Bull. Soc. math. France
132 (4), 2004, p. 477–508

PROPRIÉTÉS (Q) ET (C). VARIÉTÉ COMMUTANTE

PAR JEAN-YVES CHARBONNEL

RÉSUMÉ. — Soient X une variété algébrique complexe, lisse, irréductible, E et F deux espaces vectoriels complexes de dimension finie et μ un morphisme de X dans l'espace $\mathrm{Lin}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F. Pour $x \in X$, on note $E(x)$ et $x \cdot E$ le noyau et l'image de $\mu(x), \overline{\mu}_x$ le morphisme de X dans $\mathrm{Lin}(E(x), F/(x \cdot E))$ qui associe à y l'application linéaire $v \mapsto \mu(y)(v) + x \cdot E$. Soit i_μ la dimension minimale de $E(x)$. On dit que μ a *la propriété* $(\mathbf{R})$ *en* x si $\mathrm{i}_{\overline{\mu}_x}$ est inférieur à i_μ. Soient F^* le dual de F, $\mathrm{S}(F)$ l'algèbre symétrique de F, $\mathcal{I}_\mu$ l'idéal de $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(F)$ engendré par les fonctions $(x, v') \mapsto \langle v', \mu(x)(v) \rangle$ où v est dans E et $\mathfrak{C}_\mu$ la sous-variété des zéros dans $X \times F^*$ de $\mathcal{I}_\mu$. Désignant par $\sqrt{\mathcal{I}_\mu}$ le radical de $\mathcal{I}_\mu$, par Σ le support de $\sqrt{\mathcal{I}_\mu}/\mathcal{I}_\mu$ dans $X \times F^*$ et par S la projection de Σ sur X, le premier résultat principal de ce mémoire dit que sous deux conditions techniques sur μ, S est une partie fermée de X dont la codimension est supérieure à 2 si et seulement si l'adhérence de l'ensemble des points de X en lesquels μ n'a pas la propriété $(\mathbf{R})$, a une codimension supérieure à 2.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On dit que $\mathfrak{g}$ a la *propriété* $(\mathbf{C})$ *en l'élément* ξ *de* $\mathfrak{g}$ si l'application adjointe de $\mathfrak{g}$ dans l'espace des endomorphismes linéaires de $\mathfrak{g}$ a la propriété $(\mathbf{R})$ en ξ et que $\mathfrak{g}$ a la *propriété* $(\mathbf{Q})$ *en l'élément* v' *de* $\mathfrak{g}^*$ si l'application coadjointe de $\mathfrak{g}^*$ dans $\mathrm{Lin}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ a la propriété $(\mathbf{R})$ en v'. L'algèbre $\mathfrak{g}$ a la propriété $(\mathbf{Q})$ en v' si et seulement si l'indice du stabilisateur $\mathfrak{g}(v')$ de v' est égal à l'indice de $\mathfrak{g}$. Le deuxième résultat principal dit qu'une algèbre de Lie réductive a la propriété $(\mathbf{Q})$ en tout point de $\mathfrak{g}^*$.

Texte reçu le 8 novembre 2001, révisé les 26 juillet 2002 et 30 janvier 2003, accepté le 30 juin 2003

JEAN-YVES CHARBONNEL, Université Paris 7 – CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu, Théorie des groupes, Case 7012, 2 Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05 (France)
E-mail : jyc@math.jussieu.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 14A10, 14L17, 22E20, 22E46.

Mots clefs. — Indice, algèbre de Lie, endomorphisme linéaire, codimension, variété algébrique.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2004/477/$ 5.00

Abstract (*Properties* (**Q**) *and* (**C**). *Commuting variety*). — Let X be a complex, smooth, irreducible algebraic variety, E and F be two finite dimensional complex vector spaces and μ be a morphism from X to the space $\mathrm{Lin}(E,F)$ of linear maps from E to F. For x in X, we denote by $E(x)$ and $x \cdot E$ the kernel and the image of $\mu(x)$, and by $\overline{\mu}_x$ the morphism from X to $\mathrm{Lin}(E(x), F/(x \cdot E))$ which associates to y the linear map $v \mapsto \mu(y)(v) + x \cdot E$. Let i_μ be the smallest dimension of $E(x)$. We say that μ has *property* (**R**) *at* x if $\mathrm{i}_{\overline{\mu}_x}$ is not greater than i_μ. Let F^* be the dual of F, $\mathrm{S}(F)$ be the symmetric algebra of F, $\mathcal{I}_\mu$ be the ideal of $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(F)$ generated by the functions $(x,v') \mapsto \langle v', \mu(x)(v)\rangle$ where v is in E and $\mathfrak{C}_\mu$ be the subvariety of zeros in $X \times F^*$ of $\mathcal{I}_\mu$, $\sqrt{\mathcal{I}_\mu}$ be the radical of $\mathcal{I}_\mu$, Σ be the support of $\sqrt{\mathcal{I}_\mu}/\mathcal{I}_\mu$ in $X \times F^*$ and S be the projection of Σ on X. The first main result says that under two technical conditions on μ, S is a closed subset of X whose codimension is at least equal to 2 if and only if the closure of the subset of points in X at which μ has not property (**R**), has codimension at least equal to 2.
Let $\mathfrak{g}$ be a Lie algebra. We say that $\mathfrak{g}$ has the *property* (**C**) *at the element* ξ *of* $\mathfrak{g}$ if the adjoint map from $\mathfrak{g}$ to the space of linear endomorphisms of $\mathfrak{g}$ has the property (**R**) at ξ and that $\mathfrak{g}$ has the *property* (**Q**) *at the element* v' *of* $\mathfrak{g}^*$ if the coadjoint map from $\mathfrak{g}^*$ to $\mathrm{Lin}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ has the property (**R**) at v'. The algebra $\mathfrak{g}$ has the property (**Q**) at v' if and only if the index of the stabilizer $\mathfrak{g}(v')$ of v' is equal to the index of $\mathfrak{g}$. The second main result says that any reductive Lie algebra has property (**Q**) at any point of $\mathfrak{g}^*$.

1. Introduction

Le corps de base est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On fixe une fois pour toutes une variété algébrique X, lisse et irréductible, E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et μ un morphisme de X dans l'espace $\mathrm{Lin}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F. Pour tout point x de X, on note respectivement $E(x)$ et $x \cdot E$ le noyau et l'image de $\mu(x)$. On utilise la topologie de Zariski sur les variétés algébriques considérées. On appelle *grand ouvert* de X un ouvert dont le complémentaire est de codimension supérieure à 2 dans X. Sauf mention contraire, on entend par point de X un point fermé. Conformément à l'usage, $\mathbb{C}[X]$ désigne l'anneau des fonctions régulières sur X, $\mathcal{O}_X$ désigne le faisceau structural de X et $\mathcal{O}_{X,x}$ désigne l'anneau local au point x de X.

Soient θ le morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules

$$\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} E \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} F, \quad \varphi \otimes v \longmapsto \big(x \mapsto \varphi(x)\mu(x)(v)\big)$$

et $\mathcal{M}_\mu$ le sous-$\mathcal{O}_X$-module des sections locales φ de $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} F$ qui satisfont la condition suivante : $x \cdot E$ contient $\varphi(x)$ pour tout x dans le domaine de définition de φ. Par définition, l'image de θ est un sous-$\mathcal{O}_X$-module de $\mathcal{M}_\mu$. On s'intéresse alors à la propriété (**P**) pour le morphisme μ : l'image de θ et le faisceau $\mathcal{M}_\mu$ ont même restriction à un grand ouvert de X. L'étude de la propriété (**P**) dégage la notion d'ouverts admissibles pour μ qui est donnée dans la définition 2.7. Le théorème 2.9 dit alors que μ a la propriété (**P**) si la réunion des ouverts admissibles pour μ est un grand ouvert de X. Considérant la dimension minimale i_μ des noyaux $E(x)$, on introduit dans la définition 3.1 la propriété (**R**) en un point x de X pour le morphisme μ. Le théorème 3.3 dit alors que sous deux conditions techniques sur le morphisme μ, la propriété (**P**) pour le morphisme μ est équivalente à la propriété (**R**) pour μ en tout point d'un grand ouvert de X. Soient F^* le dual de F et $\mathrm{S}(F)$ l'algèbre symétrique de F. On désigne par $\mathfrak{C}_\mu$ l'ensemble des points (x, v') de $X \times F^*$ tels que le noyau de v' contient $x \cdot E$, et par $\mathcal{I}_\mu$ l'idéal de $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(F)$ engendré par les fonctions $(x, v') \mapsto \langle v', \mu(x)(v)\rangle$ où v est dans V. Par définition, $\mathcal{I}_\mu$ est contenu dans l'idéal de définition de $\mathfrak{C}_\mu$ dans $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(F)$ et $\mathfrak{C}_\mu$ est la variété des zéros de $\mathcal{I}_\mu$ dans $X \times F^*$. La question de savoir si l'idéal $\mathcal{I}_\mu$ est un idéal radiciel est bien naturelle ; le théorème 4.1 donne une réponse partielle. Désignant par $\sqrt{\mathcal{I}_\mu}$ le radical de $\mathcal{I}_\mu$, le théorème 4.1 dit que sous les conditions techniques du théorème 3.3, les faisceaux $\mathcal{I}_\mu$ et $\sqrt{\mathcal{I}_\mu}$ sur X ont même restriction à un grand ouvert de X si et seulement si μ a la propriété (**R**) en tout point d'un grand ouvert de X.

On applique enfin ces résultats dans le cas particulier où X est la variété sous-jacente à une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ ou à son dual $\mathfrak{g}^*$. Dans le cas où X est égal à $\mathfrak{g}$, on note μ le morphisme qui à x associe l'endomorphisme $\operatorname{ad} x$ de $\mathfrak{g}$ et dans le cas où X est égal à $\mathfrak{g}^*$, on note ν l'application qui à l'élément x de $\mathfrak{g}^*$ associe l'application linéaire $v \mapsto v \cdot x$ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}^*$ où $v \cdot x$ désigne l'action coadjointe de v sur x. La propriété (**R**) pour μ est appelée propriété (**C**) pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et la propriété (**R**) pour ν est appelée propriété (**Q**) pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. La variété $\mathfrak{C}_\mu$ est la variété $\mathfrak{C}_\mathfrak{g}$ des éléments (ξ, v') de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ où ξ appartient au stabilisateur de v' dans $\mathfrak{g}$ et la variété $\mathfrak{C}_\nu$ est isomorphe à la variété $\mathfrak{C}_\mathfrak{g}$. On désigne par $I_\mathfrak{g}$ l'espace des sections globales de $\mathcal{I}_\mu$. On a alors le théorème :

THÉORÈME. — *Soit Σ le support dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ du $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(\mathfrak{g})$-module $\sqrt{I_\mathfrak{g}}/I_\mathfrak{g}$.*

(i) *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ a la propriété* (**C**) *en tout point d'un grand ouvert de $\mathfrak{g}$ si et seulement si la projection de Σ sur $\mathfrak{g}$ est une sous-variété fermée de codimension supérieure à* 2 *de $\mathfrak{g}$.*

(ii) *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ a la propriété* (**Q**) *en tout point d'un grand ouvert de $\mathfrak{g}^*$ si et seulement si la projection de Σ sur $\mathfrak{g}^*$ est une sous-variété fermée de codimension supérieure à* 2 *de $\mathfrak{g}^*$.*

Par définition, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite quadratique lorsque ses modules adjoint et coadjoint sont isomorphes. Les propriétés (**C**) et (**Q**) pour une algèbre de Lie quadratique sont donc équivalentes. En outre, dans le cas où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie quadratique, la variété $\mathfrak{C}_\mathfrak{g}$ s'identifie à la variété des éléments (ξ, η) de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ qui commutent entre eux. Pour $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie quelconque, on appelera variété commutante de $\mathfrak{g}$ la variété $\mathfrak{C}_\mathfrak{g}$ ci-dessus. En général, l'idéal $I_\mathfrak{g}$ n'est pas radiciel et la variété $\mathfrak{C}_\mathfrak{g}$ n'est pas irréductible. R.W. Richardson a montré dans [4] que $\mathfrak{C}_\mathfrak{g}$ est une variété irréductible dans le cas où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réductive. On rappelle que l'indice de $\mathfrak{g}$ est la dimension minimale des stabilisateurs dans $\mathfrak{g}$ des éléments de $\mathfrak{g}^*$. Dire que $\mathfrak{g}$ a la propriété (**Q**) en v' revient à dire que l'indice de $\mathfrak{g}(v')$ est égal à l'indice de $\mathfrak{g}$. En général, une algèbre de Lie complexe n'a pas la propriété (**Q**). L'indice d'une algèbre de Lie réductive est égal à son rang. On montre alors le théorème :

THÉORÈME. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive complexe. Alors l'indice du centralisateur de tout élément de $\mathfrak{g}$ est égal au rang de $\mathfrak{g}$.*

Ce résultat avait été conjecturé par A.G. Elashvili. Cette question a été étudiée par D.I. Panyushev dans [3] où il y donne des résultats partiels. En outre, P. Tauvel a montré dans [7] que pour $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie réductive, le centralisateur d'un élément de $\mathfrak{g}$ est commutatif si et seulement si cet élément est régulier. La propriété (**Q**) pour $\mathfrak{g}$ redonne ce résultat car l'indice d'une algèbre commutative est égal à sa dimension. Le point clé de la démonstration de ce théorème est le résultat de J. Dixmier sur les champs de vecteurs adjoints d'une algèbre de Lie réductive [2]. Le cas des algèbres de Lie est la motivation principale de ce mémoire dont la suite se divise en quatre sections :

2) la propriété (**P**),
3) les propriétés (**P**) et (**R**),
4) application de la propriété (**R**),
5) application aux algèbres de Lie.

Je remercie vivement N. Ressayre pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour ses nombreuses suggestions. Je lui dois en particulier la présentation et les formulations des définitions des propriétés (**P**) et (**R**) et du théorème 2.9.

2. La propriété (P)

Soit μ une application régulière de X dans l'espace $\mathrm{Lin}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F.

DÉFINITION 2.1. — On appelle *indice* de μ et on note i_μ la plus petite des dimensions des noyaux des applications linéaires $\mu(x)$ où x est dans X. On désigne par X_{r} l'ensemble des points x de X pour lesquels i_μ est la dimension du noyau de $\mu(x)$.

D'après un lemme d'algèbre linéaire :

Soit L_r l'ensemble des applications linéaires de rang r de E dans F. Alors L_r est une partie localement fermée de $\mathrm{Lin}(E,F)$ *et son adhérence est la réunion des L_s où s est inférieur à r. En outre, l'application $u \mapsto \mathrm{Ker}\, u$ est une application régulière de L_r dans la grassmannienne* $\mathrm{Gr}_{\dim E - r}(E)$ *et l'application qui à u associe l'image de u est une application régulière de L_r dans* $\mathrm{Gr}_r(F)$*,* L'ensemble X_{r} est ouvert dans X, l'application $x \mapsto E(x)$ de X_{r} dans $\mathrm{Gr}_{\mathrm{i}_\mu}(E)$ est régulière et l'application $x \mapsto x\cdot E$ de X_{r} dans $\mathrm{Gr}_{\dim E-\mathrm{i}_\mu}(F)$ est régulière. Puisque X est une variété lisse, l'application régulière $x \mapsto E(x)$ de X_{r} dans $\mathrm{Gr}_{\mathrm{i}_\mu}(E)$ se prolonge à un grand ouvert de X d'après [5, ch. VI, th. 1]. On note X_* la réunion des ouverts de X auxquels l'application $x \mapsto E(x)$ de X_{r} dans $\mathrm{Gr}_{\mathrm{i}_\mu}(E)$ a un prolongement régulier. En particulier, X_* est un grand ouvert de X qui contient X_{r} et il existe une application régulière α_μ de X_* dans $\mathrm{Gr}_{\mathrm{i}_\mu}(E)$ pour laquelle $\alpha_\mu(x)$ est égal à $E(x)$ pour tout x dans X_{r}.

DÉFINITION 2.2. — Soit θ le morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules :

$$\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} E \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} F, \quad \varphi\otimes v \longmapsto \big(x \mapsto \varphi(x)\mu(x)(v)\big),$$

où φ est une section locale de $\mathcal{O}_X$ et où v est dans E. Soit $\mathcal{M}_\mu$ le sous-$\mathcal{O}_X$-module de $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} F$ défini par la condition suivante : pour tout ouvert V de X, φ est section de $\mathcal{M}_\mu$ au-dessus de V si et seulement si $x\cdot E$ contient $\varphi(x)$ pour tout x dans V. On dira que μ a la propriété (**P**) si $\mathcal{M}_\mu$ et l'image de θ ont même restriction à X_*.

Dans la suite de cette section, on suppose X égal à X_*.

2.1. Il est clair que $\mathcal{M}_\mu$ contient l'image de θ et on montre facilement que $\mathcal{M}_\mu$ et l'image de θ ont même restriction à X_{r}.

LEMME 2.3. — (i) *La réunion de X_{r} et des ouverts de X qui satisfont les conditions suivantes*

1) *Y est un ouvert affine de X tel que $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$ est un diviseur premier de Y dont l'idéal de définition dans $\mathbb{C}[Y]$ est engendré par un élément q,*
2) *il existe un sous-espace $\mathfrak{m}$ de E qui est un supplémentaire de $\alpha_\mu(x)$ dans E pour tout x dans Y,*
3) *la dimension de $E(x)$ est constante sur $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$,*

est un grand ouvert de X.

(ii) *Si $\mathcal{M}_\mu$ et l'image de θ ont même restriction à un grand ouvert de X, alors μ a la propriété* (**P**).

Démonstration. — (i) On note S la réunion du lieu singulier de $X\backslash X_{\mathrm{r}}$ et des composantes irréductibles de $X\backslash X_{\mathrm{r}}$ de codimension supérieure à 2 dans X. Alors $X\backslash S$ est un grand ouvert de X et l'intersection de $X\backslash X_{\mathrm{r}}$ avec $X\backslash S$ est une hypersurface lisse ; or X est lisse ; donc $X\backslash S$ est recouvert par des ouverts qui satisfont la condition 1). Soient $T_1,\dots,T_\ell$ les composantes irréductibles de l'intersection de $X\backslash X_{\mathrm{r}}$ et de $X\backslash S$. Pour $i = 1,\dots,\ell$, on désigne par T_i' l'ensemble des points x de T_i pour lesquels $E(x)$ est de dimension minimale. Alors $T_i\backslash T_i'$ est fermé dans $X\backslash S$ et de codimension supérieure à 2 ; donc le complémentaire dans $X\backslash S$ de la réunion des ensembles $T_1\backslash T_1',\dots,T_\ell\backslash T_\ell'$ est un grand ouvert de X. En outre, il est réunion d'ouverts affines qui satisfont les conditions 1) et 3). L'assertion résulte alors de ce que tout ouvert de X est réunion d'ouverts affines qui satisfont la condition 2).

(ii) On suppose que $\mathcal{M}_\mu$ et l'image de θ ont même restriction à un grand ouvert de X. Soit Y un ouvert affine de X qui satisfait la condition 2). On note Y_{r} l'intersection de Y et de X_{r}. Soit φ une section de $\mathcal{M}_\mu$ au-dessus de Y. Alors il existe une application régulière ψ et une seule de Y_{r} dans $\mathfrak{m}$ qui satisfait l'égalité $\varphi(x) = \mu(x)(\psi(x))$ pour tout x dans Y_{r}. Vu l'arbitraire de Y et de φ, il s'agit de montrer que ψ a un prolongement régulier à Y. Par hypothèse, pour tout ouvert affine Y_1 d'un grand ouvert Y' de Y, il existe une application régulière ψ_1 de Y_1 dans E qui satisfait l'égalité $\varphi(x) = \mu(x)(\psi_1(x))$ pour tout x dans Y_1. Puisque $\alpha_\mu(x)$ est un supplémentaire de $\mathfrak{m}$ dans E pour tout x dans Y_1, il existe une unique application régulière ψ'_1 de Y_1 de $\mathfrak{m}$ qui satisfait les deux relations

$$\psi'_1(x) \in \mathfrak{m} \quad \text{et} \quad \psi_1(x) - \psi'_1(x) \in \alpha_\mu(x),$$

pour tout x dans Y_1. Pour tout x dans l'intersection de Y_1 et de Y_{r}, $\varphi(x)$ est égal à $\mu(x)(\psi'_1(x))$ car $\alpha_\mu(x)$ est égal à $E(x)$; par continuité, $\varphi(x)$ est donc égal à $\mu(x)(\psi'_1(x))$ pour tout x dans Y_1 car Y_1 est irréductible. Il résulte alors de l'unicité de ψ, que ψ_1 est un prolongement régulier à Y_1 de la restriction de ψ à l'intersection de Y_{r} et de Y_1. Par suite, ψ a un prolongement régulier à Y'. La variété Y est normale car elle est lisse ; donc ψ a un prolongement régulier à Y car Y' est un grand ouvert de Y. □

Il résulte du lemme que μ a la propriété (**P**) si et seulement si la restriction de μ à tout ouvert de X qui satisfait les conditions 1), 2), 3) a la propriété (**P**).

2.2. Soit Y un ouvert de X qui satisfait les conditions 1), 2), 3) du lemme 2.3. On note s l'entier $\dim E(x) - \mathrm{i}_\mu$ où x est dans $Y \backslash X_{\mathrm{r}}$.

Définition 2.4. — On dira que Y est un *ouvert adéquat* pour μ s'il existe des applications régulières $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ de Y dans E et des applications régulières $\nu_1, \ldots, \nu_s$ de Y dans F qui satisfont les conditions :

1) pour tout x dans Y et pour $i = m - s + 1, \ldots, m$, $\mu(x)(\varepsilon_i(x))$ est égal à $q(x)\nu_{i+s-m}(x)$,
2) pour tout x dans Y, les éléments $\mu(x)(\varepsilon_1(x)), \ldots, \mu(x)(\varepsilon_{m-s}(x))$, $\nu_1(x), \ldots, \nu_s(x)$ sont linéairement indépendants,
3) pour tout x dans Y, les éléments $\mu(x)(\varepsilon_1(x)), \ldots, \mu(x)(\varepsilon_m(x))$ engendrent le sous-espace $x \cdot E$ de F.

Lemme 2.5. — (i) *L'ouvert Y est adéquat si et seulement s'il existe des applications régulières $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ de Y dans E et des applications régulières $\nu_1, \ldots, \nu_s$ de Y dans F qui satisfont les conditions* 1), 2), 3) *de la définition* 2.4 *et la condition suivante : pour tout x dans Y, $\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_m(x)$ est une base de $\mathfrak{m}$.*

(ii) *L'ouvert Y contient un ouvert qui rencontre $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$ et qui est adéquat si et seulement si pour toute base $e_1,\dots,e_m$ de $\mathfrak{m}$, l'application rationnelle de Y dans $\wedge^m(F)$*

$$x \longmapsto q(x)^{-s}\mu(x)(e_1)\wedge\cdots\wedge\mu(x)(e_m),$$

est une application régulière qui n'est pas identiquement nulle sur $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$.

Démonstration. — (i) Il s'agit de montrer que la condition est nécessaire. On suppose Y adéquat pour μ. Alors il existe des applications régulières $\eta_1,\dots,\eta_m$ de Y dans E et des applications régulières $\nu_1,\dots,\nu_s$ de Y dans F qui satisfont les conditions 1), 2), 3) de la définition 2.4. Pour $i=1,\dots,m$ et pour x dans Y, on désigne par $\varepsilon_i(x)$ la projection de $\eta_i(x)$ sur $\mathfrak{m}$ parallèlement à $\alpha_\mu(x)$. Puisque η_i est une application régulière, l'application ε_i ainsi définie est régulière. Pour tout x dans Y, $\mu(x)(\varepsilon_i(x))$ est égal à $\mu(x)(\eta_i(x))$; donc les applications $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m$ et les applications $\nu_1,\dots,\nu_s$ satisfont les conditions 1), 2), 3) de la définition 2.4. En particulier, pour tout x dans l'intersection de Y et de X_{r}, la dimension de $x\cdot E$ est égale à m ; or $\mathfrak{m}$ et $x\cdot E$ ont même dimension car $\mathfrak{m}$ est un supplémentaire de $E(x)$ dans E pour tout x dans l'intersection de Y et de X_{r} ; donc m est la dimension de $\mathfrak{m}$ et la famille $\varepsilon_1(x),\dots,\varepsilon_m(x)$ est une base de $\mathfrak{m}$ pour tout x dans l'intersection de Y et de X_{r}.

On suppose qu'il existe un point x de $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$ pour lequel $\varepsilon_1(x),\dots,\varepsilon_m(x)$ n'est pas une famille libre. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. Puisque m est la dimension de $\mathfrak{m}$, l'ensemble des points x de Y qui satisfont l'égalité

$$\varepsilon_1(x)\wedge\cdots\wedge\varepsilon_m(x)=0$$

est une hypersurface de Y ; or d'après ce qui précède, cette hypersurface est contenue dans $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$; donc elle est égale à $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$ car $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$ est irréductible. Soit x un point de $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$ pour lequel la famille $\varepsilon_1(x),\dots,\varepsilon_m(x)$ est de rang maximum. Soit m' ce rang. Par hypothèse, m' est strictement inférieur à m. D'après les conditions 1) et 2) de la définition 2.4, $\varepsilon_1(x),\dots,\varepsilon_{m-s}(x)$ sont linéairement indépendants ; donc m' est supérieur à $m-s$. Quitte à réordonner les applications $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m$, on peut supposer que la famille $\varepsilon_1(x),\dots,\varepsilon_{m'}(x)$ est libre. On peut alors trouver un ouvert affine Y' de Y, contenant x, et des fonctions régulières $a_1,\dots,a_{m'}$ sur Y' pour lesquelles l'application

$$y\longmapsto \varepsilon_{m'+1}(y)-a_1(y)\varepsilon_1(y)-\cdots-a_{m'}(y)\varepsilon_{m'}(y),$$

est nulle sur $Y'\backslash X_{\mathrm{r}}$. Puisque la restriction de q à Y' engendre l'idéal de définition de $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$ dans $\mathbb{C}[Y']$, il existe une application régulière ρ de Y' dans $\mathfrak{m}$ qui n'est pas identiquement nulle sur $Y'\backslash X_{\mathrm{r}}$ et un entier strictement positif ℓ qui satisfont l'égalité

$$\varepsilon_{m'+1}=q^\ell\rho+\sum_{j=1}^{m'}a_j\varepsilon_j.$$

Par suite, il vient

$$\mu(y)\big(\varepsilon_{m'+1}(y)\big) = q(y)^{\ell}\mu(y)\big(\rho(y)\big) + \sum_{j=1}^{m'} a_j(y)\mu(y)\big(\varepsilon_j(y)\big),$$

pour tout y dans Y'. D'après la condition 1) de la définition 2.4, on a

$$\begin{aligned} q(y)\nu_{m'-m+s+1}(y) = q(y)^{\ell}\mu(y)\big(\rho(y)\big) + \sum_{j=1}^{m-s} a_j(y)\mu(y)\big(\varepsilon_j(y)\big) \\ + q(y) \sum_{j=m-s+1}^{m'} a_j(y)\nu_{j-m+s}(y), \end{aligned}$$

pour tout y dans Y' ; or d'après la condition 2) de la définition 2.4, pour tout y dans $Y'\backslash X_{\mathrm{r}}$, $\mu(y)(\varepsilon_1(y)), \ldots, \mu(y)(\varepsilon_{m-s}(y))$ sont linéairement indépendants ; donc q divise $a_1, \ldots, a_{m-s}$ dans $\mathbb{C}[Y']$. En désignant par $b_1, \ldots, b_{m-s}$ les quotients respectifs de $a_1, \ldots, a_{m-s}$ par q, il vient

$$\begin{aligned} \nu_{m'-m+s+1}(y) - \sum_{j=m-s+1}^{m'} a_j(y)\nu_{j-m+s}(y) \\ = q(y)^{\ell-1}\mu(y)\big(\rho(y)\big) \sum_{j=1}^{m-s} b_j(y)\mu(y)\big(\varepsilon_j(y)\big), \end{aligned}$$

pour tout y dans Y'. Ceci est absurde car d'après les conditions 1), 2), 3) de la définition 2.4, $\nu_1(y), \ldots, \nu_{m'-m+s+1}(y)$ est une famille libre d'un supplémentaire de $\mu(y)(\mathfrak{m})$ pour tout y dans $Y'\backslash X_{\mathrm{r}}$.

(ii) Soient $e_1, \ldots, e_m$ une base de $\mathfrak{m}$ et l'application rationnelle

$$\varepsilon : Y \longrightarrow \wedge^m(F), \quad x \longmapsto q(x)^{-s}\mu(x)(e_1)\wedge\cdots\wedge\mu(x)(e_m).$$

On suppose que ε est une application régulière de Y dans $\wedge^m(F)$ qui ne s'annule pas sur Y. Puisque $E(x)$ contient $\alpha_\mu(x)$ pour tout x dans Y, s est la dimension de l'intersection $\mathfrak{m}(x)$ de $E(x)$ et de $\mathfrak{m}$ pour tout x dans $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$. En diminuant Y au besoin et en réordonnant la famille $e_1, \ldots, e_m$, on peut supposer qu'il existe des applications régulières $\varepsilon_{m-s+1}, \ldots, \varepsilon_m$ de Y dans $\mathfrak{m}$ qui satisfont la condition suivante : pour tout x dans Y, la famille $e_1, \ldots, e_{m-s}, \varepsilon_{m-s+1}(x), \ldots, \varepsilon_m(x)$ est une base de $\mathfrak{m}$ et pour tout x dans $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$, la famille $\varepsilon_{m-s+1}(x), \ldots, \varepsilon_m(x)$ est une base de $\mathfrak{m}(x)$. Puisque q engendre l'idéal de définition de $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$ dans $\mathbb{C}[Y]$, pour $i = 1, \ldots, s$, il existe un entier strictement positif ℓ_i et une application régulière ν_i de Y dans F, non identiquement nulle sur $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$, qui satisfont l'égalité

$$\mu(x)(\varepsilon_{m-s+i}(x)) = q(x)^{\ell_i}\nu_i(x),$$

pour tout x dans Y. Puisque $e_1, \ldots, e_{m-s}, \varepsilon_{m-s+1}(x), \ldots, \varepsilon_m(x)$ est une base de $\mathfrak{m}$ pour tout x dans Y, il existe une fonction régulière inversible a sur Y qui satisfait l'égalité

$$e_1\wedge\cdots\wedge e_{m-s}\wedge\varepsilon_{m-s+1}(x)\wedge\cdots\wedge\varepsilon_m(x)=a(x)e_1\wedge\cdots\wedge e_m,$$

pour tout x dans Y. Par suite, il vient

$$\mu(x)(e_1)\wedge\cdots\wedge\mu(x)(e_{m-s})\wedge\mu(x)(\varepsilon_{m-s+1}(x))\wedge\cdots\wedge\mu(x)\big(\varepsilon_m(x)\big)\\ =q(x)^s a(x)\varepsilon(x),$$

pour tout x dans Y ; donc d'après la régularité de l'application ε les entiers $\ell_1,\dots,\ell_s$ sont égaux à 1 car ils sont tous strictement positifs et pour tout x dans Y, $\mu(x)(e_1),\dots,\mu(x)(e_{m-s}),\nu_1(x),\dots,\nu_s(x)$ sont linéairement indépendants. Par suite, les applications $e_1,\dots,e_{m-s}$, $\varepsilon_{m-s+1},\dots,\varepsilon_m$ de Y dans E et les applications $\nu_1,\dots,\nu_s$ de Y dans F satisfont les conditions 1), 2), 3) de la définition 2.4 car $\mu(x)(\mathfrak{m})$ est égal à $x\cdot E$ pour tout x dans Y. Cela revient à dire que Y est adéquat.

Réciproquement, on suppose que Y contient un ouvert Y' qui rencontre $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$ et qui est adéquat. Soient $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m$ des applications régulières de Y' dans E et $\nu_1,\dots,\nu_s$ des applications régulières de Y' dans F qui satisfont les conditions 1), 2), 3) de la définition 2.4 et la condition de l'assertion (i). Alors il existe une fonction régulière inversible a sur Y' qui satisfait l'égalité

$$e_1\wedge\cdots\wedge e_m=a(x)\varepsilon_1(x)\wedge\cdots\wedge\varepsilon_m(x),$$

pour tout x dans Y'. Par suite, il vient

$$\mu(x)(e_1)\wedge\cdots\wedge\mu(x)(e_m)=a(x)\mu(x)\big(\varepsilon_1(x)\big)\wedge\cdots\wedge\mu(x)\big(\varepsilon_m(x)\big)\\ =a(x)q(x)^s\mu(x)\big(\varepsilon_1(x)\big)\wedge\cdots\wedge\mu(x)\big(\varepsilon_{m-s}(x)\big)\wedge\nu_1(x)\wedge\cdots\wedge\nu_s(x),$$

pour tout x dans Y'. Il en résulte que l'application rationnelle ε de Y dans $\wedge^m(F)$

$$x\longmapsto q(x)^{-s}\mu(x)(e_1)\wedge\cdots\wedge\mu(x)(e_m),$$

a un prolongement régulier à Y' qui ne s'annule pas sur Y' ; or la restriction de ε à l'intersection de Y' et de X_{r} est une application régulière ; donc l'application ε est régulière sur un grand ouvert de Y. La variété Y est normale car elle est lisse ; donc ε est une application régulière. □

PROPOSITION 2.6. — *La restriction de μ à Y a la propriété* (**P**) *si et seulement si pour toute base $e_1,\dots,e_m$ de $\mathfrak{m}$, l'application rationnelle de Y dans $\wedge^m(F)$*

$$x\longmapsto q(x)^{-s}\mu(x)(e_1)\wedge\cdots\wedge\mu(x)(e_m),$$

est une application régulière qui n'est pas identiquement nulle sur $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$.

Démonstration. — On suppose que la restriction de μ à Y a la propriété (**P**). D'après le lemme 2.5, il s'agit de montrer que Y contient un ouvert adéquat qui rencontre $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$. On utilise les notations de la démonstration du lemme 2.5. On peut alors supposer qu'il existe des applications régulières $\varepsilon_{m-s+1},\dots,\varepsilon_m$ de Y dans $\mathfrak{m}$ qui satisfont la condition suivante : pour tout x dans Y, $e_1,\dots,e_{m-s}$,

$\varepsilon_{m-s+1}(x),\dots,\varepsilon_m(x)$ est une base de $\mathfrak{m}$ et pour tout x dans $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$, la famille $\varepsilon_{m-s+1}(x),\dots,\varepsilon_m(x)$ est une base de $\mathfrak{m}(x)$. En outre, pour $i=1,\dots,s$, il existe un entier strictement positif ℓ_i et une application régulière ν_i de Y dans F, non identiquement nulle sur $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$, qui satisfont l'égalité

$$\mu(x)(\varepsilon_{m-s+i}(x)) = q(x)^{\ell_i}\nu_i(x),$$

pour tout x dans Y. Soit $i=1,\dots,s$. Puisque q est nul sur $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$, $q\nu_i$ est section de $\mathcal{M}_\mu$ au-dessus de Y ; donc $q\nu_i$ est l'image par θ d'une application régulière ψ_i de Y dans $\mathfrak{m}$ car $\mathfrak{m}$ est un supplémentaire dans E du sous-espace $\alpha_\mu(x)$ de $E(x)$ pour tout x dans Y. Par suite, ε_{m-s+i} est égal à $q^{\ell_i-1}\psi_i$. L'application ε_{m-s+i} ne s'annulant pas sur Y, ℓ_i est égal à 1. On conclut alors comme dans la démonstration de l'assertion (ii) du lemme 2.5.

Réciproquement, on suppose que ε a un prolongement régulier à Y qui n'est pas identiquement nul sur $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$. Alors Y contient un ouvert qui rencontre $X\backslash X_{\mathrm{r}}$ et qui est adéquat d'après l'assertion (ii) du lemme 2.5 ; or d'après le lemme 2.3, la restriction de μ à Y a la propriété (**P**) si $\mathcal{M}_\mu$ et l'image de θ ont même restriction à un grand ouvert de Y ; donc on peut supposer que Y est un ouvert adéquat. On note Y_{r} l'intersection de Y et de X_{r}, $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m$ des applications régulières de Y dans E et $\nu_1,\dots,\nu_s$ des applications régulières de Y dans F qui satisfont les conditions 1), 2), 3) de la défintion 2.4 et la condition de l'assertion (i) du lemme 2.5. Soit φ une section de $\mathcal{M}_\mu$ au-dessus de Y. Puisque $\mathfrak{m}$ est un supplémentaire de $E(x)$ dans E pour tout x dans Y_{r}, il existe une application régulière ψ et une seule de Y_{r} dans $\mathfrak{m}$ qui satisfait l'égalité

$$\varphi(x) = \mu(x)\big(\psi(x)\big),$$

pour tout x dans Y_{r}. Il s'agit de montrer que ψ a un prolongement régulier à Y. Pour tout x dans Y, on note $\beta(x)$ le sous-espace de F engendré par les éléments

$$\mu(x)\big(\varepsilon_1(x)\big),\dots,\mu(x)\big(\varepsilon_{m-s}(x)\big),\nu_1(x),\dots,\nu_s(x).$$

L'application β ainsi définie est une application régulière de Y dans $\mathrm{Gr}_m(F)$. En outre, pour tout x dans Y_{r}, $\beta(x)$ est égal à $x\cdot E$. Par continuité, $\beta(x)$ contient donc $\varphi(x)$ pour tout x dans Y. Par suite, il existe des fonctions régulières $a_1,\dots,a_m$ sur Y qui satisfont l'égalité

$$\begin{aligned}\varphi(x) = a_1(x)\mu(x)\big(\varepsilon_1(x)\big) + \cdots + a_{m-s}(x)\mu(x)\big(\varepsilon_{m-s}(x)\big)\\ +a_{m-s+1}(x)\nu_1(x) + \cdots + a_m(x)\nu_s(x),\end{aligned}$$

pour tout x dans Y. Pour tout x dans $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$, $\mu(x)(\varepsilon_1(x)),\dots,\mu(x)(\varepsilon_{m-s}(x))$ est une base de $x\cdot E$; donc les fonctions $a_{m-s+1},\dots,a_m$ sont nulles sur $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$. Par suite, il existe des fonctions régulières $b_1,\dots,b_s$ sur Y qui satisfont les égalités

$$a_{m-s+1} = qb_1,\dots,a_m = qb_s.$$

On rappelle que q est un générateur de l'idéal de définition de $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$ dans $\mathbb{C}[Y]$. Alors d'après la condition 1) de la défintion 2.4, l'application régulière ψ' de Y dans $\mathfrak{m}$

$$\begin{aligned} x \longmapsto a_1(x)\varepsilon_1(x) + \cdots + a_{m-s}(x)\varepsilon_{m-s}(x) \\ +b_1(x)\varepsilon_{m-s+1}(x) + \cdots + b_s(x)\varepsilon_m(x), \end{aligned}$$

satisfait l'égalité $\varphi(x) = \mu(x)(\psi'(x)$, pour tout x dans Y. D'après l'unicité de ψ, l'application ψ' est un prolongement de ψ à Y. □

Définition 2.7. — Un ouvert affine de X est dit *admissible* pour μ s'il est contenu dans X_{r} ou s'il satisfait les conditions 1), 2), 3) du lemme 2.3 et les conditions de la proposition 2.6.

Un ouvert affine Z de X est dit *adéquat* pour μ s'il est contenu dans X_{r} ou s'il satisfait les conditions 1), 2), 3) du lemme 2.3 et est adéquat pour μ au sens de la définition 2.4.

Corollaire 2.8. — *La réunion des ouverts admissibles pour μ est un grand ouvert de X si et seulement si la réunion des ouverts adéquats pour μ est un grand ouvert de X.*

Démonstration. — Le corollaire résulte de l'assertion (i) du lemme 2.3 et de l'assertion (ii) du lemme 2.5. □

Théorème 2.9. — *L'application μ a la propriété* (**P**) *si et seulement si la réunion des ouverts admissibles de X est un grand ouvert de X.*

Démonstration. — Le théorème résulte de la proposition 2.6 et de l'assertion (ii) du lemme 2.3. □

2.3. Pour tout entier strictement positif r, $\mathrm{S}^r(F)$ désigne l'espace des éléments homogènes de degré r de $\mathrm{S}(F)$ pour la structure homogène usuelle. On note μ_r l'application régulière

$$X \longrightarrow \mathrm{Lin}\big(E \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}^{r-1}(F), \mathrm{S}^r(F)\big), \quad x \longmapsto \big(v{\otimes}w \mapsto \mu(x)(v)w\big).$$

Lemme 2.10. — *On suppose que μ a la propriété* (**P**). *Alors pour tout entier strictement positif r, μ_r a la propriété* (**P**).

Démonstration. — D'après le théorème 2.9, le corollaire 2.8 et le lemme 2.3, il suffit de montrer que X est adéquat pour μ_r dans le cas où X est affine, égal à l'ouvert X_* et adéquat pour μ. On suppose que X satisfait ces trois conditions. Il existe alors des applications régulières $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ de X dans E et des applications régulières $\nu_1, \ldots, \nu_s$ de X dans F qui satisfont les conditions 1), 2), 3) de la définition 2.4 et la condition de l'assertion (i) du lemme 2.5. Pour tout x dans X, on note $\beta(x)$ le sous-espace de F engendré par les éléments

$$\mu(x)\big(\varepsilon_1(x)\big), \ldots, \mu(x)\big(\varepsilon_{m-s}(x)\big), \quad \nu_1(x), \ldots, \nu_s(x).$$

Alors β ainsi défini est une application régulière de X dans $\mathrm{Gr}_m(F)$. Si x est dans X et si $v_1,\dots,v_d$ est une base d'un supplémentaire de $\beta(x)$ dans F, pour tout y dans un ouvert de X, contenant x, $v_1,\dots,v_d$ est une base d'un supplémentaire de $\beta(y)$ dans F ; donc on peut supposer qu'il en est ainsi pour tout x dans X.

Pour $j=0,\dots,r-1$, on désigne par $F_{j,r}$ le sous-espace des éléments de $\mathrm{S}^r(F)$ qui sont homogènes de degré j en $v_1,\dots,v_d$. Alors la somme des sous-espaces $F_{0,r},\dots,F_{r-1,r}$ est directe et contient $\mu_r(x)(E\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}^{r-1}(F))$ pour tout x dans X. Soit $\mathfrak{I}_j$ l'ensemble des suites croissantes ι d'entiers $i_1,\dots,i_f$ de $\{1,\dots,d\}$ de somme j. Pour $j=0$, $\mathfrak{I}_j$ est vide et le produit $v_{i_1}\cdots v_{i_f}$ est égal à 1. Soient

- $\mathfrak{K}'_j$ l'ensemble des familles $k_1,\dots,k_e,\ell_1,\dots,\ell_{e'}$ d'entiers naturels qui satisfont les relations

$$1\le k_1\le\cdots\le k_e\le m-s,\quad 1\le \ell_1\le\cdots\le\ell_{e'}\le s,$$
$$k_1+\cdots+k_e+\ell_1+\cdots+\ell_{e'}=r-j,$$

- $\mathfrak{K}''_j$ l'ensemble des familles $k_1,\dots,k_e$ d'entiers naturels qui satisfont les relations

$$1\le k_1\le\cdots\le k_e\le m-s,\quad k_1+\cdots+k_e=r-j,$$

- $\mathfrak{K}'''_j$ l'ensemble des familles $\ell_1,\dots,\ell_{e'}$ d'entiers naturels qui satisfont les relations

$$1\le \ell_1\le\cdots\le\ell_{e'}\le s,\quad \ell_1+\cdots+\ell_{e'}=r-j.$$

On désigne par $\mathfrak{K}_j$ la réunion des ensembles $\mathfrak{K}'_j,\mathfrak{K}''_j,\mathfrak{K}'''_j$ et par $\tilde{\mathfrak{K}}_j$ la réunion des ensembles $\mathfrak{K}'_j,\mathfrak{K}''_j$. Pour tout κ dans $\mathfrak{K}'_j$ et pour tout ι dans $\mathfrak{I}_j$, on note $\varepsilon_{\kappa,\iota}$ l'application de X dans $E\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}^{r-1}(F)$,

$$x\longmapsto \varepsilon_{k_e}(x)\otimes\mu(x)\big(\varepsilon_{k_1}(x)\big)\cdots\mu(x)\big(\varepsilon_{k_{e-1}}(x)\big)\nu_{\ell_1}(x)\cdots\nu_{\ell_{e'}}(x)v_{i_1}\cdots v_{i_f}.$$

Pour tout κ dans $\mathfrak{K}''_j$ et pour tout ι dans $\mathfrak{I}_j$, on note $\varepsilon_{\kappa,\iota}$ l'application de X dans $E\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}^{r-1}(F)$,

$$x\longmapsto \varepsilon_{k_e}(x)\otimes\mu(x)\big(\varepsilon_{k_1}(x)\big)\cdots\mu(x)\big(\varepsilon_{k_{e-1}}(x)\big)v_{i_1}\cdots v_{i_f}.$$

Pour tout κ dans $\mathfrak{K}'''_j$ et pour tout ι dans $\mathfrak{I}_j$, on note $\nu_{\kappa,\iota}$ l'application de X dans $\mathrm{S}^r(F)$,

$$x\longmapsto \nu_{\ell_1}(x)\cdots\nu_{\ell_{e'}}(x)v_{i_1}\cdots v_{i_f}$$

et $\varepsilon_{\kappa,\iota}$ l'application de X dans $E\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}^{r-1}(F)$

$$x\longmapsto \varepsilon_{\ell_{e'}}(x)\otimes\nu_{\ell_1}(x)\cdots\nu_{\ell_{e'-1}}(x)v_{i_1}\cdots v_{i_f}.$$

Pour tout (κ,ι) dans $\mathfrak{K}_j\times\mathfrak{I}_j$, les applications $\varepsilon_{\kappa,\iota}$ sont régulières et pour tout (κ,ι) dans $\mathfrak{K}'''_j\times\mathfrak{I}_j$, les applications $\nu_{\kappa,\iota}$ sont régulières. En outre, ces applications satisfont les conditions suivantes pour $j=0,\dots,r-1$:

A) pour tout x dans X, pour tout κ dans $\mathfrak{K}'''_j$ et pour tout ι dans $\mathfrak{I}_j$, on a

$$\mu_r(x)(\varepsilon_{\kappa,\iota}(x))=q(x)\nu_{\kappa,\iota}(x),$$

B) pour tout x dans X, la famille suivante est une base de $F_{j,r}$:

$$\nu_{\kappa,\iota}(x),\ \kappa \in \mathfrak{K}_j''',\ \iota \in \mathfrak{I}_j, \quad \mu_r(x)\big(\varepsilon_{\kappa,\iota}(x)\big),\ \kappa \in \tilde{\mathfrak{K}}_j,\ \iota \in \mathfrak{I}_j.$$

Soit x dans $X\backslash X_{\mathrm{r}}$. Puisque la famille $\nu_1(x),\dots,\nu_s(x), v_1,\dots,v_d$ est une base d'un supplémentaire de $x \cdot E$ dans F, la famille

$$\mu_r(x)\big(\varepsilon_{\kappa,\iota}(x)\big), \quad \kappa \in \tilde{\mathfrak{K}}_j,\ \iota \in \mathfrak{I}_j,\ j = 0,\dots,r-1,$$

est une base de $\mu_r(x)(E \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}^{r-1}(F))$ car on a une somme directe de sous-espaces $F_{0,r},\dots,F_{r-1,r}$. Les applications $\varepsilon_{\kappa,\iota}$ et $\nu_{\kappa,\iota}$ satisfont donc les conditions 1), 2), 3) de la définition 2.4 relativement à μ_r. D'après les conditions A) et B), la dimension de $\mu_r(x)(E \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}^{r-1}(F))$ ne dépend pas du point x de X_{r}. En outre, la dimension de $\mu_r(x)(E \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}^{r-1}(F))$ ne dépend pas du point x de $X\backslash X_{\mathrm{r}}$; or $X\backslash X_{\mathrm{r}}$ est un diviseur premier de X dont l'idéal de définition dans $\mathbb{C}[X]$ est engendré par q car X est adéquat pour μ ; donc X est un ouvert adéquat pour μ_r. □

3. Les propriétés (P) et (R).

Sous deux hypothèses techniques portant sur μ, on donne dans cette section une propriété équivalente à la propriété (**P**) plus simple que celle obtenue dans la section précédente. On commence par quelques définitions et remarques.

3.1. Conformément à l'usage, on désigne par $\operatorname{Ker}\alpha$ le noyau d'un endomorphisme linéaire α. Pour tout point x de X, on note $\overline{\mu}_x$ l'application de X dans $\mathrm{Lin}(E(x), F/(x \cdot E))$ qui à y associe l'application linéaire $v \mapsto \mu(y)(v) + x \cdot E$.

Définition 3.1. — On dira que :
- μ a la propriété (**R**) en x si l'indice de $\overline{\mu}_x$ est inférieur à l'indice de μ ;
- μ a la propriété (**R**) si μ a la propriété (**R**) en tout point x de X.

Lemme 3.2. — *Soient x un point de X et s l'entier* $\dim E(x) - \mathrm{i}_\mu$.

(i) *Soit y un point de X. Alors on a*

$$\dim \operatorname{Ker}\overline{\mu}_x(y) = \dim E(x) \cap E(y) + \dim\,(x \cdot E) \cap \mu(y)(E(x)).$$

(ii) *Soit y un point de X. Les points x et y satisfont l'inégalité*

$$\dim E(x) \cap E(y) + \dim\,(x \cdot E) \cap \mu(y)\big(E(x)\big) \le \mathrm{i}_\mu,$$

si et seulement s'il existe des éléments $e_1,\dots,e_s$ de $E(x)$ pour lesquels la famille $\mu(y)(e_1),\dots,\mu(y)(e_s)$ est une famille libre d'un supplémentaire de $x \cdot E$ dans F. En outre, l'ensemble des points y de X qui satisfont cette inégalité est ouvert dans X.

(iii) *L'application μ a la propriété* (**R**) *en x si et seulement s'il existe un point y de X qui satisfait l'inégalité*

$$\dim E(x) \cap E(y) + \dim\,(x \cdot E) \cap \mu(y)\big(E(x)\big) \le \mathrm{i}_\mu.$$

Démonstration. — (i) D'après le théorème du rang pour la restriction de $\mu(y)$ à $E(x)$, on a $\dim E(x) = \dim E(x)\cap E(y) + \dim \mu(y)(E(x))$, et d'après le théorème du rang pour $\overline{\mu}_x$, on a

$$\dim E(x) = \dim \operatorname{Ker} \overline{\mu}_x(y) + \dim \mu(y)\big(E(x)\big) - \dim (x\cdot E)\cap \mu(y)\big(E(x)\big).$$

Par suite, il vient $\dim \operatorname{Ker} \overline{\mu}_x(y) = \dim E(x)\cap E(y) + \dim (x\cdot E)\cap \mu(y)\big(E(x)\big)$.

(ii) Il existe des éléments $e_1,\ldots,e_s$ de $E(x)$ pour lesquels la famille $\mu(y)(e_1),\ldots,\mu(y)(e_s)$ est une famille libre d'un supplémentaire de $x\cdot E$ dans F si et seulement si la dimension de l'image de $\overline{\mu}_x(y)$ est supérieure à s ; or la dimension de l'image de $\overline{\mu}_x(y)$ est supérieure à s si et seulement si la dimension de $\operatorname{Ker}\overline{\mu}_x(y)$ est inférieure à i_μ ; donc l'assertion résulte de l'assertion (i). Il résulte du lemme d'algèbre linéaire rappelé après la définition 2.1 et de l'assertion (i) que l'ensemble des points y de X qui satisfont l'inégalité de l'assertion est ouvert dans X.

(iii) L'assertion résulte de l'assertion (i). □

3.2. Le but de cette section est le théorème suivant qui montre l'équivalence des propriétés (**P**) et (**R**) sous deux conditions techniques.

THÉORÈME 3.3. — *On suppose que le morphisme μ a les deux propriétés suivantes :*

1) *μ est un morphisme dominant de X dans un sous-espace affine L de* $\operatorname{Lin}(E,F)$*,*
2) *pour tout a dans l'image de μ, la réunion des images des applications linéaires tangentes à μ en les points de chaque composante irréductible de la fibre de μ en a, est partout dense dans le sous-espace L_0 des translations de L.*

Alors μ a la propriété (**P**) *de la définition* 2.2 *si et seulement si μ a la propriété* (**R**) *en tout point d'un grand ouvert de X.*

Le reste de cette section est consacré à la démonstration de ce théorème. Comme X_* est un grand ouvert de X, il suffit de le montrer pour la restriction de μ à X_*. On supposera dans les sous-sections qui suivent que X est égal à X_*.

3.3. On rappelle que α_μ est une application régulière de X dans $\mathrm{Gr}_{\mathrm{i}_\mu}(E)$ pour laquelle $\alpha_\mu(x)$ est égal à $E(x)$ pour tout x dans X_{r}.

LEMME 3.4. — (i) *La restriction de μ à tout ouvert non vide U de X satisfait les conditions* 1) *et* 2) *du théorème.*

(ii) *Il existe un recouvrement fini d'un grand ouvert de X par des ouverts affines $X_1,\ldots,X_\ell$ qui ont les propriétés suivantes :*

(a) $X_i \backslash X_{\mathrm{r}}$ *est une hypersurface lisse, irréductible dont l'idéal de définition dans* $\mathbb{C}[X_i]$ *est engendré par un élément* q*,*
(b) *il existe un sous-espace* $\mathfrak{m}$ *de* E *qui est un supplémentaire de* $\alpha_\mu(x)$ *dans* E *pour tout* x *dans* X_i*,*
(c) *si* X_i *rencontre* $X \backslash X_{\mathrm{r}}$*, il existe un sous-espace* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathfrak{m}$ *qui est un supplémentaire de* $E(x)$ *dans* E *pour tout* x *dans* $X_i \backslash X_{\mathrm{r}}$.

(iii) *Si le théorème* 3.3 *est vrai pour la restriction de* μ *à chacun des ouverts* $X_1, \dots, X_\ell$*, alors il est vrai pour* X.

(iv) *Si* X *est égal à* X_{r}*,* μ *a les propriétés* (**P**) *et* (**R**).

Démonstration. — (i) Puisque μ est un morphisme dominant, la restriction de μ à U est un morphisme dominant car U n'est pas vide. Soient a un point de l'image de la restriction de μ à U et Z une composante irréductible de la fibre de μ en a qui rencontre U. On désigne par Σ l'image réciproque de Z par la projection canonique du fibré tangent à X sur X. D'après la condition 2) du théorème 3.3, la restriction à Σ de l'application linéaire tangente à μ est un morphisme dominant de Σ dans L_0 ; or l'ensemble Σ_U des points de Σ au-dessus de U est un ouvert partout dense de Σ car Z est une sous-variété irréductible de la fibre de μ en a qui rencontre U ; donc la restriction à Σ_U de l'application linéaire tangente à μ est un morphisme dominant de Σ_U dans L_0. Vu l'arbitraire de la composante irréductible Z de la fibre de μ en a qui rencontre U, la restriction de μ à U satisfait la condition 2) du théorème 3.3.

(ii) D'après l'assertion (i) du lemme 2.3, il existe un recouvrement fini d'un grand ouvert de X par des ouverts affines V qui satisfont les conditions (a), (b) et la condition suivante : la dimension de $E(x)$ ne dépend pas du point x de $V \backslash X_{\mathrm{r}}$. Soit V un ouvert affine de X qui satisfait ces tois conditions. Si V ne rencontre pas $X \backslash X_{\mathrm{r}}$, V satisfait les conditions (a), (b), (c). Si x est un point de $V \backslash X_{\mathrm{r}}$, il existe un sous-espace $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{m}$ qui est un supplémentaire de $E(x)$ dans E car $E(x)$ contient $\alpha_\mu(x)$. Alors $\mathfrak{p}$ est un supplémentaire de $E(y)$ dans E pour tout point y d'un ouvert de $V \backslash X_{\mathrm{r}}$ qui contient x ; donc x appartient à un ouvert affine de V qui vérifie les conditions (a), (b), (c). Par suite, V admet un recouvrement fini par des ouverts affines qui satisfont les conditions (a), (b), (c).

(iii) Vu la nature locale de la propriété (**P**), μ a la propriété (**P**) si et seulement si la restriction de μ à chacun des ouverts $X_1, \dots, X_\ell$ a la propriété (**P**). Pour $i = 1, \dots, \ell$, on note X'_i l'ensemble des points de X_i en lesquels μ a la propriété (**R**). Si X'_i contient un grand ouvert de X_i pour $i = 1, \dots, \ell$, μ a la propriété (**R**) en tout point d'un grand ouvert de X. Pour $i = 1, \dots, \ell$, l'intersection de X_i et d'un grand ouvert de X est un grand ouvert de X_i ; donc la restriction de μ à X_i a la propriété (**R**) en tout point d'un grand ouvert de X_i si μ a la propriété (**R**) en tout point d'un grand ouvert de X, d'où l'assertion.

(iv) On suppose X égal à X_{r}. Alors μ a la propriété (**P**) et par définition, μ a la propriété (**R**) en tout point de X. □

Le lemme montre qu'il suffit de montrer le théorème pour X affine, vérifiant (a), (b), (c) et contenant strictement X_{r}. On supposera qu'il en est ainsi dans la suite de cette section.

3.4. On note $e_1,\ldots,e_m$ une base de $\mathfrak{m}$ dont les $m-s$ premiers éléments engendrent $\mathfrak{p}$ et δ l'application de X dans $\wedge^m(F)$

$$x \longmapsto \mu(x)(e_1)\wedge\cdots\wedge\mu(x)(e_m).$$

Soient T une indéterminée, τ et τ_0 les images respectives de T par les applications canoniques de l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[T]$ dans les quotients de $\mathbb{C}[T]$ par les idéaux $T^{s+1}\mathbb{C}[T]$ et $T^2\mathbb{C}[T]$. Pour ν $\mathbb{C}[\tau]$-point de X, on note γ_ν l'évaluation en ν de l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ où x est l'image de ν par la projection canonique de l'ensemble des $\mathbb{C}[\tau]$-points de X sur l'ensemble des $\mathbb{C}$-points de X. Alors γ_ν est un morphisme de l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ dans l'anneau $\mathbb{C}[\tau]$. Pour tout entier naturel j, on désigne par $\gamma_{\nu,j}$ le morphisme

$$\mathcal{O}_{X,x}\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^j(F) \longrightarrow \mathbb{C}[\tau]\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^j(F), \quad \varphi\otimes u \longmapsto \gamma_\nu(\varphi)\otimes u,$$

où φ est dans $\mathcal{O}_{X,x}$ et où u est dans $\wedge^j(F)$.

LEMME 3.5. — *Soient x un point de $X\backslash X_{\mathrm{r}}$, w' un vecteur tangent à X en x, w l'image de w' par l'application linéaire tangente à μ en x et ν un $\mathbb{C}[\tau]$-point de X au-dessus du $\mathbb{C}[\tau_0]$-point de X défini par w'.*

(i) *Le sous-module $\tau^s\mathbb{C}[\tau]\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^m(F)$ de $\mathbb{C}[\tau]\otimes_{\mathbb{C}}\wedge^m(F)$ contient $\gamma_{\nu,m}(\delta)$.*

(ii) *L'image de δ par $\gamma_{\nu,m}$ est non nulle si et seulement s'il existe des éléments $f_1,\ldots,f_s$ de $E(x)$ pour lesquels la famille $w(f_1),\ldots,w(f_s)$ est une famille libre d'un supplémentaire de $x\cdot E$ dans F.*

Démonstration. — Désignant par $e'_1,\ldots,e'_s$ les projections respectives de $e_{m-s+1},\ldots,e_m$ sur $E(x)$ parallèlement à $\mathfrak{p}$, δ est égal à l'application

$$y \mapsto \mu(y)(e_1)\wedge\cdots\wedge\mu(y)(e_{m-s})\wedge\mu(y)(e'_1)\wedge\cdots\wedge\mu(y)(e'_s)\,;$$

donc on peut supposer que $E(x)$ contient $e_{m-s+1},\ldots,e_m$. Soit γ'_ν l'application linéaire

$$\mathcal{O}_{X,x}\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{Lin}(E,F) \longrightarrow \mathbb{C}[\tau]\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{Lin}(E,F), \quad \varphi\otimes a \longmapsto \gamma_\nu(\varphi)\otimes a,$$

où φ est dans $\mathcal{O}_{X,x}$ et où a est dans $\mathrm{Lin}(E,F)$. On note $\nu_2(\tau)$ l'élément de $\mathbb{C}[\tau]\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{Lin}(E,F)$ défini par la relation

$$\gamma'_\nu(\mu) = \mu(x) + \tau w + \tau^2\nu_2(\tau).$$

Alors on a

$$\begin{aligned}\gamma_{\nu,m}(\delta) = \big(\mu(x)(e_1) + \tau w(e_1) + \tau^2\nu_2(\tau)(e_1)\big)&\\ \wedge\cdots\wedge\big(\mu(x)(e_m) + \tau w(e_m) + \tau^2\nu_2(\tau)(e_m)\big).&\end{aligned}$$

(i) Puisque $E(x)$ contient $e_{m-s+1},\ldots,e_m$, on a

$$\gamma_{\nu,m}(\delta) = \tau^s \mu(x)(e_1)\wedge\cdots\wedge\mu(x)(e_{m-s})\wedge w(e_{m-s+1})\wedge\cdots\wedge w(e_m),$$

d'où l'assertion.

(ii) On suppose qu'il existe des éléments $f_1,\ldots,f_s$ de $E(x)$ pour lesquels la famille $w(f_1),\ldots,w(f_s)$ est une famille libre d'un supplémentaire de $x\cdot E$ dans F. L'intersection de $E(x)$ et de $\mathfrak{m}$ étant de dimension s, $f_1,\ldots,f_s$ et $e_{m-s+1},\ldots,e_m$ sont des bases du même espace vectoriel ; donc $w(e_{m-s+1}),\ldots,w(e_m)$ est une famille libre d'un supplémentaire de $x\cdot E$ dans F et d'après l'égalité de (i), $\gamma_{\nu,m}(\delta)$ n'est pas nul. Réciproquement, on suppose que $\gamma_{\nu,m}(\delta)$ n'est pas nul. Alors l'ensemble des éléments $\mu(x)(e_1),\ldots,\mu(x)(e_{m-s}), w(e_{m-s+1}),\ldots,w(e_m)$ est une partie libre de F ; or les $m-s$ premiers de ces éléments engendrent $x\cdot E$; donc l'ensemble des éléments $w(e_{m-s+1}),\ldots,w(e_m)$ est une partie libre d'un supplémentaire de $x\cdot E$ dans F. □

3.5. Pour tout point x de X, on désigne par T_xX l'espace tangent à X en x et par K_x le noyau de la différentielle de q en x. On note Δ l'ensemble des points $(x,w,f_1,\ldots,f_s)$ de $(X\backslash X_{\mathrm{r}})\times L_0\times E^s$ qui satisfont les conditions suivantes : $E(x)$ contient $f_1,\ldots,f_s$, $\{w(f_1),\ldots,w(f_s)\}$ est une partie libre d'un supplémentaire de $x\cdot E$ dans F et w appartient à l'image de $\mathrm{T}_xX\backslash K_x$ par l'application linéaire tangente à μ en x. Pour U ouvert de X, non contenu dans X_{r}, on désigne par Δ_U l'intersection de U et de l'image de Δ par la projection canonique de $(X\backslash X_{\mathrm{r}})\times L_0\times E^s$ sur $X\backslash X_{\mathrm{r}}$.

Lemme 3.6. — *Soient U un ouvert de X qui n'est pas contenu dans X_{r} et U' l'ensemble des points de U en lesquels la différentielle de q n'est pas nulle.*

(i) *La partie U' de X est un ouvert qui rencontre $X\backslash X_{\mathrm{r}}$.*

(ii) *La partie $\Delta_{U'}$ de $X\backslash X_{\mathrm{r}}$ est constructible.*

(iii) *Si μ a la propriété* (**R**) *en tout point d'un ouvert de X qui rencontre $X\backslash X_{\mathrm{r}}$, $\Delta_{U'}$ est partout dense dans $X\backslash X_{\mathrm{r}}$.*

(iv) *L'application μ a la propriété* (**R**) *en tout point d'un ouvert de X qui rencontre $X\backslash X_{\mathrm{r}}$ si et seulement si Δ_X contient un ouvert non vide de $X\backslash X_{\mathrm{r}}$.*

Démonstration. — (i) L'ensemble des points de X en lesquels la différentielle de q n'est pas nulle, est un ouvert de X. Cet ouvert rencontre $X\backslash X_{\mathrm{r}}$ car q engendre l'idéal de défintion de $X\backslash X_{\mathrm{r}}$ dans $\mathbb{C}[X]$.

(ii) Soit Δ_1 l'ensemble des points (x,w) de $X\times L_0$ pour lesquels w est l'image par l'application linéaire tangente à μ en x d'un élément de $\mathrm{T}_xX\backslash K_x$. Alors Δ_1 est l'image par l'application linéaire tangente à μ d'un ouvert du fibré tangent à X ; donc Δ_1 est une partie constructible de $X\times L_0$. Soient Δ_2 l'ensemble des points $(x,f_1,\ldots,f_s)$ de $X\times E^s$ pour lesquels $E(x)$ contient $f_1,\ldots,f_s$ et Δ_3 l'ensemble des points $(x,w,f_1,\ldots,f_s)$ de $X\times L_0\times E^s$ pour lesquels l'ensemble des éléments $w(f_1),\ldots,w(f_s)$ est une partie libre d'un supplémentaire de $x\cdot E$

dans F. Si Y est une partie localement fermée de X pour laquelle le rang de $\mu(x)$ ne dépend pas du point x de Y, l'intersection de $Y \times E^s$ et de Δ_2 est fermée dans $Y \times E^s$ d'après le lemme d'algèbre linéaire rappelé en 2. De même, l'intersection de $Y \times L_0 \times E^s$ et de Δ_3 est fermée dans $Y \times L_0 \times E^s$; donc Δ_2 est une partie constructible de $X \times E^s$ et Δ_3 est une partie constructible de $X \times L_0 \times E^s$. Désignant par Δ_2' l'image réciproque de Δ_2 par la projection canonique de $X \times L_0 \times E^s$ sur $X \times E^s$, Δ est l'intersection des sous-ensembles $\Delta_1 \times E^s$, Δ_2', Δ_3, $(X\backslash X_{\mathrm{r}}) \times L_0 \times E^s$; donc Δ est une partie constructible de $(X\backslash X_{\mathrm{r}}) \times L_0 \times E^s$. Il en résulte que Δ_X et $\Delta_{U'}$ sont des parties constructibles de $X\backslash X_{\mathrm{r}}$.

(iii) On suppose que μ a la propriété (**R**) en tout point d'un ouvert non vide W de $X\backslash X_{\mathrm{r}}$. Puisque $X\backslash X_{\mathrm{r}}$ est irréductible, l'intersection V de W et de U' est un ouvert partout dense de $X\backslash X_{\mathrm{r}}$ d'après l'assertion (i). Soit x dans V. D'après les assertions (ii) et (iii) du lemme 3.2, il existe des éléments $f_1, \ldots, f_s$ de $E(x)$ et un point y de X pour lequel l'ensemble des éléments $\mu(y)(f_1), \ldots, \mu(y)(f_s)$ est une partie libre d'un supplémentaire de $x \cdot E$ dans F. Soit Ω_x l'ensemble des éléments w de L_0 qui satisfont la condition suivante : l'ensemble des éléments $w(f_1), \ldots, w(f_s)$ est une partie libre d'un supplémentaire de $x \cdot E$ dans F. Alors Ω_x est ouvert dans L_0. En outre, Ω_x n'est pas vide car il contient $\mu(y) - \mu(x)$. D'après l'assertion (i) du lemme 3.4, la restriction μ' de μ à U' satisfait la condition 2) du théorème 3.3 ; donc pour tout point x' d'un ouvert partout dense V_x de la fibre de μ' en $\mu(x)$, l'image de l'application linéaire tangente à μ en x' rencontre Ω_x. Il en résulte que pour tout x' dans V_x, Ω_x rencontre l'image de $\mathrm{T}_{x'}X\backslash K_{x'}$ par l'application linéaire tangente à μ en x'. Puisque $x \cdot E$ et $E(x)$ ne dépendent que de $\mu(x)$, pour tout x' dans V_x, il existe un élément w de L_0 pour lequel Δ contient $(x', w, f_1, \ldots, f_s)$; donc Δ_X et $\Delta_{U'}$ contiennent V_x. Puisque V est partout dense dans $X\backslash X_{\mathrm{r}}$, $\Delta_{U'}$ est partout dense dans $X\backslash X_{\mathrm{r}}$.

(iv) D'après les assertions (ii) et (iii), Δ_X contient un ouvert non vide de $X\backslash X_{\mathrm{r}}$ si μ a la propriété (**R**) en tout point d'un ouvert de X qui rencontre $X\backslash X_{\mathrm{r}}$. Réciproquement, on suppose que Δ_X contient un ouvert non vide V de $X\backslash X_{\mathrm{r}}$. Soit x un point de V. Alors il existe des éléments $f_1, \ldots, f_s$ de $E(x)$ et un élément w de l'image de l'application linéaire tangente à μ en x qui satisfont la condition suivante : l'ensemble des éléments $w(f_1), \ldots, w(f_s)$ est une partie libre d'un supplémentaire de $x \cdot E$ dans F. On note Ω_x l'ensemble des éléments a de L_0 pour lesquels l'ensemble des éléments $a(f_1), \ldots, a(f_s)$ est une partie libre d'un supplémentaire de $x \cdot E$ dans F. Alors Ω_x est un ouvert non vide de L_0 ; donc il existe un point y de X pour lequel Ω_x contient $\mu(y) - \mu(x)$ car μ est un morphisme dominant de X dans L. Il en résulte que μ a la propriété (**R**) en x d'après les assertions (ii) et (iii) du lemme 3.2. □

Démonstration. — On termine la démonstration du théorème 3.3. On utilise les notations des lemmes 3.5 et 3.6. La variété des zéros de δ contient $X\backslash X_{\mathrm{r}}$

car $E(x)$ rencontre $\mathfrak{m}$ pour tout point x de $X\backslash X_{\mathrm{r}}$; or q engendre l'idéal de définition de $X\backslash X_{\mathrm{r}}$ dans $\mathbb{C}[X]$; donc q divise δ. Soient q^i la plus grande puissance de q qui divise δ dans $\mathbb{C}[X] \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^m(F)$, δ' le quotient de δ par q^i et U le complémentaire dans X de la variété des zéros de δ'. Alors U est un ouvert de X qui rencontre $X\backslash X_{\mathrm{r}}$. D'après le théorème 2.9, la propriété (**P**) pour μ est équivalente à l'égalité $i = s$. D'après l'assertion (iv) du lemme 3.6, la propriété (**R**) pour μ en tout point d'un grand ouvert de X est équivalente à la condition suivante : Δ_X contient un ouvert non vide de $X\backslash X_{\mathrm{r}}$.

D'après l'assertion (i) du lemme 3.6, l'ensemble U' des points de U en lesquels la différentielle de q n'est pas nulle, est un ouvert de X qui rencontre $X\backslash X_{\mathrm{r}}$. Soient x un point de $U'\backslash X_{\mathrm{r}}$, w' un élément de $\mathrm{T}_x X\backslash K_x$, w l'image de w' par l'application linéaire tangente à μ en x et ν un $\mathbb{C}[\tau]$-point de X au-dessus de w'. Puisque w' n'est pas dans K_x, $\gamma_\nu(q)$ est le produit de τ et d'un élément inversible de $\mathbb{C}[\tau]$. De même, $\gamma_{\nu,m}(\delta')$ n'appartient pas à $\tau\mathbb{C}[\tau] \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^m(F)$ car U contient x ; or $\gamma_{\nu,m}(\delta)$ est le produit de $\gamma_\nu(q)^i$ et de $\gamma_{\nu,m}(\delta')$; donc $\gamma_{\nu,m}(\delta)$ est le produit de τ^i et d'un élément qui n'appartient pas à $\tau\mathbb{C}[\tau] \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^m(F)$. D'après l'assertion (ii) du lemme 3.5, $\gamma_{\nu,m}(\delta)$ est un élément non nul de $\tau^s\mathbb{C}[\tau] \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^m(F)$ si et seulement s'il existe des éléments $f_1, \ldots, f_s$ de E^s pour lesquels Δ contient $(x, w, f_1, \ldots, f_s)$; donc i est égal à s si $\Delta_{U'}$ contient x. Il résulte alors de l'assertion (iii) du lemme 3.6 que μ a la propriété (**P**) si μ a la propriété (**R**) en tout point d'un grand ouvert de X. Réciproquement si i est égal à s, Δ_X contient U'. □

4. Application de la propriété (R)

On désigne par F^* le dual de F et par $\mathfrak{C}_\mu$ l'ensemble des points (x, v') de $X \times F^*$ pour lesquels $x \cdot E$ est contenu dans le noyau de v'. On rappelle que $\mathrm{S}(F)$ désigne l'algèbre symétrique de F. Le faisceau $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(F)$ est un faisceau cohérent d'algèbres de fonctions régulières sur des ouverts de $X \times F^*$. La fonction $(x, v') \mapsto \langle v', \mu(x)(v)\rangle$ est section globale de $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(F)$ pour tout v dans E ; on la note $\tau_\mu(v)$. On montre dans cette section le théorème :

THÉORÈME 4.1. — *On suppose que le morphisme μ a les propriétés* 1) *et* 2) *du théorème* 3.3. *Soient $\mathcal{I}_\mu$ l'idéal de $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(F)$ engendré par $\tau_\mu(E)$ et $\sqrt{\mathcal{I}_\mu}$ le radical de $\mathcal{I}_\mu$. Soient Σ le support dans $X \times F^*$ du $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(F)$-module $\sqrt{\mathcal{I}_\mu}/\mathcal{I}_\mu$ et S sa projection sur X. Alors S est une sous-variété fermée de codimension supérieure à* 2 *de X si et seulement si μ a la propriété* (**R**) *en tout point d'un grand ouvert de X.*

Puisque $\mathfrak{C}_\mu$ est la variété des zéros de $\mathcal{I}_\mu$ dans $X \times V^*$, $\mathfrak{C}_\mu$ contient Σ. Dans ce qui suit, on suppose que le morphisme μ a les propriétés 1) et 2) du théorème 3.3.

4.1. On rappelle que pour tout entier naturel r, $\mathrm{S}^r(F)$ désigne le sous-espace des éléments homogènes de degré r pour la graduation usuelle sur $\mathrm{S}(F)$. Le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ agit sur F^* par multiplication, d'où une action de $\mathbb{C}^*$ sur $X \times F^*$. L'idéal $\mathcal{I}_\mu$ est stable par cette action ; donc $\sqrt{\mathcal{I}_\mu}$ est stable par cette action. En outre, la graduation naturelle de $\mathrm{S}(F)$ induit sur $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(F)$ une structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre graduée. D'après des résultats classiques sur les anneaux gradués, on a alors le lemme :

LEMME 4.2. — *Pour tout entier naturel r, on désigne par $\mathcal{I}_r$ et $\mathcal{J}_r$ les intersections respectives de $\mathcal{I}_\mu$ et de $\sqrt{\mathcal{I}_\mu}$ avec $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}^r(F)$.*

(i) *L'idéal $\mathcal{I}_\mu$ est somme directe des sous-$\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots$*

(ii) *L'idéal $\sqrt{\mathcal{I}_\mu}$ est somme directe des sous-$\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \ldots$*

(iii) *Pour ℓ entier positif assez grand, $\sqrt{\mathcal{I}_\mu}$ est le sous-*$\mathrm{S}(F)$*-module de $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(F)$ engendré par la somme des sous-$\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_\ell$.*

4.2. Pour tout t dans $\mathbb{C}^*$, on note κ_t l'homothétie vectorielle de rapport t de l'espace vectoriel F^*.

LEMME 4.3. — *Soit Σ une partie fermée de $X \times F^*$ qui est stable par $1_X \times \kappa_t$ pour tout élément non nul t de $\mathbb{C}$. Alors la projection de Σ sur X est fermée dans X.*

Démonstration. — Puisque chaque composante irréductible de Σ est stable par $1_X \times \kappa_t$ pour tout élément non nul t de $\mathbb{C}$, on peut supposer Σ irréductible. Soit Σ' l'intersection de Σ et de $X \times (F^* \backslash \{0\})$. On note Σ^* l'image de Σ' par l'application $(x, v') \mapsto (x, \varpi(v'))$ où ϖ est l'application canonique de $F^* \backslash \{0\}$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}(F^*)$ de F^*. D'après l'hypothèse sur Σ, Σ' est l'image réciproque de Σ^* par cette application ; or Σ' est fermé dans $X \times (F^* \backslash \{0\})$, donc Σ^* est fermé dans $X \times \mathbb{P}(F^*)$. Par suite, la projection de Σ' sur X est fermée dans X. Puisque Σ est irréductible, Σ' est partout dense dans Σ quand il est non vide ; donc dans ce cas, la projection de Σ sur X est égale à la projection de Σ' sur X car celle-ci est fermée dans X, d'où l'assertion. Si Σ' est vide, Σ est égal à $S \times \{0\}$ où S est la projection de Σ sur X. La partie S de X est fermée car Σ est fermé dans $X \times F^*$. □

4.3. Soit ℓ un entier positif assez grand pour que $\sqrt{\mathcal{I}_\mu}$ soit le sous-$\mathrm{S}(F)$-module engendré par la somme des sous-$\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_\ell$. L'existence de ℓ résulte de l'assertion (iii) du lemme 4.2. Pour tout entier strictement positif r, on note E_r l'espace vectoriel $E \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}^{r-1}(F)$ et μ_r l'application régulière de X dans $\mathrm{Lin}(E_r, \mathrm{S}^r(F))$ qui à x associe l'application linéaire $v \otimes a \mapsto \mu(x)(v)a$ où v est dans E et où a est dans $\mathrm{S}^{r-1}(F)$. On note i_{μ_r} l'indice de μ_r et $X_{\mathrm{r},r}$ l'ensemble des points x de X pour lesquels i_{μ_r} est la dimension du noyau de $\mu_r(x)$. D'après [5, ch. VI, th. 1], il existe un grand ouvert Z de X et une application régulière

$$\alpha : Z \longrightarrow \mathrm{Gr}_{i_{\mu_1}}(E_1) \times \cdots \times \mathrm{Gr}_{i_{\mu_\ell}}(E_\ell),$$

qui satisfait l'égalité

$$\alpha(x) = \big(E_1(x), \dots, E_\ell(x)\big),$$

si x appartient à l'intersection des ouverts $X_{\mathrm{r},1}, \dots, X_{\mathrm{r},\ell}$.

LEMME 4.4. — *Soit r un entier dans $\{1, \dots, \ell\}$.*

(i) *Le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{J}_r$ est égal au module $\mathcal{M}_{\mu_r}$ défini dans la définition* 2.2.

(ii) *Si μ a la propriété* (**R**) *en tout point d'un grand ouvert de X, alors $\mathcal{I}_r$ et $\mathcal{J}_r$ ont même restriction à Z.*

Démonstration. — Le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}^r(F)$ s'identifie canoniquement au module des germes d'applications régulières de X dans $\mathrm{S}^r(F)$.

(i) Soient V un ouvert de X et φ une application régulière de V dans $\mathrm{S}^r(F)$. Par définition, φ est section locale de $\mathcal{M}_{\mu_r}$ si et seulement si l'image de $\mu_r(x)$ contient $\varphi(x)$ pour tout x dans V. L'application φ est section locale de $\mathcal{J}_r$ si et seulement si φ est nul sur l'intersection de $\mathfrak{C}_\mu$ et de $V \times F^*$. Pour tout x dans V, l'idéal de définition dans $\mathrm{S}(F)$ de l'ensemble des points de $\mathfrak{C}_\mu$ au-dessus de x est l'idéal engendré par $x \cdot E$; or l'intersection de cet idéal et de $\mathrm{S}^r(F)$ est égale à l'image de $\mu_r(x)$; donc φ est section de $\mathcal{J}_r$ au-dessus de V si et seulement si φ est section de $\mathcal{M}_{\mu_r}$ au-dessus de V, d'où l'assertion.

(ii) On suppose que μ a la propriété (**R**) en tout point d'un grand ouvert de X. Alors μ a la propriété (**P**) de la définition 2.2 d'après le théorème 3.3 ; donc d'après le lemme 2.10, μ_r a la propriété (**P**). Il résulte alors de l'assertion (i) que la restriction de $\mathcal{J}_r$ à Z est la restriction à Z de l'image du morphisme θ_r

$$\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} E_r \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}^r(F), \quad \varphi \otimes v \longmapsto \big(x \mapsto \varphi(x)\mu_r(x)(v)\big),$$

où φ est section locale de $\mathcal{O}_X$ et où v est dans E_r ; or $\mathcal{I}_r$ est l'image de θ_r car pour tout v dans E et pour tout a dans $\mathrm{S}^{r-1}(F)$, $\tau(v)a$ est la fonction sur $X \times F^*$, $(x, v') \mapsto \mu_r(x)(v \otimes a)(v')$; donc $\mathcal{I}_r$ et $\mathcal{J}_r$ ont même restriction à Z. $\square$

Démonstration du théorème 4.1. — D'après le lemme 4.2, le support Σ du $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(F)$-module $\sqrt{\mathcal{I}_\mu}/\mathcal{I}_\mu$ dans $X \times F^*$ est stable par l'action de $\mathbb{C}^*$; donc d'après le lemme 4.3, la projection S de Σ sur X est fermée dans X. On suppose que μ a la propriété (**R**) en tout point d'un grand ouvert de X. D'après l'assertion (ii) du lemme 4.4, $\mathcal{I}_r$ et $\mathcal{J}_r$ ont même restriction à Z pour $r = 1, \dots, \ell$; or le $\mathrm{S}(F)$-module $\mathcal{J}_\mu$ est engendré par la somme des $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_\ell$; donc $\mathcal{J}_\mu$ et $\mathcal{I}_\mu$ ont même restriction à $Z \times F^*$ car $\mathcal{J}_\mu$ contient $\mathcal{I}_\mu$ qui est égal au $\mathrm{S}(F)$-module engendré par $\mathcal{I}_1$. Il en résulte que Σ est contenu dans $(X \backslash Z) \times F^*$ et que $X \backslash Z$ contient S ; donc la codimension de S dans X est supérieure à 2 car Z est un grand ouvert de X. Réciproquement, on suppose que S est de codimension supérieure à 2 dans X. Puisque $\mathcal{J}_\mu$ et $\mathcal{I}_\mu$ ont même restriction à $(X \backslash S) \times F^*$, les $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{J}_1$ ont même restriction à $X \backslash S$.

D'après l'assertion (i) du lemme 4.4, $\mathcal{J}_1$ est égal à $\mathcal{M}_\mu$; or $\mathcal{I}_1$ est l'image du morphisme θ

$$\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} E \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} F, \quad \varphi \otimes v \longmapsto \big(x \mapsto \varphi(x)\mu(x)(v)\big),$$

où φ est section locale de $\mathcal{O}_X$ et où v est dans E ; donc d'après l'assertion (ii) du lemme 2.3, μ a la propriété $(\mathbf{P})$ car $X\backslash S$ est un grand ouvert de X. Il résulte alors du théorème 3.3 que μ a la propriété $(\mathbf{R})$ en tout point d'un grand ouvert de X. □

5. Application aux algèbres de Lie

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie. On note μ l'application de $\mathfrak{g}$ dans l'espace des endomorphismes linéaires de $\mathfrak{g}$ qui à x associe $\operatorname{ad} x$. On désigne par $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$ et par ν l'application de $\mathfrak{g}^*$ dans $\mathrm{Lin}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ qui à l'élément v' de $\mathfrak{g}^*$ associe l'application linéaire $\xi \mapsto \xi \cdot v'$ où $\xi \cdot v'$ est l'action coadjointe de ξ sur v'.

DÉFINITION 5.1. — On dira que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ possède :
- la propriété $(\mathbf{C})$ *en l'élément* ξ de $\mathfrak{g}$ si μ a la propriété $(\mathbf{R})$ en ξ,
- la propriété $(\mathbf{C})$ si μ a la propriété $(\mathbf{R})$,
- la propriété $(\mathbf{Q})$ *en l'élément* v' de $\mathfrak{g}^*$ si ν a la propriété $(\mathbf{R})$ en v',
- la propriété $(\mathbf{Q})$ si ν a la propriété $(\mathbf{R})$.

5.1. On rappelle qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite *quadratique* lorsque ses représentations adjointe et coadjointe sont isomorphes et que l'indice $\mathrm{i}_{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}$ est la dimension minimale des stabilisateurs dans $\mathfrak{g}$ des éléments de $\mathfrak{g}^*$. Selon les notations ci-dessus, $\mathrm{i}_{\mathfrak{g}}$ est égal à i_ν.

PROPOSITION 5.2. — *Soit v' dans $\mathfrak{g}^*$.*

(i) *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ a la propriété* $(\mathbf{Q})$ *en v' si et seulement si l'indice de $\mathfrak{g}(v')$ est égal à $\mathrm{i}_{\mathfrak{g}}$.*

(ii) *On suppose $\mathfrak{g}$ quadratique. Alors $\mathfrak{g}$ a la propriété* $(\mathbf{C})$ *si et seulement si $\mathfrak{g}$ a la propriété* $(\mathbf{Q})$.

Démonstration. — (i) Par définition, $\mathfrak{g}$ a la propriété $(\mathbf{Q})$ en v' si et seulement si l'indice de $\mathfrak{g}(v')$ est inférieur à l'indice de $\mathfrak{g}$. L'assertion résulte alors de [3, cor. 1.7].

(ii) Il existe par hypothèse un isomorphisme σ de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}^*$ qui entrelace les représentations adjointe et coadjointe. En particulier, i_μ est égal à i_ν. Pour tout ξ dans $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}(\xi)$ est égal à $\mathfrak{g}(\sigma(\xi))$ et $\mathfrak{g} \cdot \sigma(\xi)$ est égal à $\sigma(\mathfrak{g} \cdot \xi)$; donc pour tout ξ dans $\mathfrak{g}$, la propriété $(\mathbf{C})$ en ξ est équivalente à la propriété $(\mathbf{Q})$ en $\sigma(\xi)$, d'où l'assertion. □

REMARQUE 5.3. — L'algèbre de Heisenberg a la propriété $(\mathbf{Q})$ mais l'algèbre nilpotente de dimension 5 engendrée par $e_1, \ldots, e_5$ avec les crochets non nuls :

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_5, \quad [e_2, e_3] = e_5,$$

n'a pas la propriété $(\mathbf{Q})$ en tout point d'une sous-variété de codimension 1 de son dual.

Soit $\mathfrak{C}_{\mathfrak{g}}$ la sous-variété des points (ξ, v') de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ pour lesquels ξ stabilise v'. La variété $\mathfrak{C}_{\mathfrak{g}}$ coïncide avec la variété $\mathfrak{C}_{\mu}$ du théorème 4.1 pour $X = E = F = \mathfrak{g}$. On note $I_{\mathfrak{g}}$ l'idéal de $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(\mathfrak{g})$ engendré par les fonctions $(\xi, v') \mapsto \langle v', [\xi, \eta] \rangle$ où η est dans $\mathfrak{g}$ et $\sqrt{I_{\mathfrak{g}}}$ son radical.

THÉORÈME 5.4. — *Soit* Σ *le support dans* $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ *du* $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(\mathfrak{g})$*-module* $\sqrt{I_{\mathfrak{g}}}/I_{\mathfrak{g}}$.

(i) *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *a la propriété* $(\mathbf{C})$ *en tout point d'un grand ouvert de* $\mathfrak{g}$ *si et seulement si la projection de* Σ *sur* $\mathfrak{g}$ *est une sous-variété fermée de codimension supérieure à* 2 *de* $\mathfrak{g}$.

(ii) *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *a la propriété* $(\mathbf{Q})$ *en tout point d'un grand ouvert de* $\mathfrak{g}^*$ *si et seulement si la projection de* Σ *sur* $\mathfrak{g}^*$ *est une sous-variété fermée de codimension supérieure à* 2 *de* $\mathfrak{g}^*$.

Démonstration. — (i) Pour $X = E = F = \mathfrak{g}$ et pour μ égal à l'application $x \mapsto \operatorname{ad} x$ de $\mathfrak{g}$ dans l'espace des endomorphismes linéaires de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{C}_{\mu}$ est égal à $\mathfrak{C}_{\mathfrak{g}}$. L'application μ satisfait les conditions 1) et 2) du théorème 3.3 car μ est une application linéaire. L'assertion est alors un cas particulier du théorème 4.1.

(ii) Pour $X = F = \mathfrak{g}^*$, $E = \mathfrak{g}$ et pour ν égal à l'application de $\mathfrak{g}^*$ dans $\mathrm{Lin}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ qui à l'élément v' de $\mathfrak{g}^*$ associe l'application linéaire $\xi \mapsto \xi \cdot v'$, la restriction à $\mathfrak{C}_{\mathfrak{g}}$ de l'isomorphisme $(\xi, v') \mapsto (v', \xi)$ de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ sur $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{C}_{\mathfrak{g}}$ sur $\mathfrak{C}_{\nu}$. En outre, l'image de $I_{\mathfrak{g}}$ par cet isomorphisme est l'espace des sections globales de $\mathcal{I}_{\nu}$. L'application ν satisfait les conditions 1) et 2) du théorème 3.3 car ν est une application linéaire. L'assertion est alors un cas particulier du théorème 4.1. □

5.2. Dans cette sous-section et les suivantes, on suppose que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réductive. On note G son groupe adjoint. Les représentations adjointe et coadjointe de $\mathfrak{g}$ sont isomorphes. En particulier, l'indice de $\mathfrak{g}$ est égal au rang $\operatorname{rk} \mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}$. Pour tout x dans $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}(x)$ désigne le centralisateur de x dans $\mathfrak{g}$.

THÉORÈME 5.5. — *L'indice du centralisateur de tout élément de* $\mathfrak{g}$ *est égal au rang de* $\mathfrak{g}$.

Démonstration. — D'après l'assertion (i) de la proposition 5.2, le théorème revient à dire que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ a la propriété $(\mathbf{Q})$. Puisque le centralisateur de tout élément de $\mathfrak{g}$ contient le centre de $\mathfrak{g}$, le théorème pour $\mathfrak{g}$ est conséquence du théorème pour $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$; donc il suffit de montrer le théorème pour $\mathfrak{g}$ semi-simple.

On raisonne par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ est simple de dimension 3, le centralisateur de tout élément non nul de $\mathfrak{g}$ est de dimension 1 ; donc le théorème est vrai pour $\mathfrak{g}$. On suppose le théorème vrai pour toute algèbre de Lie semi-simple de dimension strictement inférieure à $\dim\mathfrak{g}$. Soit x un élément non nul de $\mathfrak{g}$. On note x_{s} et x_{n} les composantes semi-simple et nilpotente de x. Le centralisateur $\mathfrak{g}(x)$ de x est alors égal au centralisateur de x_{n} dans $\mathfrak{g}(x_{\mathrm{s}})$. Si x_{s} est non nul, $\mathfrak{g}(x_{\mathrm{s}})$ est une algèbre de Lie réductive dont l'algèbre dérivée est de dimension strictement inférieure à $\dim\mathfrak{g}$; donc d'après l'hypothèse de récurrence, l'indice de $\mathfrak{g}(x)$ est égal au rang de $\mathfrak{g}(x_{\mathrm{s}})$. Il en résulte que l'indice de $\mathfrak{g}(x)$ est égal au rang de $\mathfrak{g}$ car $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}(x_{\mathrm{s}})$ ont même rang. Il s'agit donc de montrer que pour tout élément nilpotent ξ de $\mathfrak{g}$, l'indice de $\mathfrak{g}(\xi)$ est égal au rang de $\mathfrak{g}$. Si ξ est régulier, $\mathfrak{g}(\xi)$ est une sous-algèbre commutative de dimension $\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ d'après [1, ch. II, 1.8] ; donc il suffit de démontrer que l'indice de $\mathfrak{g}(\xi)$ est égal à $\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ dans le cas où ξ n'est pas régulier.

Le reste de cette section est consacré à la démonstration de cette assertion sous l'hypothèse que le théorème est vrai pour toute algèbre de Lie semi-simple de dimension strictement inférieure à celle de $\mathfrak{g}$.

5.3. Puisque ξ est un élément nilpotent, il résulte du théorème de Jacobson-Morozov qu'il existe des éléments ρ et η de $\mathfrak{g}$ pour lesquels ξ, ρ, η satisfont les relations de $\mathfrak{sl}_2$-triplet :

$$[\xi,\eta]=\rho,\quad [\rho,\xi]=2\xi,\quad [\rho,\eta]=-2\eta.$$

On note π_ξ l'application $(g,x)\mapsto g(x)$ de $G\times(\xi+\mathfrak{g}(\eta))$ dans $\mathfrak{g}$. On rappelle dans cette sous-section un résultat de P. Slodowy [6]. La notion d'orthogonalité utilisée est celle relative à la forme de Killing de $\mathfrak{g}$.

LEMME 5.6. — *L'espace $\mathfrak{g}$ est somme directe des sous-espaces $\mathfrak{g}(\eta)$ et $[\xi,\mathfrak{g}]$. En outre, l'orthogonal de $\mathfrak{g}(\xi)$ dans $\mathfrak{g}$ est égal à $[\xi,\mathfrak{g}]$ et la restriction de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{g}(\eta)\times\mathfrak{g}(\xi)$ est non dégénérée.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{l}$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par ξ, ρ, η. Alors $\mathfrak{l}$ est une sous-algèbre simple de dimension 3 de $\mathfrak{g}$. Il en résulte que $\mathfrak{g}$ est somme directe de sous-$\mathfrak{l}$-modules simples $V_1,\dots,V_p$. Pour $i=1,\dots,p$, on désigne par w_i un élément non nul de V_i qui appartient au noyau de $\mathrm{ad}\,\eta$ et V'_i l'image de la restriction de $\mathrm{ad}\,\xi$ à V_i. Alors V_i est somme directe de V'_i et de la droite engendrée par w_i. Le centralisateur $\mathfrak{g}(\eta)$ de η est le sous-espace engendré par $w_1,\dots,w_p$ et $[\xi,\mathfrak{g}]$ est somme directe des sous-espaces $V'_1,\dots,V'_p$; donc $\mathfrak{g}$ est somme directe de $\mathfrak{g}(\eta)$ et de $[\xi,\mathfrak{g}]$.

D'après la propriété d'invariance de la forme de Killing, $\mathfrak{g}(\xi)$ est orthogonal à $[\xi,\mathfrak{g}]$; or d'après ce qui précède, la dimension de $\mathfrak{g}(\xi)$ est égale à la codimension de $[\xi,\mathfrak{g}]$ dans $\mathfrak{g}$ car $\mathfrak{g}(\xi)$ et $\mathfrak{g}(\eta)$ ont même dimension ; donc $\mathfrak{g}(\xi)$ est l'orthogonal de $[\xi, \mathfrak{g}]$ dans $\mathfrak{g}$. Puisque l'intersection de $\mathfrak{g}(\eta)$ et de $[\xi, \mathfrak{g}]$ est nulle, l'othogonal de $\mathfrak{g}(\xi)$ dans $\mathfrak{g}(\eta)$ est nul. En permutant les rôles de ξ et de η, on voit que l'othogonal de $\mathfrak{g}(\eta)$ dans $\mathfrak{g}(\xi)$ est nul, d'où le lemme. □

COROLLAIRE 5.7. — *Il existe un voisinage ouvert W de ξ dans $\xi + \mathfrak{g}(\eta)$ tel que la restriction de π_ξ à $G \times W$ soit un morphisme lisse de $G \times W$ sur un ouvert G-invariant de $\mathfrak{g}$ qui contient ξ.*

Démonstration. — D'après le lemme, π_ξ est une submersion en (e, ξ) ; donc il existe un voisinage ouvert W de ξ dans $\xi + \mathfrak{g}(\eta)$ tel que π_ξ soit une submersion en (e, x) pour tout x dans W. Si (g, x) est un point de $G \times (\xi + \mathfrak{g}(\eta))$ en lequel π_ξ est une submersion, π_ξ est une submersion en (hg, x) pour tout h dans G ; donc la restriction de π_ξ à $G \times W$ est une submersion en tout point, d'où le corollaire car l'image de π_ξ est invariante par G. □

5.4. On rappelle qu'une forme linéaire v' sur $\mathfrak{g}(\xi)$ est dite régulière si son stabilisateur dans $\mathfrak{g}(\xi)$ est de dimension minimale. Si v' est une forme linéaire régulière sur $\mathfrak{g}(\xi)$, son stabilisateur $\mathfrak{g}(\xi)(v')$ dans $\mathfrak{g}(\xi)$ est une sous-algèbre commutative d'après [1, ch. II, 1.8] ; donc l'ensemble $\mathfrak{s}(v')$ des éléments semi-simples de $\mathfrak{g}(\xi)(v')$ est un sous-espace de $\mathfrak{g}(\xi)$. Selon M. Duflo, la forme linéaire régulière v' est dite fortement régulière si $\mathfrak{s}(v')$ est de dimension maximale. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ étant semi-simple, la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur l'algèbre de Lie de G. On identifie $\mathfrak{g}$ à son image par la représentation adjointe. En particulier, $\mathfrak{g}(\xi)$ est l'algèbre de Lie du stabilisateur $G(\xi)$ de ξ dans G et pour toute forme linéaire régulière v' sur $\mathfrak{g}(\xi)$, $\mathfrak{s}(v')$ est l'algèbre de Lie du plus grand tore contenu dans le stabilisateur $G(\xi)(v')$ de v' dans $G(\xi)$. On dira que $\mathfrak{s}(v')$ est le plus grand tore de $\mathfrak{g}(\xi)(v')$.

LEMME 5.8. — *Soit $\mathfrak{s}$ le plus grand tore du stabilisateur d'une forme linéaire fortement régulière sur $\mathfrak{g}(\xi)$. On note $\mathfrak{a}$ le centralisateur de $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{g}$.*

(i) *L'élément ξ appartient à l'algèbre dérivée de $\mathfrak{a}$.*

(ii) *La sous-algèbre $\mathfrak{g}(\xi)$ est somme directe de ses intersections respectives $\mathfrak{g}(\xi)_0$ et $\mathfrak{g}(\xi)_+$ avec $\mathfrak{a}$ et $[\mathfrak{s}, \mathfrak{g}]$.*

(iii) *Les algèbres $\mathfrak{g}(\xi)_0$ et $\mathfrak{g}(\xi)$ ont même indice.*

(iv) *Le centre de $\mathfrak{a}$ est égal à $\mathfrak{s}$.*

(v) *On suppose que $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ contient ρ et η. Soit $\mathfrak{g}(\eta)'_0$ le centralisateur de η dans $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$. Alors $\mathfrak{s}$ est le centralisateur dans $\mathfrak{g}(\xi)_0$ de $\xi + x$ pour tout x dans un ouvert non vide de $\mathfrak{g}(\eta)'_0$.*

Démonstration. — (i) Puisque ξ appartient au centre de $\mathfrak{g}(\xi)$, ξ centralise $\mathfrak{s}$ car $\mathfrak{s}$ est contenu dans $\mathfrak{g}(\xi)$; donc $\mathfrak{a}$ contient ξ. Puisque $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre réductive dans $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ est somme directe de son algèbre dérivée $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ et du centre $\mathfrak{z}_\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{a}$. En outre, tout élément de $\mathfrak{z}_\mathfrak{a}$ est semi-simple ; donc $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ contient ξ car ξ est nilpotent.

(ii) Le sous-espace $[\mathfrak{s}, \mathfrak{g}]$ de $\mathfrak{g}$ est somme directe des sous-espaces propres de l'action adjointe de $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{g}$ qui ne sont pas contenus dans $\mathfrak{a}$. Puisque $\mathfrak{g}(\xi)$ contient $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{g}(\xi)$ est stable par l'action adjointe de $\mathfrak{s}$; donc $\mathfrak{g}(\xi)$ est somme directe de $\mathfrak{g}(\xi)_0$ et de $\mathfrak{g}(\xi)_+$.

(iii) Soit v' une forme linéaire fortement régulière sur $\mathfrak{g}(\xi)$ pour laquelle $\mathfrak{s}$ est le plus grand tore de $\mathfrak{g}(\xi)(v')$. Puisque $\mathfrak{g}(\xi)(v')$ est une sous-algèbre commutative, $\mathfrak{g}(\xi)(v')$ est contenu dans $\mathfrak{g}(\xi)_0$. En outre, v' est nul sur $\mathfrak{g}(\xi)_+$ car $\mathfrak{g}(\xi)_+$ est égal à $[\mathfrak{s}, \mathfrak{g}(\xi)]$. Si ν est un élément de $\mathfrak{g}(\xi)_0$ qui stabilise la restriction de v' à $\mathfrak{g}(\xi)_0$, il appartient à $\mathfrak{g}(\xi)(v')$ car $\mathfrak{g}(\xi)_+$ contient $[\mathfrak{g}(\xi)_0, \mathfrak{g}(\xi)_+]$; donc $\mathfrak{g}(\xi)(v')$ est le stabilisateur dans $\mathfrak{g}(\xi)_0$ de la restriction de v' à $\mathfrak{g}(\xi)_0$. Par suite, l'indice de $\mathfrak{g}(\xi)_0$ est inférieur à l'indice de $\mathfrak{g}(\xi)$. Soient $\nu_1, \dots, \nu_m$ une base de $\mathfrak{g}(\xi)_+$ et p l'élément de $\mathrm{S}(\mathfrak{g}(\xi))$

$$\det \begin{pmatrix} [\nu_1, \nu_1] & \cdots & [\nu_1, \nu_m] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\nu_m, \nu_1] & \cdots & [\nu_m, \nu_m] \end{pmatrix}.$$

Si v' est un zéro de p, il existe un élément non nul ν de $\mathfrak{g}(\xi)_+$ qui satisfait les égalités

$$\langle v', [\nu, \nu_1] \rangle = \cdots = \langle v', [\nu, \nu_m] \rangle = 0.$$

Cet élément ν appartient à $\mathfrak{g}(\xi)(v')$ car $\mathfrak{g}(\xi)_+$ contient $[\nu, \mathfrak{g}(\xi)_0]$; donc p n'est pas nul en v'. Identifiant le dual de $\mathfrak{g}(\xi)_0$ à l'orthogonal de $\mathfrak{g}(\xi)_+$ dans $\mathfrak{g}(\xi)^*$, il en résulte que $\mathfrak{g}(\xi)_0^*$ n'est pas contenu dans la variété des zéros de p ; il existe donc une forme linéaire régulière w' sur $\mathfrak{g}(\xi)_0$ qui n'est pas un zéro de p. Alors $\mathfrak{s}$ stabilise w' et $\mathfrak{g}(\xi)(w')$ est contenu dans $\mathfrak{g}(\xi)_0$; donc $\mathfrak{g}(\xi)(w')$ est le stabilisateur de la forme linéaire w' sur $\mathfrak{g}(\xi)_0$ car w' est nul sur $[\mathfrak{g}(\xi)_0, \mathfrak{g}(\xi)_+]$. Il en résulte que l'indice de $\mathfrak{g}(\xi)$ est inférieur à l'indice de $\mathfrak{g}(\xi)_0$, d'où l'assertion.

(iv) Par définition, $\mathfrak{s}$ est contenu dans le centre $\mathfrak{z}_{\mathfrak{a}}$ de $\mathfrak{a}$. Si ν est un élément de $\mathfrak{z}_{\mathfrak{a}}$, ν est un élément semi-simple du centre de $\mathfrak{g}(\xi)_0$; donc ν appartient au stabilisateur de la restriction de v' à $\mathfrak{g}(\xi)_0$. Puisque $\mathfrak{s}$ est le plus grand tore de $\mathfrak{g}(\xi)(v')$, $\mathfrak{s}$ contient ν car d'après (iii), $\mathfrak{g}(\xi)(v')$ est le stabilisateur de la restriction de v' à $\mathfrak{g}(\xi)_0$, d'où l'assertion.

(v) D'après l'assertion (i), $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ contient ξ ; donc on peut trouver un $\mathfrak{sl}_2$-triplet ξ, ρ, η dans $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$. Pour tout x dans $\mathfrak{g}(\eta)'_0$, $\mathfrak{s}$ centralise $\xi + x$. En outre, d'après l'assertion (iv), le centralisateur de $\xi + x$ dans $\mathfrak{g}(\xi)_0$ est la somme de $\mathfrak{s}$ et du centralisateur de $\xi + x$ dans l'intersection $\mathfrak{g}(\xi)'_0$ de $\mathfrak{g}(\xi)_0$ et de $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$. Pour tout x dans $\mathfrak{g}(\eta)'_0$, le centralisateur de x dans $\mathfrak{g}(\xi)'_0$ est égal au centralisateur de $\xi + x$ dans $\mathfrak{g}(\xi)'_0$. D'après le lemme 5.6, $\mathfrak{g}(\eta)'_0$ est isomorphe au dual de $\mathfrak{g}(\xi)'_0$ et pour tout x dans $\mathfrak{g}(\eta)'_0$, le centralisateur de x dans $\mathfrak{g}(\xi)'_0$ est contenu dans le stabilisateur dans $\mathfrak{g}(\xi)'_0$, pour l'action coadjointe de $\mathfrak{g}(\xi)'_0$, de l'image de x par cet isomorphisme. Puisque l'intersection de $\mathfrak{s}$ et de $\mathfrak{g}(\xi)'_0$ est nulle, pour tout x dans un ouvert non vide de $\mathfrak{g}(\eta)'_0$, le centralisateur de $\xi + x$ dans $\mathfrak{g}(\xi)'_0$ ne contient pas d'élément semi-simple non nul ; or d'après le corollaire 5.7, pour tout x dans un ouvert non vide de $\mathfrak{g}(\eta)'_0$, $\xi + x$ est un élément semi-simple régulier de $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$; donc pour tout x dans un ouvert non vide de $\mathfrak{g}(\eta)'_0$, le centralisateur de $\xi + x$ dans $\mathfrak{g}(\xi)'_0$ est nul, d'où l'assertion. □

Démonstration. — On revient à la démonstration du théorème 5.5. On traite ici le cas où la sous-algèbre $\mathfrak{s}$ est non nulle. D'après l'assertion (iii) du lemme 5.8, l'indice de $\mathfrak{g}(\xi)$ est égal à l'indice de l'intersection $\mathfrak{g}(\xi)_0$ de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{g}(\xi)$; or $\mathfrak{g}(\xi)_0$ est le centralisateur de ξ dans $\mathfrak{a}$ et $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ est de dimension strictement inférieure à la dimension de $\mathfrak{g}$ car $\mathfrak{s}$ est non nul ; donc d'après l'hypothèse de récurrence pour $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$, le rang de $\mathfrak{g}$ est égal à l'indice de $\mathfrak{g}(\xi)$ car $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{g}$ ont même rang. □

Dans la suite de cette section, on supposera que ξ est un élément nilpotent non régulier qui satisfait la condition suivante : le stabilisateur dans $\mathfrak{g}(\xi)$ d'une forme linéaire régulière sur $\mathfrak{g}(\xi)$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ dont les éléments sont nilpotents.

5.5. Soient W un ouvert affine de $\xi + \mathfrak{g}(\eta)$ qui contient ξ et qui satisfait la condition du corollaire 5.7, π la restriction de π_ξ à $G \times W$, U l'image de π, $\mathfrak{C}$ la sous-variété des points (x, ν) de $U \times \mathfrak{g}$ pour lesquels $\mathfrak{g}(x)$ contient ν et $\mathfrak{D}$ l'image réciproque de $\mathfrak{C}$ par l'application $\pi \times \mathrm{id}_\mathfrak{g}$ où $\mathrm{id}_\mathfrak{g}$ désigne le morphisme identité de la variété $\mathfrak{g}$. On note $\mathcal{I}$ l'idéal de définition de $\mathfrak{C}$ dans $\mathcal{O}_{U\times\mathfrak{g}}$ et $\mathcal{J}$ l'idéal de définition de $\mathfrak{D}$ dans $\mathcal{O}_{G\times W\times\mathfrak{g}}$.

LEMME 5.9. — *Soit M le module des applications régulières φ de $G\times W$ dans $\mathfrak{g}$ qui satisfont la condition suivante : pour tout (g, x) dans $G \times W$, $[g(x), \mathfrak{g}]$ contient $\varphi(g, x)$. Soit R le module des applications régulières φ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ qui satisfont la condition suivante : pour tout x dans $\mathfrak{g}$, $[x, \mathfrak{g}]$ contient $\varphi(x)$. On note $\mathcal{M}$ la localisation de M sur $G\times W$ et $\mathcal{R}$ la restriction à U de la localisation de R sur $\mathfrak{g}$.*

(i) *Les idéaux $\mathcal{J}$ et $(\pi \times \mathrm{id}_\mathfrak{g})^*(\mathcal{I})$ de $\mathcal{O}_{G\times W\times\mathfrak{g}}$ sont égaux.*

(ii) *Les sous-modules $\pi^*(\mathcal{R})$ et $\mathcal{M}$ de $\mathcal{O}_{G\times W} \otimes_\mathbb{C} \mathfrak{g}$ sont égaux.*

Démonstration. — (i) Puisque π est un morphisme plat, $\pi \times \mathrm{id}_\mathfrak{g}$ est un morphisme plat ; donc de la suite exacte de $\mathcal{O}_{U\times\mathfrak{g}}$-modules

$$0 \to \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{O}_{U\times\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathcal{O}_\mathfrak{C} \to 0,$$

on tire la suite exacte de $\mathcal{O}_{G\times W\times\mathfrak{g}}$-modules

$$0 \to (\pi \times \mathrm{id}_\mathfrak{g})^*(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{O}_{G\times W\times\mathfrak{g}} \longrightarrow (\pi \times \mathrm{id}_\mathfrak{g})^*(\mathcal{O}_\mathfrak{C}) \to 0.$$

Puisque la fonction constante 1 sur $\mathfrak{D}$ est section globale de $(\pi \times \mathrm{id}_\mathfrak{g})^*(\mathcal{O}_\mathfrak{C})$, $\mathcal{J}$ est contenu dans le noyau du morphisme

$$\mathcal{O}_{G\times W\times\mathfrak{g}} \longrightarrow (\pi \times \mathrm{id}_\mathfrak{g})^*(\mathcal{O}_\mathfrak{C}) ;$$

donc $\mathcal{J}$ est égal à $(\pi \times \mathrm{id}_\mathfrak{g})^*(\mathcal{I})$ car celui-ci est contenu dans $\mathcal{J}$.

(ii) Soient x un point de U, y un point de la fibre de π en x et $v_1,\ldots,v_n$ une base de $\mathfrak{g}$. On note $\mathcal{R}_x$ la fibre de $\mathcal{R}$ en x, $\mathcal{M}_y$ la fibre de $\mathcal{M}$ en y, $\mathcal{I}_{(x,0)}$ la fibre de $\mathcal{I}$ en $(x,0)$ et $\mathcal{J}_{(y,0)}$ la fibre de $\mathcal{J}$ en $(y,0)$. Identifiant $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{g}^*$ au moyen de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, $\mathcal{O}_{U,x} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ est égal au sous-espace des éléments homogènes de degré 1 en $v_1,\ldots,v_n$ de $\mathcal{O}_{U\times\mathfrak{g},(x,0)}$.

Puisque l'idéal de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ engendré par $[x,\mathfrak{g}]$ est l'idéal de définition dans $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ de l'ensemble des points de $\mathfrak{C}$ au-dessus du point x de U, $\mathcal{R}_x$ est égal au sous-espace des éléments de $\mathcal{I}_{(x,0)}$ qui sont homogènes de degré 1 en $v_1,\ldots,v_n$. En outre, $\mathcal{I}_{(x,0)}$ est contenu dans l'idéal de $\mathcal{O}_{U\times\mathfrak{g},(x,0)}$ engendré par $v_1,\ldots,v_n$. De même, $\mathcal{M}_y$ est égal au sous-espace des éléments de $\mathcal{J}_{(y,0)}$ qui sont homogènes de degré 1 en $v_1,\ldots,v_n$ et $\mathcal{J}_{(y,0)}$ est contenu dans l'idéal de $\mathcal{O}_{G\times W\times\mathfrak{g},(x,0)}$ engendré par $v_1,\ldots,v_n$. En outre, le sous-espace des éléments homogènes de degré 1 en $v_1,\ldots,v_n$ de $(\pi\times\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^*(\mathcal{I})_{(y,0)}$ est le sous-$\mathcal{O}_{G\times W,y}$-module engendré par les éléments $\varphi\circ\pi$ où φ est dans $\mathcal{R}_x$; donc $\mathcal{M}_y$ est égal à $\pi^*(\mathcal{R})_y$ d'après l'assertion (i). Vu l'arbitraire de x et de y, $\mathcal{M}$ et $\pi^*(\mathcal{R})$ sont égaux. □

Corollaire 5.10. — *Soit θ_0 l'endomorphisme du $\mathbb{C}[W]$-module $\mathbb{C}[W]\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$,*

$$\varphi \longmapsto \big(x\mapsto [x,\varphi(x)]\big).$$

Alors l'image de θ_0 est égale au module des applications régulières φ de W dans $\mathfrak{g}$ qui satisfont la condition suivante : $[x,\mathfrak{g}]$ contient $\varphi(x)$, pour tout x dans W.

Démonstration. — On note N_0 l'image de θ_0 et M_0 le module des applications régulières φ de W dans $\mathfrak{g}$ qui satisfont la condition suivante : pour tout x dans W, $[x,\mathfrak{g}]$ contient $\varphi(x)$. Soient θ l'endomorphisme du $\mathbb{C}[G\times W]$-module $\mathbb{C}[G\times W]\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$,

$$\varphi \longmapsto \big((g,x)\mapsto [g(x),\varphi(g,x)]\big),$$

et N son image. Le module M est l'image de $\mathbb{C}[G]\otimes_{\mathbb{C}} M_0$ par l'automorphisme α du $\mathbb{C}[G\times W]$-module $\mathbb{C}[G\times W]\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$,

$$\varphi \longmapsto \big((g,x)\mapsto g\circ\varphi(g,x)\big).$$

En outre, N est l'image de $\mathbb{C}[G]\otimes_{\mathbb{C}} N_0$ par α ; donc il suffit de montrer l'égalité de M et de N car M_0 et N_0 s'identifient canoniquement respectivement aux sous-espaces des éléments de $\mathbb{C}[G]\otimes_{\mathbb{C}} M_0$ et de $\mathbb{C}[G]\otimes_{\mathbb{C}} N_0$ dont la valeur en (g,x) ne dépend pas de g. Puisque $G\times W$ est une variété affine, il suffit de montrer que $\mathcal{M}$ est la localisation de N sur $G\times W$.

D'après [2], R est l'image de l'endomorphisme $\tilde\theta$ du $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$-module $\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$,

$$\psi \longmapsto \big(x\mapsto [x,\psi(x)]\big).$$

Soient K le noyau de $\tilde\theta$ et $\mathcal{K}$ la restriction à U de la localisation sur $\mathfrak{g}$ de K. Pour tout φ dans $\mathrm{S}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$, l'image de $\varphi\circ\pi$ par θ est égale à $\tilde\theta(\varphi')\circ\pi$ où φ'

désigne la restriction de φ à U. De la suite exacte courte de $\mathcal{O}_U$-modules

$$0 \to \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{O}_U \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} \xrightarrow{\tilde{\theta}} \mathcal{R} \to 0,$$

on déduit alors la suite exacte courte de $\mathcal{O}_{G\times W}$-modules

$$0 \to \pi^*(\mathcal{K}) \longrightarrow \mathcal{O}_{G\times W} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} \xrightarrow{\theta} \pi^*(\mathcal{R}) \to 0,$$

car $\mathcal{O}_{G\times W}$ est un $\mathcal{O}_U$-module plat ; donc $\pi^*(\mathcal{R})$ est la localisation sur $G\times W$ de N. Il résulte alors de l'assertion (ii) du lemme 5.9 que $\mathcal{M}$ est la localisation de N sur $G\times W$. $\square$

5.6. On note X l'éclatement en ξ de W, σ le morphisme d'éclatement et μ l'application régulière de X dans l'espace des endomorphismes linéaires de $\mathfrak{g}$ qui au point x associe l'endomorphisme $\operatorname{ad}\sigma(x)$. On utilise alors les notations $x\cdot E$, $E(x)$, i_μ en prenant pour espaces E et F l'espace $\mathfrak{g}$. L'ouvert X_{r} est l'ensemble des points x de X pour lesquels $E(x)$ est de dimension i_μ et X_* est le plus grand ouvert de X auquel l'application $x\mapsto E(x)$ de X_{r} dans $\mathrm{Gr}_{\mathrm{i}_\mu}(E)$ a un prolongement régulier noté α_μ. D'après le corollaire 5.7, l'image de σ rencontre l'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{g}$; donc i_μ est égal au rang de $\mathfrak{g}$ et $\sigma(x)$ est un élément régulier de $\mathfrak{g}$ pour tout x dans X_{r}. En particulier, $\sigma^{-1}(\{\xi\})$ est une hypersurface de X, contenue dans $X\backslash X_{\mathrm{r}}$ car ξ n'est pas un élément régulier de $\mathfrak{g}$. D'après l'assertion (i) du lemme 2.3, il existe un ouvert affine Y de X qui rencontre $\sigma^{-1}(\{\xi\})$ et qui satisfait les conditions suivantes :

1) Y est contenu dans X_*,
2) $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$ est une hypersurface lisse, irréductible, contenue dans $\sigma^{-1}(\{\xi\})$ et dont l'idéal de définition dans $\mathbb{C}[Y]$ est engendré par un élément q,
3) il existe un sous-espace $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ qui est un supplémentaire de $\alpha_\mu(x)$ dans $\mathfrak{g}$ pour tout x dans Y et qui contient un supplémentaire $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}(\xi)$ dans $\mathfrak{g}$.

On désigne par $\mathfrak{m}(\xi)$ l'intersection de $\mathfrak{g}(\xi)$ et de $\mathfrak{m}$, par θ l'endomorphisme de $\mathbb{C}[Y]\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$ qui à l'élément ψ associe l'application $x\mapsto \mu(x)(\psi(x))$ et par θ_x l'extension de θ à $\mathcal{O}_{Y,x}\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$ pour tout point x de Y.

LEMME 5.11. — *Soient Y un ouvert affine de X qui satisfait les conditions* 1), 2), 3) *ci-dessus et $v_1,\dots,v_s$ une base de $\mathfrak{m}(\xi)$.*

(i) *Pour tout x dans $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$, $\mathfrak{g}(\xi)$ est somme directe de $\alpha_\mu(x)$ et de $\mathfrak{m}(\xi)$.*

(ii) *Pour $i=1,\dots,s$, il existe une application régulière ν_i de Y dans $\mathfrak{g}$ qui satisfait l'égalité $\mu(x)(v_i)=q(x)\nu_i(x)$, pour tout x dans Y.*

(iii) *Pour tout x dans un ouvert non vide de $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$, l'ensemble des éléments $\nu_1(x),\dots,\nu_s(x)$ est une partie libre de $\mathfrak{g}$.*

(iv) *Soit φ une application régulière de Y dans $\mathfrak{g}$ qui est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{C}[Y]$ des applications $\nu_1,\dots,\nu_s$ et pour laquelle $\mu(x)(\mathfrak{g}(\xi))$*

contient $\varphi(x)$ pour tout x dans Y. Alors il existe une application régulière ψ de Y dans $\mathfrak{g}(\xi)$ qui satisfait l'égalité $\varphi(x) = \mu(x)(\psi(x))$, pour tout x dans Y.

(v) *Soit M le sous-module des éléments φ de $\mathbb{C}[Y] \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ pour lesquels $x \cdot E$ contient $\varphi(x)$ pour tout x dans Y. Alors M est l'image de θ.*

Démonstration. — On fixe une base $e_1, \dots, e_n$ de $\mathfrak{g}(\eta)$ et on note $x_1, \dots, x_n$ la base duale. Pour $i = 1, \dots, n$, on désigne aussi par x_i la forme affine sur $\xi + \mathfrak{g}(\eta)$ dont la valeur au point $\xi + x$ de $\xi + \mathfrak{g}(\eta)$ est la valeur de x_i en x.

(i) Soit x dans $Y \backslash X_{\mathrm{r}}$. Puisque $\mu(x)$ est égal à $\mathrm{ad}\, \xi$, $\mathfrak{g}(\xi)$ contient $\alpha_\mu(x)$; or d'après la condition 3), $\mathfrak{m}$ est un supplémentaire de $\alpha_\mu(x)$ dans $\mathfrak{g}$; donc $\mathfrak{g}(\xi)$ est somme directe de $\alpha_\mu(x)$ et de $\mathfrak{m}(\xi)$.

(ii) Soit $i = 1, \dots, s$. L'application $x \mapsto \mu(x)(v_i)$ de Y dans $\mathfrak{g}$ est nulle en tout point de $Y \backslash X_{\mathrm{r}}$ car $Y \backslash X_{\mathrm{r}}$ est inclus dans $\sigma^{-1}(\{\xi\})$ et $\mathfrak{g}(\xi)$ contient v_i. L'assertion résulte alors de ce que q engendre l'idéal de définition de $Y \backslash X_{\mathrm{r}}$ dans $\mathbb{C}[Y]$.

(iii) On suppose l'assertion fausse. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. Il existe des fonctions régulières non toutes nulles, $a_1, \dots, a_s$ sur $Y \backslash X_{\mathrm{r}}$, qui satisfont l'égalité
$$a_1(x)\nu_1(x) + \cdots + a_s(x)\nu_s(x) = 0,$$
pour tout x dans $Y \backslash X_{\mathrm{r}}$. Soit x un point de $Y \backslash X_{\mathrm{r}}$. Quitte à changer de base $e_1, \dots, e_n$, on peut supposer que l'ensemble des fonctions
$$y_1 = x_1,\ y_2 = \frac{x_2}{x_1}, \dots,\ y_n = \frac{x_n}{x_1}$$
est un système de coordonnées de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ de X en x. Puisque x_1 engendre l'idéal de définition de $\sigma^{-1}(\{\xi\})$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$, la fonction q/x_1 est un élément inversible de $\mathcal{O}_{X,x}$ d'après la condition 2) ci-dessus. L'égalité ci-dessus revient à dire qu'il existe des polynômes $p_1, \dots, p_s$ en $n-1$ indéterminées, non tous nuls, qui satisfont l'égalité
$$\begin{aligned} &p_1(y_2, \dots, y_n)[v_1, e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n] \\ &\qquad + \cdots + p_s(y_2, \dots, y_n)[v_s, e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n] = 0. \end{aligned}$$
Désignant par d le plus grand des degrés des polynômes $p_1, \dots, p_s$ et par χ la fonction polynomiale sur $\mathfrak{g}$,
$$x_1^d p_1\Big(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\Big) v_1 + \cdots + x_1^d p_s\Big(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\Big) v_s,$$
$\chi(x)$ centralise x pour tout x dans $\mathfrak{g}(\eta)$; or d'après l'assertion (v) du lemme 5.8, pour tout x dans un ouvert non vide de $\mathfrak{g}(\eta)$, le centralisateur de x dans $\mathfrak{g}(\xi)$ est nul car d'après l'hypothèse du lemme sur ξ, $\mathfrak{s}$ est nul et $\mathfrak{g}(\eta)'_0$ est égal à $\mathfrak{g}(\eta)$; donc χ est nul. Ceci est absurde car les polynômes $p_1, \dots, p_s$ ne sont pas tous nuls.

(iv) Soit Y_{r} l'intersection de Y et de X_{r}. Il existe une unique application régulière ψ de Y_{r} dans $\mathfrak{m}$ dont l'image par θ est la restriction de φ à Y_{r}.

Par hypothèse, il existe des éléments $a_1,\dots,a_s$ de $\mathbb{C}[Y]$ qui satisfont l'égalité $\varphi = a_1\nu_1 + \cdots + a_s\nu_s$. Comme φ est nul sur $Y\backslash X_{\mathrm{r}}$, q divise $a_1,\dots,a_s$ dans $\mathbb{C}[Y]$ d'après l'assertion (iii). Désignant par $b_1,\dots,b_s$ les quotients respectifs de $a_1,\dots,a_s$ par q, on a

$$\varphi(x) = b_1(x)\mu(x)(v_1) + \cdots + b_s(x)\mu(x)(v_s),$$

pour tout x dans Y d'après l'assertion (ii) ; donc ψ est une application régulière en tout point x où $\nu_1(x),\dots,\nu_s(x)$ sont linéairement indépendants. D'après l'assertion (iii), l'ensemble de ces points est un grand ouvert de Y ; donc ψ est une application régulière de Y dans $\mathfrak{g}(\xi)$ car Y est une variété normale, d'où l'assertion.

(v) Soient N l'image de θ, $\mathcal{M}_x$ et $\mathcal{N}_x$ les localisés au point x de Y des modules M et N. Puisque Y est un ouvert affine, il s'agit de montrer que pour tout x dans Y, $\mathcal{M}_x$ est égal à $\mathcal{N}_x$. Si x n'appartient pas à $\sigma^{-1}(\{\xi\})$, $\mathcal{M}_x$ est égal à $\mathcal{N}_x$ d'après le corollaire 5.10 car la restriction de σ à $Y\backslash\sigma^{-1}(\{\xi\})$ est un isomorphisme de $Y\backslash\sigma^{-1}(\{\xi\})$ sur un ouvert de W. Il suffit alors de montrer l'égalité de $\mathcal{M}_x$ et de $\mathcal{N}_x$ pour x dans $\sigma^{-1}(\{\xi\})$.

Soit φ dans $\mathcal{M}_x$. Identifiant l'anneau local $\mathcal{O}_{W,\xi}$ de W en ξ à un sous-anneau de $\mathcal{O}_{X,x}$ au moyen du comorphisme de σ, $\mathcal{O}_{W,\xi}\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$ contient $q^d\varphi$ pour d assez grand ; donc d'après le corollaire 5.10, pour d assez grand, $q^d\varphi$ appartient à l'image de θ_x. Un raisonnement par récurrence sur l'entier d montre alors qu'il suffit de montrer que $\mathcal{N}_x$ contient φ s'il contient $q\varphi$. Dans ce qui suit, on suppose que $q\varphi$ appartient à $\mathcal{N}_x$. Puisque $\mathfrak{g}$ est somme directe de $\mathfrak{m}$ et de $\alpha_\mu(y)$ pour tout y dans Y, $q\varphi$ est l'image par θ_x d'un élément ψ de $\mathcal{O}_{X,x}\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{m}$. On désigne par ψ_1 et ψ_2 les composantes de ψ relatives à la décomposition

$$\mathcal{O}_{X,x}\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{m} = \mathcal{O}_{X,x}\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{p}\oplus\mathcal{O}_{X,x}\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{m}(\xi).$$

Alors l'image de ψ_2 par θ est divisible par q dans $\mathcal{O}_{X,x}\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$; donc l'image de ψ_1 par θ est divisible par q. Il en résulte que ψ_1 est le produit de q et d'un élément ψ'_1 de $\mathcal{O}_{X,x}\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{p}$ car l'intersection de $\mathfrak{p}$ et de $\mathfrak{g}(\xi)$ est nulle. Par suite, $\varphi-\theta(\psi'_1)$ est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathcal{O}_{X,x}$ des applications $\nu_1,\dots,\nu_s$; donc d'après l'assertion (iv), $\mathcal{N}_x$ contient $\varphi-\theta(\psi'_1)$ et φ, d'où l'assertion. □

Fin de la démonstration du théorème 5.5. — La restriction de μ à Y possède la propriété (**P**) de la définition 2.2 d'après l'assertion (v) du lemme 5.11. Puisque σ est le morphisme d'éclatement de W centré en ξ, σ est un morphisme dominant, les fibres de σ sont irréductibles et l'espace tangent à W en un point x de W est la réunion des images des applications linéaires tangentes à σ en les points de la fibre de σ en x ; or μ est la composée de σ et de l'isomorphisme linéaire $x\mapsto \operatorname{ad} x$; donc le morphisme μ a les propriétés 1) et 2) du théorème 3.3. Il résulte alors de ce théorème que μ a la propriété (**R**) en tout point d'un grand ouvert de Y. Puisque l'intersection de Y et de $\sigma^{-1}(\{\xi\})$ est une hypersurface de Y, μ a la propriété (**R**) en un point de Y au-dessus de ξ ; donc $\mathfrak{g}$ a la propriété (**C**) en ξ au sens de la définition 5.1. Les modules adjoint et coadjoint de $\mathfrak{g}$ sont isomorphes car $\mathfrak{g}$ est semi-simple ; donc d'après la proposition 5.2, l'indice de $\mathfrak{g}(\xi)$ est égal au rang de $\mathfrak{g}$. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNAT (P.) et al. – *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Monographies de la Société Mathématique de France, vol. 4, Dunod, 1972.

[2] DIXMIER (J.) – *Champs de vecteurs adjoints sur les groupes et algèbres de Lie semi-simples*, J. reine angew. Math., t. **309** (1979), pp. 178–190.

[3] PANYUSHEV (D.I.) – *The index of a Lie algebra, the centraliser of a nilpotent element, and the normaliser of the centraliser*, `arXiv:math.AG/0107031`, 2001.

[4] RICHARDSON (R.W.) – *Commuting varieties of semisimple Lie algebras and algebraic groups*, Compositio Math., t. **38** (1979), pp. 311–322.

[5] SHAFAREVICH (I.R.) – *Basic Algebraic Geometry 2*, Springer-Verlag, 1994.

[6] SLODOWY (P.) – *Simple singularities and simple algebraic groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 815, Springer-Verlag, 1980.

[7] TAUVEL (P.) – *Sur les éléments réguliers dans les algèbres de Lie réductives*, Bull. Sci. Math., t. **113** (1989), pp. 51–83.