

# BULLETIN DE LA S. M. F.

ANDREI RATIU

## Le calcul des invariants $\theta_p$ des espaces lenticulaires

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 123, n° 2 (1995), p. 225-241

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1995\\_\\_123\\_2\\_225\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1995__123_2_225_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## LE CALCUL DES INVARIANTS $\theta_p$ DES ESPACES LENTICULAIRES

PAR

ANDREI RATIU (\*)

---

RÉSUMÉ. — On calcule le rapport entre l'invariant topologique  $\theta_p$  de [BHMV] et l'invariant homotopique  $Z_N$  de [MOO] pour les espaces lenticulaires  $L(a, b)$ .

ABSTRACT. — We calculate the quotient of the topological invariant  $\theta_p$  of [BHMV] and the homotopical invariant  $Z_N$  of [MOO] for the lens spaces  $L(a, b)$ .

### Introduction

Dans l'article [BHMV], on a défini pour chaque entier  $p \geq 1$  un invariant  $\theta_p(M)$  d'une variété  $M$  de dimension 3, close et orientée, en utilisant une présentation de  $M$  comme résultat d'une chirurgie de Dehn sur  $S^3$  le long d'un entrelacs  $\mathcal{L}$ . On va calculer cet invariant pour les espaces lenticulaires  $L(a, b)$  en mettant en évidence le rapport qui existe entre  $\theta_p(L(a, b))$  et l'invariant  $Z_N(L(a, b), q)$ , défini dans [MOO], dans le cas où ce dernier invariant est non nul.

Les invariants de Witten introduits par la théorie de jauge de Chern-Simons sont calculés dans [J] pour les espaces lenticulaires et une formule explicite est obtenue seulement dans le cas  $p = 2r$  et  $\text{pgcd}(a, r) = 1$ . A présent, les espaces lenticulaires et les fibrés toriques (voir [J, th. 4.1]) constituent les seuls exemples dont les invariants  $\theta_p$  ont pu être calculés pour presque tous  $p$ .

Soient  $p \geq 3$  et  $M$  une variété de dimension 3 close et orientée obtenue par une chirurgie de Dehn sur  $S^3$  le long d'un entrelacs en bandes  $\mathcal{L}$ . La

---

(\*) Texte reçu le 22 juillet 1993, révisé le 25 mai 1994.

A. RATIU, U.F.R. de Mathématiques, 3<sup>e</sup> cycle, Université Paris 7, 75251 Paris CEDEX 05 ou Institut de Mathématiques de l'Académie Roumaine, P.O. BOX 1-764, RO-70700, Bucarest, Roumanie.

Email : [ratiu@mathp7.jussieu.fr](mailto:ratiu@mathp7.jussieu.fr) et [ratiu@roimar.imar.ro](mailto:ratiu@roimar.imar.ro).

Classification AMS : 57M25.

formule de [BHMV, th. B]

$$\theta_p(M) = \frac{\langle \Omega_p, \Omega_p, \dots, \Omega_p \rangle_{\mathcal{L}}}{\langle t(\Omega_p) \rangle^{b_+(\mathcal{L})} \langle t^{-1}(\Omega_p) \rangle^{b_-(\mathcal{L})}}$$

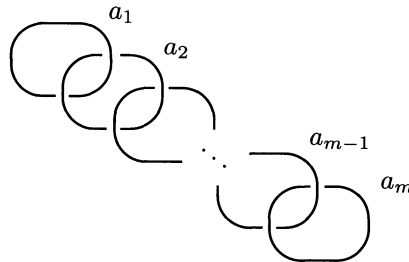
définit pour chaque  $p \geq 3$  un invariant de  $M$  à valeurs dans l'anneau

$$\Lambda_p[1/p] \quad \text{où} \quad \Lambda_p = \mathbb{Z}[A]/\Phi_{2p}(A),$$

$\Phi_{2p}(A)$  étant le polynôme cyclotomique d'ordre  $2p$ . Le numérateur de la formule est une combinaison linéaire sur  $\Lambda_p$  de certains cablages de  $\mathcal{L}$ , dictée par un élément universel  $\Omega_p$  et évaluée par le crochet de Kauffman (voir la définition du métacrochet de Kauffman dans [BHMV]). On va désigner par :

- $B$  la matrice d'enlacement de  $\mathcal{L}$ ,
- $b_+(\mathcal{L})$  (resp.  $b_-(\mathcal{L})$ ) le nombre des valeurs propres positives (resp. négatives) de  $B$ ,
- $\sigma = b_+(\mathcal{L}) - b_-(\mathcal{L})$  la signature de  $B$ .

Soient  $a$  et  $b$  premiers entre eux, tels que  $0 < b < a$ . L'espace lenticulaire  $L(a, b)$  s'obtient par une chirurgie de Dehn sur  $S^3$  le long de l'entrelacs en bandes  $\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_m)$  représenté dans la figure



avec la condition [Ro, p. 272] :

$$\frac{a}{b} = a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{a_m}}}$$

Soit  $Z_p(L(a, b))$  l'invariant homotopique défini dans [MOO] à partir de la matrice d'enlacement  $B$ , pour  $L(a, b)$  et pour  $N = p$  et  $q = A^{(1+p)}$ . Dans la section 4 on déduit que

$$Z_p(L(a, b)) \neq 0 \iff p \text{ impair ou } p \text{ pair et } v_2(p) \neq v_2(a)$$

où  $v_\pi(x)$  est la  $\pi$ -valuation de l'entier  $x$ , pour tout  $\pi$  premier. Dans ce cas on va écrire :

- pour  $p$  impair,  $p = p_1 p_2$ , où

$$p_1 = \prod_{v_\pi(p) \leq v_\pi(a)} \pi^{v_\pi(p)} \quad \text{et} \quad p_2 = \prod_{v_\pi(p) > v_\pi(a)} \pi^{v_\pi(p)} ;$$

- pour  $p$  pair,  $2p = p_1 p_2$ , où

$$p_1 = \prod_{v_\pi(p) \leq v_\pi(a)} \pi^{v_\pi(2p)} \quad \text{et} \quad p_2 = \prod_{v_\pi(p) > v_\pi(a)} \pi^{v_\pi(2p)} ;$$

et soient  $u$  et  $v$  des entiers tels que

$$u p_1 + v p_2 = 1.$$

Pour une racine de l'unité  $q$  d'ordre  $r \geq 0$  et un nombre rationnel  $\alpha/\beta$  avec  $r$  et  $\beta$  premiers entre eux, on peut définir naturellement :

$$[q]^{\alpha/\beta} = q^{\alpha\beta^*} \quad \text{où} \quad \beta\beta^* \equiv 1 \pmod{r}.$$

Notre résultat principal est le suivant.

THÉORÈME 1. — Soient  $a > b > 0$  premiers entre eux,  $p \geq 3$  et soit  $d = \text{pgcd}(p, a) > 0$ . Si  $p$  est impair ou  $p$  est pair et  $v_2(p) \neq v_2(a)$ , on a pour l'espace lenticulaire  $L(a, b)$  :

$$\frac{\theta_p(L(a, b))}{Z_p(L(a, b))} = \frac{[(-A)^{vp_2}]^{3+12s(a,b)-a/b}}{A^2 - A^{-2}} \sum \varepsilon [(-A)^{up_1}]^{2\varepsilon/a - 12s(b,a)},$$

la somme étant prise sur  $\varepsilon = \pm 1$  tel que  $b \equiv \varepsilon \pmod{d}$ .

Ici,  $s(a, b)$  désigne la somme de Dedekind [R, p. 145].

REMARQUE. — Cette formule, contenant une somme avec au plus deux termes, est plus simple que la formule obtenue dans [J, th. 3.4]. En particulier, si  $b \not\equiv \pm 1 \pmod{d}$ , on a  $\theta_p(L(a, b)) = 0$ .

**1. Le calcul de  $\theta_p(L(a, b))$  à partir de la matrice d'enlacement**

Rappelons quelques définitions de l'article [BHMV]. Pour une variété  $M$  de dimension 3, compacte et orientée, on définit le module de Jones-Kauffman  $K(M)$  comme le  $\mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ -module engendré par les classes d'isotopie des entrelacs en bandes dans  $M$ , factorisé par les relations «skein» de Kauffman. Étant donné un entrelacs  $\mathcal{L} \subset S^3$ , sa classe dans  $K(S^3)$  correspond — par l'isomorphisme  $K(S^3) \cong \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$  — à la valeur du crochet de Kauffman de  $\mathcal{L}$ , notée  $\langle \mathcal{L} \rangle$ . On montre que le module de Jones-Kauffman du tore solide standard  $\mathcal{B} = K(S^1 \times I \times I)$  a une structure d'algèbre, isomorphe à l'algèbre polynomiale  $\mathbb{Z}[A^{\pm 1}][z]$ , où  $z$  correspond à une bande axiale standard. En fait, la construction de  $K(\ )$  définit un foncteur de la catégorie des 3-variétés compactes et orientées et leurs plongements propres. Dû aux faits que

$$K\left(\bigsqcup_{i=1}^m (S^1 \times I \times I)_i\right) \cong \mathcal{B}^{\otimes m}$$

et qu'un entrelacs à  $m$  bandes  $\mathcal{L} \subset S^3$  définit un plongement d'un voisinage tubulaire de  $\mathcal{L}$  dans  $S^3$ , le foncteur  $K(\ )$  définit une application multilinéaire, nommée le *multi-crochet de Kauffman* :

$$\langle \ , \dots, \ \rangle_{\mathcal{L}} : \mathcal{B}^{\otimes m} \longrightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm 1}].$$

En particulier,  $\langle z^{i_1}, z^{i_2}, \dots, z^{i_m} \rangle_{\mathcal{L}}$  est la classe de l'entrelacs dans  $S^3$  obtenu en remplaçant pour tout  $j = 1, \dots, m$ , la  $j$ -ème composante de  $\mathcal{L}$  par  $i_j$  bandes parallèles à celle-ci, situées dans un voisinage suffisamment petit.

Soient  $t$  l'automorphisme de  $\mathcal{B}$  défini par un «twist» positif du tore solide standard et  $c$  l'endomorphisme de  $\mathcal{B}$  qui fait correspondre à un entrelacs sa réunion disjointe avec une bande  $J \times \partial(I \times I)$  où  $J$  est un petit intervalle compact dans  $S^1$ . Les deux opérateurs commutent et se diagonalisent simultanément par rapport à la base  $(e_{\ell})_{\ell \geq 0}$  dans  $\mathcal{B} \cong \mathbb{Z}[A^{\pm 1}][z]$  définie par la relation de récurrence :

$$e_{\ell-1} + e_{\ell+1} = e_1 e_{\ell}, \quad \forall \ell \geq 1;$$

$$e_0 = 1, \quad e_1 = z.$$

On a donc  $t(e_{\ell}) = \mu_{\ell} e_{\ell}$  et  $c(e_{\ell}) = \lambda_{\ell} e_{\ell}$  où

$$\mu_{\ell} = (-1)^{\ell} A^{\ell^2 + 2\ell} \quad \text{et} \quad \lambda_{\ell} = -A^{2\ell+2} - A^{-2\ell-2}$$

pour tous  $\ell \geq 0$ . Rappelons aussi la formule

$$\langle e_{\ell-1} \rangle = (-1)^{\ell-1} \frac{A^{2\ell} - A^{-2\ell}}{A^2 - A^{-2}}.$$

Pour  $p \geq 3$ , soit

$$\mathcal{B}_p = \mathcal{B} \otimes_{\mathbb{Z}[A^{\pm 1}]} \Lambda_p$$

et soit  $\Omega_p \in \mathcal{B}_p$  l'élément universel qui paraît dans la formule de définition de  $\theta_p$  :

$$\Omega_p = \sum_{\ell=0}^n \langle e_\ell \rangle e_\ell = \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^p \langle e_\ell \rangle e_\ell, \quad \text{où } n = \left[ \frac{1}{2}(p-1) \right].$$

Soient :

$$I = 3\sigma - \text{Tr } B \quad \text{et} \quad g(p, s) = \sum_{\ell=0}^{p-1} (-1)^{s\ell} A^{s\ell^2} = \sum_{\ell=0}^{p-1} A^{(1+p)s\ell^2}.$$

On a (cf. [BHMV, lemme 6.6i])

$$g(p, 1) \overline{g(p, 1)} = p$$

donc  $g(p, 1)$  est inversible dans  $\Lambda_p[1/p]$ . Soit :

$$T = \mathbb{Z}^m / p\mathbb{Z}^m.$$

PROPOSITION 2. — Pour tout  $p \geq 3$ , l'invariant  $\theta_p(L(a, b))$  s'exprime par la formule suivante :

$$\theta_p(L(a, b)) = \frac{(-1)^{b+(\mathcal{L})} A^{(1+p)I}}{p^{b-(\mathcal{L})} g(p, 1)^\sigma (A^2 - A^{-2})} \sum_{\varepsilon' = \pm 1} \sum_{\ell \in T} \varepsilon' A^{(1+p)(\ell B \ell + 2\ell_1 + 2\varepsilon' \ell_m)}$$

où  $\ell = {}^t(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m) \in T$ .

Notons que dans la dernière somme chaque terme est bien défini par la classe  $\ell$  de congruence modulo  $p$ .

Pour  $i \geq 0$  on va noter

$$\mathcal{P}_i(-y - y^{-1}) = (-1)^i (y^i + y^{i-2} + \dots + y^{-i+2} + y^{-i})$$

avec  $\mathcal{P}_0(-y - y^{-1}) = 1$ . On a la relation de récurrence :

$$\mathcal{P}_{i-1} + \mathcal{P}_{i+1} = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_i.$$

REMARQUE. — Dans  $\mathbb{Z}[A]$ , pour tous  $i, j \geq 0$ , on a l'égalité :

$$\mathcal{P}_{i-1}(\lambda_{j-1}) \langle e_{j-1} \rangle = (-1)^{i+j} \frac{A^{2ij} - A^{-2ij}}{A^2 - A^{-2}}.$$

La démonstration de la PROPOSITION 2 utilise le lemme suivant.

LEMME 3. — Pour  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_m)$ , on a :

$$\langle e_{\ell_1}, e_{\ell_2}, \dots, e_{\ell_m} \rangle_{\mathcal{L}} = \mu_{\ell_1}^{a_1} \cdots \mu_{\ell_m}^{a_m} \mathcal{P}_{\ell_2}(\lambda_{\ell_1}) \cdots \mathcal{P}_{\ell_m}(\lambda_{\ell_{m-1}}) \langle e_{\ell_1} \rangle.$$

Démonstration de la proposition 2. — En notant  $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots, p\}^m$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle \Omega_p, \Omega_p, \dots, \Omega_p \rangle_{\mathcal{L}} &= \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{\ell \in \mathcal{T}} \langle e_{\ell_1-1} \rangle \cdots \langle e_{\ell_{m-1}-1} \rangle \langle e_{\ell_1-1}, \dots, e_{\ell_{m-1}-1} \rangle_{\mathcal{L}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{\ell \in \mathcal{T}} \left( \prod_{i=1}^m \mu_{\ell_i-1}^{a_i} \right) \left[ \prod_{j=1}^{m-1} \mathcal{P}_{\ell_{j+1}-1}(\lambda_{\ell_j-1}) \langle e_{\ell_j-1} \rangle \right] \langle e_{\ell_1-1} \rangle \langle e_{\ell_{m-1}-1} \rangle \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^m A^{-(1+p)} \text{Tr } B (A^2 - A^{-2})^{-(m+1)} \\ &\quad \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ i=0, m}} \sum_{\ell \in \mathcal{T}} \varepsilon_0 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m \\ &\quad A^{(1+p)[\sum_{i=1}^m a_i \ell_i^2 + 2\sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon_j \ell_j \ell_{j+1} + 2\varepsilon_0 \ell_1 + 2\varepsilon_m \ell_m]} \\ &= A^{-(1+p)} \text{Tr } B (A^2 - A^{-2})^{-(m+1)} \\ &\quad \sum_{\varepsilon' = \pm 1} \sum_{\ell \in \mathcal{T}} \varepsilon' A^{(1+p)({}^t \ell B \ell + 2\ell_1 + 2\varepsilon' \ell_m)} \end{aligned}$$

où, dans la dernière égalité, on a éliminé successivement les signes  $\varepsilon_i$  pour  $i = 0, \dots, m - 1$ , par des substitutions de la forme  $\ell_i \mapsto \varepsilon_{i-1} \ell_i$  pour  $i = 1, \dots, m$  qui produisent chacune un facteur 2 et on a noté  $\varepsilon' = \varepsilon_m$ .

Le lemme 6.7 [BHMV] nous donne :

$$\begin{aligned} \langle t(\Omega_p) \rangle &= \frac{A^{-3}}{A^2 - A^{-2}} g(p, 1), \\ \langle t^{-1}(\Omega_p) \rangle &= \overline{\langle t(\Omega_p) \rangle} = -p \frac{A^3}{A^2 - A^{-2}} g(p, 1)^{-1}. \end{aligned}$$

Dans notre cas :

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_m \end{pmatrix}.$$

Les conditions pour que la fraction continue soit définie et non nulle

$$a_m \neq 0, \quad a_{m-1} a_m - 1 \neq 0, \quad \dots, \quad \Delta_{\hat{1}} \neq 0, \quad \Delta \neq 0$$

où  $\Delta_{\hat{1}}$  est le mineur de  $B$  obtenu en effaçant la première ligne et la première colonne, nous assurent que  $B$  est une matrice non dégénérée donc  $m = b_+(\mathcal{L}) + b_-(\mathcal{L})$ . Alors :

$$\begin{aligned} \theta_p(L(a, b)) &= \frac{A^{-(1+p)} \text{Tr } B (A^2 - A^{-2})^{-1}}{(-1)^{b_-(\mathcal{L})} p^{b_-(\mathcal{L})} A^{-3\sigma} g(p, 1)^\sigma} \\ &\quad \sum_{\varepsilon'=\pm 1} \sum_{\ell \in T} \varepsilon' A^{(1+p)({}^t \ell B \ell + 2\ell_1 + 2\varepsilon' \ell_m)} \\ &= \frac{(-1)^{b_+(\mathcal{L})} A^{(1+p)(3\sigma - \text{Tr } B)}}{p^{b_-(\mathcal{L})} g(p, 1)^\sigma (A^2 - A^{-2})} \\ &\quad \sum_{\varepsilon'=\pm 1} \sum_{\ell \in T} \varepsilon' A^{(1+p)({}^t \ell B \ell + 2\ell_1 + 2\varepsilon' \ell_m)}. \quad \square \end{aligned}$$

*Démonstration du lemme 3.* — On peut réduire au cas où  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(0, 0, \dots, 0)$  à l'aide de la formule  $t(e_i) = \mu_i e_i$ , il suffit donc de démontrer que, dans ce cas :

$$\langle e_{\ell_1}, e_{\ell_2}, \dots, e_{\ell_m} \rangle_{\mathcal{L}} = \mathcal{P}_{\ell_2}(\lambda_{\ell_1}) \cdots \mathcal{P}_{\ell_m}(\lambda_{\ell_{m-1}}) \langle e_{\ell_1} \rangle.$$

On va définir le métacrochet de  $\mathcal{L}$ , relatif à la première composante, à valeurs dans le module de Kauffman  $\mathcal{B}_p$  du tore solide standard

$$\{ , \dots, \}_{\mathcal{L}, 1} : \mathcal{B}_p \times \mathcal{B}_p \times \cdots \times \mathcal{B}_p \longrightarrow \mathcal{B}_p$$

induit par l'immersion de  $\mathcal{L}$  dans un voisinage tubulaire suffisamment grand de la première composante. En désignant par  $z$  une bande parallèle à l'axe du tore solide standard, on a dans  $\mathcal{B}_p = \Lambda_p[z]$  :

$$\begin{aligned} \{z, 1, \dots, 1\}_{\mathcal{L}, 1} &= z, \\ \{1, \dots, 1, z, 1, \dots, 1\}_{\mathcal{L}, 1} &= \langle z \rangle. \end{aligned}$$

On a également :

$$\langle \{ , \dots, \}_{\mathcal{L}, 1} \rangle = \langle , \dots, \rangle_{\mathcal{L}}.$$

Il suffit de démontrer que :

$$\{e_{\ell_1}, e_{\ell_2}, \dots, e_{\ell_m}\}_{\mathcal{L}, 1} = \mathcal{P}_{\ell_2}(\lambda_{\ell_1}) \cdots \mathcal{P}_{\ell_m}(\lambda_{\ell_{m-1}}) e_{\ell_1}$$

Si  $m = 2$ , alors  $\mathcal{L} = \mathcal{H}$  est l'entrelacs de Hopf avec chaque auto-intersection nulle. Donc  $\{e_\ell, z\}_{\mathcal{L}, 1} = c(e_\ell) = \lambda_\ell e_\ell$ .



Par récurrence on déduit que  $\{e_{\ell_1}, e_{\ell_2}\}_{\mathcal{L},1} = \mathcal{P}_{\ell_2}(\lambda_{\ell_1})e_{\ell_1}$ .

Grâce à la formule

$$\{e_{\ell_1}, e_{\ell_2}, \dots, e_{\ell_m}\}_{\mathcal{L},1} = \{e_{\ell_1}, \{e_{\ell_2}, \dots, e_{\ell_m}\}_{\mathcal{L}',2}\}_{\mathcal{H},1}$$

où  $\mathcal{L}'$  est l'entrelacs obtenu de  $\mathcal{L}$  en effaçant la première composante et en gardant la numérotation des composantes. On déduit par l'hypothèse d'induction :

$$\begin{aligned} \{e_{\ell_1}, e_{\ell_2}, \dots, e_{\ell_m}\}_{\mathcal{L},1} &= \mathcal{P}_{\ell_3}(\lambda_{\ell_2}) \cdots \mathcal{P}_{\ell_m}(\lambda_{\ell_{m-1}})\{e_{\ell_1}, e_{\ell_2}\}_{\mathcal{H},1} \\ &= \mathcal{P}_{\ell_2}(\lambda_{\ell_1}) \cdots \mathcal{P}_{\ell_m}(\lambda_{\ell_{m-1}})e_{\ell_1}. \quad \square \end{aligned}$$

**2. Le calcul de  $I = 3\sigma - \text{Tr } B$**

Soient  $\Delta = \det B$  et  $\Delta_{i\hat{j} \dots}$  le mineur de  $B$  obtenu en effaçant les lignes et les colonnes indiquées. On peut montrer par récurrence que :

$$\Delta_{\hat{1}} \Delta_{\hat{m}} - \Delta \Delta_{\hat{1}\hat{m}} = 1$$

donc  $\Delta$  et  $\Delta_{\hat{1}}$  sont premiers entre eux, et d'autre part que

$$\frac{\Delta}{\Delta_{\hat{1}}} = a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{a_m}}}$$

donc  $\Delta = \eta a$  et  $\Delta_{\hat{1}} = \eta b$  pour un  $\eta \in \{\pm 1\}$ . Soient

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ . On associe à la matrice  $B$  la matrice  $U \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$  :

$$U = T^{a_1} S T^{a_2} S \dots T^{a_m} S.$$

Par récurrence, on a :

$$U = \begin{pmatrix} \Delta & -\Delta_{\hat{m}} \\ \Delta_{\hat{1}} & -\Delta_{\hat{1}\hat{m}} \end{pmatrix}.$$

Soit  $\Phi : \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  la fonction *phi* de Rademacher [R, p. 150] définie par :

$$\Phi \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{\alpha + \delta}{\gamma} - 12(\text{sgn } \gamma)s(\delta, \gamma) & \text{si } \gamma \neq 0, \\ \frac{\beta}{\delta} & \text{si } \gamma = 0, \end{cases}$$

où  $s(\delta, \gamma)$  est la somme de Dedekind.

LEMME 4. — On a :

$$I = 3 + 12s(a, b) - \frac{\Delta - \Delta_{\widehat{1}^m}}{\Delta_{\widehat{1}}}.$$

*Démonstration.* — On va montrer par récurrence sur  $m$  que :

$$I = 3 \operatorname{sgn}(\Delta \Delta_{\widehat{1}}) - \Phi(U).$$

Alors, en remplaçant dans cette formule, on va obtenir :

$$\begin{aligned} I &= 3\eta^2 + 12\eta s(-\Delta_{\widehat{1}^m}, \Delta_{\widehat{1}}) - \frac{\Delta - \Delta_{\widehat{1}^m}}{\Delta_{\widehat{1}}} \\ &= 3 + 12s(a, b) - \frac{\Delta - \Delta_{\widehat{1}^m}}{\Delta_{\widehat{1}}} \end{aligned}$$

car on a les propriétés [R, p. 145–146] :

$$\begin{aligned} s(\delta, -\gamma) &= s(\delta, \gamma), \\ s(-\delta, \gamma) &= -s(\delta, \gamma), \\ s(\delta^*, \gamma) &= s(\delta, \gamma) \quad \text{si } \delta\delta^* \equiv 1 \pmod{\gamma}. \end{aligned}$$

Pour  $m = 1$ , on a :

$$U = \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(U) = a_1.$$

Comme  $\sigma = \operatorname{sgn} a_1 = \operatorname{sgn}(\Delta \Delta_{\widehat{1}})$ , la formule en résulte. On suppose la formule vraie pour  $B$  et soit

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_m \end{pmatrix}$$

avec  $a_0 \in \mathbb{Z}$  et  $\bar{\Delta} = \det \bar{B}$ . Alors

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} \bar{\Delta} & -\bar{\Delta}_{\widehat{m}} \\ \Delta & -\Delta_{\widehat{m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} U,$$

donc (voir [R, p. 152]) :

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{U}) &= \Phi(U) + a_0 - 3 \operatorname{sgn}(\Delta \Delta_{\widehat{1}}), \\ I(\bar{B}) - I(B) &= 3 \operatorname{sgn}(\bar{\Delta} / \Delta) - a_0 \\ &= (3 \operatorname{sgn}(\bar{\Delta} \Delta) - \Phi(\bar{U})) - (3 \operatorname{sgn}(\Delta \Delta_{\widehat{1}}) - \Phi(U)). \quad \square \end{aligned}$$

### 3. La forme quadratique d'enlacement

Soit  $q : T \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  la forme quadratique d'enlacement :

$$q(\ell) = \frac{1+p}{2p} {}^t\ell B \ell, \quad \ell = {}^t(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m) \in T.$$

Pour  $\varepsilon' = \pm 1$ , soit  $\varphi_{\varepsilon'} : T \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  la forme linéaire :

$$\varphi_{\varepsilon'}(\ell) = \frac{1}{p}(\ell_1 + \varepsilon' \ell_m), \quad \forall \ell \in T.$$

On va utiliser l'injection de  $\Lambda_p$  dans  $\mathbb{C}$  donnée par  $A = e^{\pi i/p}$  et on va noter  $e(x)$  pour  $e^{2\pi i x}$  avec  $x \in \mathbb{Q}$ . Soit :

$$S_{\varepsilon'} = \sum_{\ell \in T} e(q(\ell) + \varphi_{\varepsilon'}(\ell)).$$

Soit  $K \subset T$  le noyau de la forme bilinéaire symétrique associée à  $q$  :

$$(\ell, k) = q(\ell + k) - q(\ell) - q(k) = \frac{1}{p} {}^t\ell B k \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad \forall \ell, k \in T.$$

Soient  $d = \text{pgcd}(\Delta, p) > 0$  et  $p = dp'$ . Soient  $\Delta_0 = 1$  et, pour  $i \geq 1$ ,

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_i \end{vmatrix}.$$

LEMME 5. — On a  $K \simeq \mathbb{Z}/d$  et un générateur de  $K$  est  $x = (x_i)_{i=1, \dots, m}$  avec  $x_i = (-1)^{i-1} p' \Delta_{i-1}$  pour  $i = 1, \dots, m$ .

Démonstration. — Soit  $W^4$  la variété de dimension 4 obtenue à partir de  $B^4$  en attachant  $m$  anses d'indice 2 le long des composantes de l'entrelacs en bandes  $\mathcal{L} \subset S^3 = \partial B^4$ . Alors :

$$W^4 \simeq \bigvee_{i=1}^m S_i^2 \quad \text{et} \quad \partial W^4 = L(a, b).$$

Par rapport aux bases canoniquement définies par les anses, on a les suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_2(W; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_2(W, M; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_1(M; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \\ & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^m & \xrightarrow{B \times} & \mathbb{Z}^m & \longrightarrow & \mathbb{Z}/\Delta \longrightarrow 0 \end{array}$$

et en utilisant la formule des coefficients universels pour l'homologie :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow H_2(M; \mathbb{Z}/p) & \rightarrow & H_2(W; \mathbb{Z}/p) & \rightarrow & H_2(W, M; \mathbb{Z}/p) & \rightarrow & H_1(M; \mathbb{Z}/p) \rightarrow 0 \\
 & \cong \downarrow & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\
 0 \rightarrow \mathbb{Z}/\Delta * \mathbb{Z}/p & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/p)^m & \xrightarrow{B \times} & (\mathbb{Z}/p)^m & \longrightarrow & \mathbb{Z}/\Delta \otimes \mathbb{Z}/p \rightarrow 0.
 \end{array}$$

On en déduit :

$$K \simeq \{k \in \mathbb{Z}^m ; Bk \in p\mathbb{Z}^m\} / p\mathbb{Z}^m \simeq \mathbb{Z}/\Delta * \mathbb{Z}/p \simeq \mathbb{Z}/d.$$

D'autre part, on a

$$Bx = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (-1)^{m-1}p\Delta' \end{pmatrix} \in p\mathbb{Z}^m$$

car  $\Delta_i = a_i\Delta_{i-1} - \Delta_{i-2}$  pour tous  $i \geq 2$  et  $\Delta = d\Delta'$ . Donc  $x$  appartient à  $K$  et pour  $t \in \mathbb{Z}$ , on a  $tx_1 = tp' \in p\mathbb{Z}$  si et seulement si  $d$  divise  $t$ .  $\square$

REMARQUE. — En notant par  $v_2(\ )$  la 2-valuation d'un nombre entier, on a  $q|_K \neq 0$  si et seulement si  $v_2(p) = v_2(\Delta) > 0$  car

$$q(x) = \frac{1+p}{2p} {}_t x Bx = \frac{1+p}{2p} (-1)^{m-1} p \Delta' x_m = \frac{1+p}{2} \Delta' p' \Delta_m \hat{\Delta} \neq 0$$

équivalent à «  $p$  est pair et  $p', \Delta', \Delta_m \hat{\Delta}$  sont impairs », ce qui équivaut encore à la condition  $v_2(p) = v_2(\Delta) > 0$ .

LEMME 6. — Supposons  $q|_K = 0$  et  $\varepsilon' \in \{\pm 1\}$ .

- a) Si  $d$  ne divise pas  $(-1)^m \varepsilon' - \Delta_1 \hat{\Delta}$ , alors  $S_{\varepsilon'} = 0$ .
- b) Si  $d$  divise  $(-1)^m \varepsilon' - \Delta_1 \hat{\Delta}$ , il existe un  $\tau_{\varepsilon'} \in \mathbb{Z}$  tel que

$$S_{\varepsilon'} = \left[ \sum_{\ell \in T} e(q(\ell)) \right] e\left(-\frac{1+p}{2p} \tau_{\varepsilon'}\right) \neq 0.$$

En outre,  $\tau_{\varepsilon'}$  est unique modulo  $p$  (resp. modulo  $2p$ ) si  $p$  est impair (resp. pair).

Démonstration. — On a  $\varphi_{\varepsilon'}(x) = \frac{1}{d} (1 + (-1)^{m-1} \varepsilon' \Delta_m \hat{\Delta})$ , donc :

$$\varphi_{\varepsilon'}|_K = 0 \iff d \mid 1 + (-1)^{m-1} \varepsilon' \Delta_m \hat{\Delta} \iff d \mid (-1)^m \varepsilon' - \Delta_1 \hat{\Delta}.$$

a) Si  $d$  ne divise pas  $(-1)^m \varepsilon' - \Delta_{\widehat{1}}$ , alors  $(q + \varphi_{\varepsilon'})|_K$  est une forme linéaire non nulle à valeurs dans  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , donc  $\sum_{k \in K} e(q(k) + \varphi_{\varepsilon'}(k)) = 0$  et l'on a :

$$\begin{aligned} S_{\varepsilon'} &= \sum_{\ell \in T/K} \sum_{k \in K} e((q + \varphi_{\varepsilon'}) (\ell + k)) \\ &= \left\{ \sum_{\ell \in T/K} e((q + \varphi_{\varepsilon'}) (\ell)) \right\} \left\{ \sum_{k \in K} e((q + \varphi_{\varepsilon'}) (k)) \right\} = 0. \end{aligned}$$

b) Si  $d$  divise  $(-1)^m \varepsilon' - \Delta_{\widehat{1}}$ , alors  $\varphi_{\varepsilon'}|_K = 0$ . Il existe donc un unique  $u_{\varepsilon'} \in T/K$  tel que

$$(u_{\varepsilon'}, \ell) = \varphi_{\varepsilon'}(\ell) \quad \text{pour tout } \ell \in T,$$

c'est-à-dire :

$$Bu_{\varepsilon'} \equiv {}^t(1, 0, 0, \dots, 0, \varepsilon') \pmod{p}.$$

On obtient par récurrence pour  $u_{\varepsilon'} = (u_i)_{i=1, \dots, m}$  :

$$u_i \equiv (-1)^i (\bar{\Delta}_{i-1} - \Delta_{i-1} u_1) \pmod{p}, \quad i = 2, \dots, m$$

où

$$\bar{\Delta}_i = \begin{vmatrix} a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_3 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_i \end{vmatrix} \quad \text{et } \bar{\Delta}_1 = 1.$$

En outre, pour  $u_1$  on a :

$$\Delta u_1 \equiv \Delta_{\widehat{1}} + (-1)^{m-1} \varepsilon' \pmod{p}.$$

La formule de polarisation donne :

$$(q + \varphi_{\varepsilon'}) (\ell) = q(\ell + u_{\varepsilon'}) - q(u_{\varepsilon'}).$$

Donc

$$S_{\varepsilon'} = \left[ \sum_{\ell \in T} e(q(\ell)) \right] e\left(-\frac{1+p}{2p} {}^t u_{\varepsilon'} B u_{\varepsilon'}\right)$$

n'est pas nul car le premier facteur est un nombre complexe dont le module vaut  $\sqrt{p^m d}$ , selon un calcul standard.  $\square$

**4. L'invariant homotopique  $Z_N(M, q)$**

Soient  $N \geq 2$  et  $q$  une racine primitive de l'unité d'ordre  $2N$  (resp.  $N$ ) si  $N$  est pair (resp. impair). Pour une variété de dimension 3 obtenue par une chirurgie de Dehn sur  $S^3$  le long d'un entrelacs en bandes  $\mathcal{L}$  à  $m$  composantes avec la matrice d'enlacement  $B$ , on définit dans [MOO] l'invariant :

$$Z_N(M, q) = \left( \frac{G_N(q)}{|G_N(q)|} \right)^{-\sigma(B)} |G_N(q)|^{-m} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^m / N\mathbb{Z}^m} q^{\ell B \ell}$$

où  $\sigma(B)$  est la signature de la matrice  $B$  et  $G_N(q) = \sum_{h \in \mathbb{Z}/N} q^{h^2}$ . On montre que  $Z_N(M, q)$  est un invariant homotopique de  $M$ . Si on pose

$$N = p, \quad q = A^{(1+p)} = e\left(\frac{1+p}{2p}\right),$$

on a

$$G_N(q) = \sum_{h \in \mathbb{Z}/p} A^{(1+p)h^2} = g(p, 1)$$

et, dans le cas  $B$  non dégénérée :

$$\begin{aligned} Z_p(M, A^{1+p}) &= \left( \frac{g(p, 1)}{\sqrt{p}} \right)^{-\sigma} (\sqrt{p})^{-m} \sum_{\ell \in T} A^{(1+p)\ell B \ell} \\ &= g(p, 1)^{-\sigma} p^{-b-(\mathcal{L})} \sum_{\ell \in T} A^{(1+p)\ell B \ell} \end{aligned}$$

Donc  $Z_p(M, A^{1+p})$  appartient à  $\Lambda_p[1/p]$ . On sait que  $Z_N(M, q) = 0$  si et seulement s'il existe  $\alpha \in H^1(M; \mathbb{Z}/N)$  tel que l'on ait  $\alpha \cup \alpha \cup \alpha \neq 0$  [MOO, th. 3.2]. En utilisant le lemme 3.4 du même article, on déduit que  $Z_p(M, A^{1+p})$  est nul exactement dans le cas où  $q|_K \neq 0$ . Pour  $M = L(a, b)$ , ceci montre que :

$$Z_p(L(a, b), A^{1+p}) = 0 \iff v_2(p) = v_2(a) > 0.$$

Dans le cas contraire, on peut considérer le rapport

$$\frac{\theta_p(L(a, b))}{Z_p(L(a, b), A^{1+p})} = \frac{(-1)^{b+(\mathcal{L})} A^{(1+p)I}}{(A^2 - A^{-2})} \sum \varepsilon' A^{-(1+p)\tau_{\varepsilon'}}$$

où l'on additionne seulement les termes correspondants aux  $\varepsilon' \in \{\pm 1\}$  tels que  $d$  divise  $(-1)^m \varepsilon' - \Delta_{\hat{\gamma}}$  (voir le LEMME 6).

**5. Le calcul de  $\tau_{\varepsilon'}$**

Pour  $\pi$  premier, on note :

$$\mathbb{Z}_\pi = \varprojlim \mathbb{Z}/\pi^n \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}_\pi = \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_\pi.$$

Soient :

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \prod_{\pi} \mathbb{Z}_\pi \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{\pi} \mathbb{Q}_\pi.$$

Soit  $E_\pi$  l'idempotent canonique de  $\widehat{\mathbb{Z}}$  qui correspond à la projection  $\widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z}_\pi$ . On peut considérer que la forme quadratique prend ses valeurs dans le  $\widehat{\mathbb{Z}}$ -module  $\widehat{\mathbb{Q}}/\widehat{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{\pi} \mathbb{Q}_\pi/\mathbb{Z}_\pi$ , donc que l'on a :

$$q(u_{\varepsilon'}) = \sum_{\pi \text{ premier}} \frac{1+p}{2p} {}^t u_{\varepsilon'} B u_{\varepsilon'} E_\pi$$

où les termes qui correspondent à des  $\pi$  premiers qui ne divisent pas  $p$  sont nuls. On suppose que  $q|_K = 0$ .

Pour calculer  $\tau_{\varepsilon'}$  on va choisir une fois pour toutes

$$u_i = (-1)^i (\bar{\Delta}_{i-1} - \Delta_{i-1} u_1), \quad i = 2, \dots, m.$$

Il reste à choisir  $u_1 \in \mathbb{Z}$  tel que

$$\Delta u_1 \equiv \Delta_{\widehat{1}} + (-1)^{m-1} \varepsilon' \pmod{p}$$

en supposant que  $d$  divise  $(-1)^m \varepsilon' - \Delta_{\widehat{1}}$ .

Soit  $\pi$  premier impair qui divise  $p$  et soient  $\alpha = v_\pi(p)$  et  $\beta = v_\pi(\Delta)$ .

(i) Si  $\alpha \leq \beta$ , on peut choisir  $u_1 = 0$ . Donc :

$$\begin{aligned} \tau_{\varepsilon'} E_\pi &= (u_1 + \varepsilon' u_m) E_\pi \\ &= (-1)^m \varepsilon' \Delta_{\widehat{1} \widehat{m}} E_\pi \equiv \Delta_{\widehat{1}} \Delta_{\widehat{1} \widehat{m}} E_\pi \pmod{\pi^\alpha}. \end{aligned}$$

(ii) Si  $\alpha > \beta$ , on peut prendre  $u_1 = \frac{(-1)^{m-1} \varepsilon' + \Delta_{\widehat{1}}}{\Delta} \in \mathbb{Z}_\pi$ . Donc :

$$\begin{aligned} \tau_{\varepsilon'} E_\pi &\equiv [u_1 + (-1)^m \varepsilon' (\Delta_{\widehat{1} \widehat{m}} - \Delta_{\widehat{m}} u_1)] E_\pi \\ &= \frac{\Delta_{\widehat{1}} + \Delta_{\widehat{m}} + 2(-1)^{m-1} \varepsilon'}{\Delta} E_\pi \pmod{\pi^\alpha}. \end{aligned}$$

Remarquons que dans le cas  $\alpha = \beta$  les deux expressions coïncident car

$$\pi^{2\alpha} \text{ divise } [(-1)^{m-1}\varepsilon' + \Delta_{\hat{1}}] \cdot [1 + (-1)^{m-1}\varepsilon'\Delta_{\hat{m}}].$$

Pour  $p$  pair, on a une composante 2-primaire :

(i) Si  $v_2(p) < v_2(\Delta)$ , on choisit  $u_1 = 0$ . Donc :

$$\tau_{\varepsilon'} E_2 = u_m (-1)^m \Delta_{\hat{1}} E_2 = \Delta_{\hat{1}\hat{m}} \Delta_{\hat{1}} E_2.$$

(ii) Si  $v_2(p) > v_2(\Delta)$ , on choisit  $u_1 \in \mathbb{Z}_2$  tel que :

$$\Delta u_1 \equiv \Delta_{\hat{1}} + (-1)^{m-1}\varepsilon' \pmod{2p}.$$

Le même calcul que celui fait plus haut dans  $\mathbb{Z}_\pi$  nous donne :

$$\begin{aligned} \tau_{\varepsilon'} E_2 &= [u_1 + (-1)^m \varepsilon' (\Delta_{\hat{1}\hat{m}} - \Delta_{\hat{m}} u_1)] E_2 \\ &\equiv \frac{\Delta_{\hat{1}} + \Delta_{\hat{m}} + 2(-1)^{m-1}\varepsilon'}{\Delta} E_2 \pmod{2p\mathbb{Z}_2}. \end{aligned}$$

Donc on a démontré le lemme suivant.

LEMME 7. — Si  $d$  divise  $(-1)^m \varepsilon' - \Delta_{\hat{1}}$ , on a

$$\tau_{\varepsilon'} = \sum_{\pi \text{ premier}} (\tau_{\varepsilon'})_{\pi} E_{\pi} \in \widehat{\mathbb{Z}},$$

défini uniquement modulo  $p$  (resp. mod.  $2p$ ) si  $p$  est impair (resp. pair), où

$$(\tau_{\varepsilon'})_{\pi} = \begin{cases} \Delta_{\hat{1}\hat{m}} \Delta_{\hat{1}} & \text{si } 0 < v_{\pi}(p) \leq v_{\pi}(a), \\ \frac{\Delta_{\hat{1}} + \Delta_{\hat{m}} + 2(-1)^{m-1}\varepsilon'}{\Delta} & \text{si } v_{\pi}(p) > v_{\pi}(a), \\ 0 & \text{si } v_{\pi}(p) = 0. \end{cases}$$



**6. La démonstration du théorème 1**

Supposons  $p$  impair ou  $p$  pair et  $v_2(p) \neq v_2(a)$ , donc  $q|_K = 0$  (voir la remarque du § 3) et  $Z_p(L(a, b)) \neq 0$  (voir § 4). On va noter

$$\varepsilon = (-1)^{b+(\mathcal{L})} \varepsilon' = (-1)^m \eta \varepsilon',$$

car  $\eta = \text{sgn } \Delta = (-1)^{b-(\mathcal{L})}$ . Supposons que  $b \equiv \varepsilon \pmod{d}$ , ce qui équivaut à la condition  $d \mid (-1)^m \varepsilon' - \Delta_{\hat{1}}$ . En utilisant la formule du rapport donnée à la fin du § 4, il faut calculer :

$$A^{(1+p)(I-\tau_{\varepsilon'})} = e\left(\frac{1+p}{2p} \sum_{\pi \text{ premier}} (I - \tau_{\varepsilon'}) E_{\pi}\right).$$

Il suffit donc de calculer la classe de congruence

$$(I - \tau_{\varepsilon'}) E_{\pi} \in \mathbb{Z}_{\pi}/2p\mathbb{Z}_{\pi} \quad \text{pour tous les } \pi \text{ divisant } p.$$

(a) Si  $0 < v_{\pi}(p) \leq v_{\pi}(\Delta)$ , alors  $\Delta_{\hat{1}}$  est inversible dans  $\mathbb{Z}_{\pi}$  et

$$\Delta_{\hat{1}}^2 - 1 \equiv 0 \pmod{2p\mathbb{Z}_{\pi}}.$$

Donc, en utilisant le LEMME 7 :

$$\begin{aligned} (I - \tau_{\varepsilon'}) E_{\pi} &= \left[ 3 + 12s(a, b) - \frac{\Delta}{\Delta_{\hat{1}}} + \frac{\Delta_{\hat{1}} \widehat{m}}{\Delta_{\hat{1}}} (1 - \Delta_{\hat{1}}^2) \right] E_{\pi} \\ &\equiv \left( 3 + 12s(a, b) - \frac{a}{b} \right) E_{\pi}. \end{aligned}$$

(b) Si  $0 \leq v_{\pi}(\Delta) < v_{\pi}(p)$ , en utilisant le même lemme :

$$\begin{aligned} (I - \tau_{\varepsilon'}) E_{\pi} &= \left[ 3 + 12s(a, b) - \frac{\Delta}{\Delta_{\hat{1}}} + \frac{\Delta_{\hat{1}} \widehat{m}}{\Delta_{\hat{1}}} - \frac{\Delta_{\hat{1}}}{\Delta} - \frac{\Delta_{\widehat{m}}}{\Delta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(-1)^m \varepsilon'}{\Delta} \right] E_{\pi} \\ &= \left( 3 + 12s(a, b) - \frac{\Delta}{\Delta_{\hat{1}}} - \frac{1}{\Delta \Delta_{\hat{1}}} - \frac{\Delta_{\hat{1}}}{\Delta} + \frac{2(-1)^m \varepsilon'}{\Delta} \right) E_{\pi} \\ &= \left( 3 + 12s(a, b) - \frac{a}{b} - \frac{1}{ab} - \frac{b}{a} + \frac{2\varepsilon}{a} \right) E_{\pi} \\ &= \left( \frac{2\varepsilon}{a} - 12s(b, a) \right) E_{\pi} \end{aligned}$$

où on a utilisé [R, p. 148] la formule de réciprocity des sommes de Dedekind :

$$s(a, b) + s(b, a) = -\frac{1}{4} + \frac{a}{12b} + \frac{b}{12a} + \frac{1}{12ab}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\theta_p(L(a, b))}{Z_p(L(a, b))} &= \frac{1}{A^2 - A^{-2}} \sum \varepsilon A^{(1+p)(I-\tau_\varepsilon)} \\ &= \frac{[A^{(1+p)vp_2}]^{3+12s(a,b)-a/b}}{A^2 - A^{-2}} \sum \varepsilon [A^{(1+p)up_1}]^{2\varepsilon/a-12s(b,a)} \end{aligned}$$

où la somme est prise sur les  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$  tels que  $b \equiv \varepsilon \pmod{d}$ . Dans cette formule, on a utilisé les notations introduites avant l'énoncé du THÉORÈME 1.  $\square$

REMARQUE. — Les calculs des entiers  $\pi$ -adiques  $(I - \tau_\varepsilon)E_\pi$  faits plus haut montrent également que les racines de l'unité paraissent dans la formule finale avec des exposants rationnels dont les dénominateurs sont premiers avec l'ordre de la racine respective.

## BIBLIOGRAPHIE

- [J] JEFFREY (L.C.). — *Chern-Simons-Witten Invariants of Lens Spaces and Torus Bundles and the Semiclassical Approximation*, preprint, Cambridge Univ., 1992.
- [MOO] MURAKAMI (H.), OHTSUKI (T.) and OKADA (M.). — *Invariants of three-manifolds derived from linking matrices of framed links*, Osaka J. Math., t. **29**, 1992, p. 545–572.
- [R] RADEMACHER (H.). — *Topics in Analytic Number Theory*, Grundlehren der math. Wissenschaften, vol. 169, Springer-Verlag, 1973.
- [Ro] ROLFSEN (D.). — *Knots and Links*. — Publish or Perish, 1976.
- [BHMV] BLANCHET (C.), HABEGGER (N.), MASBAUM (G.) and VOGEL (P.). — *Three-manifold Invariants derived from the Kauffman bracket*, Topology, t. **31(4)**, 1992, p. 685–699.