ dans l'anneau $\mathbb{S}\mathbb{A}$. Maintenant le LEMME 3 donne un entier M tel que $x_0^M \wp^{\#}_{1,\boldsymbol{d}^2} \subset \overline{\wp^{\#}_{1,\boldsymbol{d}^1}}$.

En utilisant le théorème 2.1 de [LT] (via le § 4 de [LT]), on trouve le corollaire quantitatif suivant.

COROLLAIRE 1. — *Pour tout* $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^r$, *on a* $(\wp_{1,\boldsymbol{d}})^n \subset \wp_1$.

Démonstration. — Soit $\wp'$ un idéal premier associé à $\wp_{1,\boldsymbol{d}}$; l'anneau local $R = \mathbb{A}_{\wp'}$ est de dimension $\leq n$ et l'idéal $\wp_{1,\boldsymbol{d}}R$ est entier sur $\wp_1 R$. Le théorème cité montre alors que $(\wp_{1,\boldsymbol{d}}R)^n \subset \wp_1 R$.

Le théorème suivant montre la relation principale entre les idéaux $\wp_{\ell,\boldsymbol{d}}$.

THÉORÈME 2. — *Soit* $\wp$ *un idéal premier de codimension* $n+1-r$ *engendré par des polynômes homogènes de degrés* $\leq d$ *et soit* $\boldsymbol{d} = (d_1,\dots,d_r) \in \mathbb{N}^r$ *avec* $d_i \geq d$ $(i=1,\dots,r)$. *Alors pour tout* $\ell, m \in \mathbb{N}$ *on a :*

$$\wp^m \wp_{m+\ell,\boldsymbol{d}} \subset \wp_{\ell,\boldsymbol{d}}.$$

Démonstration. — On peut se ramener de façon évidente au cas $m=1$. Par ailleurs, si $\wp\wp_{\ell+1,\boldsymbol{d}} \subset \wp_{\ell,\boldsymbol{d}}$, on obtient

$$\wp\frac{\partial P}{\partial x_j} \in \wp^{\#}_{\ell+1,\boldsymbol{d}} \qquad (j=0,\dots,n)$$

pour tout $P \in \wp^{\#}_{\ell+1,\boldsymbol{d}}$ et donc $\wp\wp_{\ell+2,\boldsymbol{d}} \subset \wp_{\ell+1,\boldsymbol{d}}$. On en déduit qu'on peut se borner à montrer le théorème pour $m=\ell=1$. Soit maintenant f une forme éliminante d'indice $\boldsymbol{d}$ de $\wp$ et, pour $i=0,\dots,n$, notons u^i la forme homogène $u^i = \sum_{|\lambda|=d_i} u^i_\lambda x^\lambda$. Pour tout $h \in \{0,\dots,n\}$ il existe un entier M tel que

$$x_h^M f = p_h + q_{1,h}u_1 + \dots + q_{r,h}u_r$$

avec $p_h \in \wp\mathbb{A}[\mathfrak{U}_{\boldsymbol{d}}]$ et $q_{1,h},\dots,q_{r,h} \in \mathbb{A}[\mathfrak{U}_{\boldsymbol{d}}]$. Donc pour $j,h=0,\dots,n$ on a :

$$x_h^M \frac{\partial f}{\partial u^r_\lambda} \equiv q_{r,h}x^\lambda \mod (\wp, u^1,\dots,u^r).$$

Soit $P(x) = \sum_{|\lambda|=d_r} p_\lambda x^\lambda \in \wp$ et notons

$$g = \sum_{|\lambda|=d_r} p_\lambda \frac{\partial f}{\partial u^r_\lambda} \in \mathbb{K}[\mathfrak{U}_{\boldsymbol{d}}].$$

En utilisant les congruences ci-dessus, on trouve $g \in (\wp, u^1,\dots,u^r)$ et donc g est un multiple de f ; mais $\deg_{u^r} g < \deg_{u^r} f$ et donc $g=0$. Utilisant

$$x_\lambda\theta_{\boldsymbol{d}}\frac{\partial f}{\partial u^r_\mu} - x_\mu\theta_{\boldsymbol{d}}\frac{\partial f}{\partial u^r_\lambda} = \frac{\partial\theta f}{\partial s_{\lambda\mu}} \in \wp_1^{\#}\mathbb{A}[\mathbb{S}_{\boldsymbol{d}}],$$

on en déduit

$$P(x)\theta_{\boldsymbol{d}}\,\frac{\partial f}{\partial u_\lambda^r} \in \wp_{1,\boldsymbol{d}}$$

pour tout $|\lambda| = d_r$. Donc $\wp\wp_{2,\boldsymbol{d}} \subset \wp_{1,\boldsymbol{d}}$.

COROLLAIRE 2. — *Sous les hypothèses du théorème précédent, on a*

$$\wp^{m_\alpha(\wp)} \subset \wp_{1,\boldsymbol{d}}\,\bar{\mathbb{A}}_{M_\alpha} \cap \mathbb{A}.$$

Démonstration. — Le THÉORÈME 1 et la PROPOSITION 2 montrent que $\wp_{m_\alpha(\wp),\boldsymbol{d}} \not\subset M_\alpha$; il suffit donc de choisir $m = m_\alpha(\wp)$ et $\ell = 1$ dans le théorème précédent.

Le corollaire précédent joint au COROLLAIRE 1 donne le THÉORÈME B.

ADDENDUM. — Tout récemment, F. CATANESE a démontré dans [C] le THÉORÈME A sans aucune hypothèse sur l'anneau $\mathcal{O}_{\wp,\alpha}$.

BIBLIOGRAPHIE

[A1] AMOROSO (F.). — *Some remarks about algebraic independence measures in high dimension*, Bull. Soc. Math. France, t. **117**, 1989, p. 285–295.

[A2] AMOROSO (F.). — *Polynomial with high multiplicity*, Acta Arith., t. **LVI**, 1990, p. 345–364.

[C] CATANESE (F.). — *Chow varieties, Hilbert scemes and Moduli spaces of surfaces of general type*, J. Alg. Geom., t. **1**, 1992, p. 561–595.

[F] FULTON (W.). — *Intersection Theory.* — Springer-Verlag, New York, 1980.

[HIO] HERMANN (M.), IKEDA (S.) and ORBANZ (U.). — *Equimultiplicity and Blowing up.* — Springer-Verlag, New York, 1988.

[LT] LIPMAN (J.) and TEISSIER (B.). — *Pseudo-rational local rings and a theorem of Briançon-Skoda about integral clousures of ideals*, Michigan Math. J., t. **28**, 1981, p. 97–116.

[N1] NESTERENKO (Ju.V.). — *Estimates for the characteristic function of a prime ideal*, Mat. Sb., t. **123** (165), 1984, p. 11–34 et Math. USSR–Sb., t. **51**, 1985, p. 9–32.

[N2] Nesterenko (Ju.V.). — *On algebraic independence of algebraic powers of algebraic numbers*, Mat. Sb., t. **123** (4), 1984, p. 435–459 et Math. USSR–Sb., t. **51**, 1985, p. 429–453.

[P1] Philippon (P.). — *Critères pour l'indépendance algébrique*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., t. **64**, 1986, p. 5–52.

[P2] Philippon (P.). — *Théorème des zéros effectif et élimination*, Sém. Théorie Nombres de Bordeaux, t. **1**, 1989, p. 137–155.

[W] Weil (A.). — *Foundations of Algebraic Geometry*. — AMS 2nd ed., 1962.

[ZS] Zariski (O.) and Samuel (P.). — *Commutative Algebra*. — vol. 2, Van Nostrand, Princeton 1960, Springer-Verlag, New York, 1968.