

CAHIERS DU BURO

A. M. DECAILLOT

Normes équivalentes pour l'espace des martingales bornées dans un espace d'Orlicz

*Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle.
Série Recherche, tome 24 (1976), p. 55-64*

http://www.numdam.org/item?id=BURO_1976__24__55_0

© Institut Henri Poincaré — Institut de statistique de l'université de Paris, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NORMES ÉQUIVALENTES POUR L'ESPACE DES MARTINGALES BORNÉES DANS UN ESPACE D'ORLICZ

A. M. DECAILLOT

On considère un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) et un couple (Φ, Ψ) de fonctions de Young conjuguées(*). On désigne par φ [resp. ψ] la dérivée à gauche de Φ (resp. Ψ) :

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s) ds \quad \left[\text{resp } \Psi(t) = \int_0^t \psi(s) ds \right]$$

On rappelle les inégalités classiques :

$$\forall u \geq 0 \quad \forall v \geq 0 \quad uv \leq \Phi(u) + \Psi(v) \quad (1)$$

$$\forall u \geq 0 \quad u\varphi(u) = \Phi(u) + \Psi[\varphi(u)] \quad (2)$$

On dira par la suite que la fonction Φ (resp. Ψ) est "à croissance modérée" si elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes :

$$\sup_{t>0} \frac{\Phi(2t)}{\Phi(t)} = A < \infty \Leftrightarrow \sup_{t>0} \frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)} = \alpha < \infty \quad (3)$$

$$\left[\text{resp. } \sup_{t>0} \frac{\Psi(2t)}{\Psi(t)} = B < \infty \Leftrightarrow \sup_{t>0} \frac{t\psi(t)}{\Psi(t)} = \beta < \infty \right] \quad (4)$$

L'espace $L^\Phi(\Omega, \mathcal{A}, P)$ des classes d'équivalence de v.a. réelles X définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) pour lesquelles il existe au moins un réel $a > 0$ tel que

$$E \left[\Phi \left(\frac{|X|}{a} \right) \right] \leq 1$$

est un sous-espace vectoriel de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ noté L^Φ .

(*) Pour l'utilisation des fonctions de Young en probabilité, on pourra consulter [1]

En outre la formule

$$\|X\|_{\Phi} = \inf \left\{ a : a > 0, E \left[\Phi \left(\frac{|X|}{a} \right) \right] \leq 1 \right\}$$

définit une norme sur L^{Φ} . L'espace vectoriel L^{Φ} est complet et cet espace de Banach est appelé un *espace d'Orlicz*. (On a des définitions analogues pour L^{Ψ} et $\|\cdot\|_{\Psi}$).

Il n'est pas difficile d'établir que, pour toute sous-tribu \mathcal{B} de l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) , $E^{\mathcal{B}}(X) \in L^{\Phi}$ dès que $X \in L^{\Phi}$ et que

$$\|E^{\mathcal{B}}(X)\|_{\Phi} \leq \|X\|_{\Phi} \quad (5)$$

D'autre part si Φ est à croissance modérée, l'espace L^{Φ} coïncide avec l'ensemble des classes d'équivalence de v.a.r. X telles que $E(\Phi |X|) < \infty$.

NB On peut étendre la définition de $\|X\|_{\Phi}$ à toute v.a.r. X en posant $\|X\|_{\Phi} = +\infty$ s'il n'existe aucun réel $a > 0$ tel que $E \left[\Phi \left(\frac{|X|}{a} \right) \right] \leq 1$.

On vérifie immédiatement que, si X et Y sont deux v.a.r. telles que $|X| \leq |Y|$, on a

$$\|X\|_{\Phi} \leq \|Y\|_{\Phi}$$

...

Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de v.a.r. définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On désigne par $V_{(X)}$ la variation quadratique de cette suite soit :

$$V_{(X)} = X_0^2 + \sum_{\mathbb{N}} (X_{i+1} - X_i)^2$$

On notera par la suite $V_n(X) = X_0^2 + \sum_{0 \leq i < n} (X_{i+1} - X_i)^2$ et $X^* = \sup_{\mathbb{N}} |X_n|$.

Un résultat classique, dont la démonstration peut être trouvée en [II], nous indique que si $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est une martingale définie sur

$$[\Omega, \mathcal{A}, P ; (B_n, n \in \mathbb{N})]$$

et si Φ est une fonction de Young à croissance modérée, il existe deux constantes c et $C > 0$ ne dépendant que de Φ telles que

$$c E(\Phi[V_{(X)}^{1/2}]) \leq E[\Phi(X^*)] \leq C E[\Phi(V_{(X)}^{1/2})] \quad (6)$$

Définition – On dira qu'une suite de v.a.r $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est *bornée dans L^Φ* si

$$\sup_{\mathbb{N}} \|X_n\|_\Phi < \infty$$

On se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème – Soit (Φ, Ψ) un couple de fonctions de Young conjuguées à croissance modérée.

Pour toute martingale $(X_n, n \in \mathbb{N})$ définie sur $[\Omega, \mathcal{A}, P, (B_n, n \in \mathbb{N})]$ on a les équivalences

$$\sup_{\mathbb{N}} \|X_n\|_\Phi < \infty \Leftrightarrow V_{(X)}^{1/2} \in L^\Phi \Leftrightarrow X^* = \sup_{\mathbb{N}} |X_n| \in L^\Phi$$

Dans l'un ou l'autre de ces cas, il existe des constantes α, β, γ ne dépendant que des fonctions Φ et Ψ telles que

$$\alpha \|V_{(X)}^{1/2}\|_\Phi \stackrel{(i)}{\leq} \|X^*\|_\Phi \stackrel{(ii)}{\leq} \beta \|V_{(X)}^{1/2}\|_\Phi \quad \|X^*\|_\Phi \stackrel{(iii)}{\leq} \gamma \sup_{\mathbb{N}} \|X_n\|_\Phi$$

NB 1) L'équivalence $V_{(X)}^{1/2} \in L^\Phi \Leftrightarrow X^* \in L^\Phi$ est évidente, puisque d'après (6) :

$$E[\Phi[V_{(X)}^{1/2}]] < \infty \Leftrightarrow E[\Phi(X^*)] < \infty$$

2) Il est évident aussi que $X^* \in L^\Phi \Rightarrow \sup_{\mathbb{N}} \|X_n\|_\Phi < \infty$ car

$$|X_n| \leq \sup_{\mathbb{N}} |X_n| \Rightarrow \sup_{\mathbb{N}} \|X_n\|_\Phi \leq \|\sup_{\mathbb{N}} |X_n|\|_\Phi.$$

3) Appliquons l'inégalité (1) avec $u = t, v = 2\varphi(t)$:

$$\Psi[2\varphi(t)] \geq 2t\varphi(t) - \Phi(t) \geq 2 \int_0^t \varphi(s) ds - \Phi(t) = \Phi(t)$$

Si Ψ est à croissance modérée, on en déduit d'après (4) :

$$\forall t \geq 0 \quad \Phi(t) \leq B\Psi[\varphi(t)] \quad (7)$$

Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une martingale bornée dans L^Φ . Dans [I] il est démontré que toute martingale bornée dans L^Φ est régulière, donc de la forme $X_n = E^{\mathcal{A}_n}(X_\infty)$, si l'on désigne par X_∞ la limite p.s. de X_n . De plus $X_\infty \in L^\Phi$ et le lemme de Fatou montre que

$$\|X_\infty\|_\Phi \leq \sup_{\mathbb{N}} \|X_n\|_\Phi \quad (8)$$

En outre, si l'on désigne par $\xi : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ la fonction croissante définie par [cf. (2)]: $\xi(u) = u\varphi(u) - \Phi(u) = \Psi[\varphi(u)]$, la v.a.r $X^* = \sup_N |X_n|$ vérifie

$$\forall \rho > 1 \quad E \left[\xi \left(\frac{X^*}{\rho \|X_\infty\|_\Phi} \right) \right] \leq \frac{1}{\rho - 1} \quad (9)$$

De (7) et (9) on déduit

$$\forall \rho > 1 \quad E \left[\Phi \left(\frac{X^*}{\rho \|X_\infty\|_\Phi} \right) \right] \leq \frac{B}{\rho - 1}$$

Il suffit de choisir $\rho = 1 + B$ pour prouver que $X^* \in L^\Phi$ et que d'après (8) :

$$\|X^*\|_\Phi \leq (1 + B) \|X_\infty\|_\Phi \leq (1 + B) \sup_N \|X_n\|_\Phi \quad (10)$$

Donc l'implication $\sup_N \|X_n\|_\Phi < \infty \Rightarrow X^* \in L^\Phi$ est démontrée, ainsi que l'inégalité (iii).

D'autre part $\|X_\infty\|_\Phi \leq \|X^*\|_\Phi$ car $\lim_{p.s.} |X_n| \leq \sup_N |X_n|$

En éliminant le cas trivial où $X^* = 0$, il vient :

$$\forall \rho > 1 \quad E \left[\Phi \left(\frac{X^*}{\rho \|X^*\|_\Phi} \right) \right] \leq \frac{B}{\rho - 1} \quad (11)$$

Puisque Φ est à croissance modérée, l'application de (6) à la martingale $(X'_n = \frac{X_n}{a}, n \in \mathbf{N})$ (a réel > 0 quelconque) permet d'écrire

$$\forall a > 0 \quad c E \left[\Phi \left(\frac{V_{(X)}^{1/2}}{a} \right) \right] \leq E \left[\Phi \left(\frac{X^*}{a} \right) \right] \quad (12)$$

En choisissant $\rho = 1 + \frac{B}{c}$, et $a = \rho \|X^*\|_\Phi$, on déduit de (11) et (12) :

$$E \left[\Phi \left(\frac{V_{(X)}^{1/2}}{\left(1 + \frac{B}{c}\right) \|X^*\|_\Phi} \right) \right] \leq \frac{1}{c} E \left[\Phi \left(\frac{X^*}{\left(1 + \frac{B}{c}\right) \|X^*\|_\Phi} \right) \right] \leq 1$$

ce qui prouve que $V_{(X)}^{1/2} \in L^\Phi$ et que

$$\|V_{(X)}^{1/2}\|_\Phi \leq \left(1 + \frac{B}{c}\right) \|X^*\|_\Phi \quad (13)$$

On a donc prouvé l'implication $\sup_N \|X_n\|_\Phi < \infty \Rightarrow V_{(X)}^{1/2} \in L^\Phi$ et l'inégalité (i).

Pour démontrer l'inégalité (ii), nous utiliserons un argument de dualité qui fait intervenir les résultats suivants⁽¹⁾ : pour tout couple de v.a.r $X \in L^\Phi$ et $Y \in L^\Psi$, la v.a.r XY est intégrable et vérifie

$$\|XY\|_{L^1} \leq 2 \|X\|_\Phi \|Y\|_\Psi \quad (14)$$

Le dual fort de l'espace d'Orlicz L^Φ muni de la norme $\|\cdot\|_\Phi$ est l'espace L^Ψ muni de la norme

$$\|Y\|'_\Psi = \sup_{X \neq 0} \frac{|E(XY)|}{\|X\|_\Phi} \quad (15)$$

Cette norme est équivalente à la norme $\|\cdot\|_\Psi$ car

$$\forall Y \in L^\Psi \quad \|Y\|_\Psi \leq \|Y\|'_\Psi \leq 2 \|Y\|_\Psi \quad (16)$$

On peut en déduire le lemme suivant :

Lemme. — Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite adaptée de v.a.r de L^Φ telle que, quelle que soit la martingale $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ bornée dans L^Ψ et quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$|E(X_n Y_n)| \leq D \sup_N \|Y_n\|_\Psi \quad (D > 0)$$

Alors la suite $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est bornée dans L^Φ et

$$\sup_N \|X_n\|_\Phi \leq D$$

Soit $Y \in L^\Psi$. Considérons la martingale $(Y_n = E^{\mathcal{A}_n}(Y), n \in \mathbb{N})$. D'après (5), elle est bornée dans L^Ψ et $\sup_N \|Y_n\|_\Psi \leq \|Y\|_\Psi$. X_n étant \mathcal{A}_n -mesurable, on a en utilisant les hypothèses du lemme

$$|E(X_n Y_n)| = |E(X_n Y)| \leq D \|Y\|_\Psi$$

Donc, d'après (15) et (16) :

$$\|X_n\|_\Phi \leq \|X_n\|'_\Phi = \sup_{Y \neq 0} \frac{|E(X_n Y)|}{\|Y\|_\Psi} \leq D$$

Donc $\sup_N \|X_n\|_\Phi \leq D$ ce qui démontre le lemme.

(*) Pour les démonstrations de toutes ces propriétés, on se référera à [1]

Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une martingale de L^Φ telle que $V_{(X)}^{1/2} \in L^\Phi$. Soit $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ une martingale bornée dans L^Ψ , donc telle que $V_{(Y)}^{1/2} \in L^\Psi$.

$$\begin{aligned} \text{Posons } \forall i \geq 1 \quad \Delta X_i &= X_i - X_{i-1} & \Delta Y_i &= Y_i - Y_{i-1} \\ \Delta X_0 &= X_0 & \Delta Y_0 &= Y_0 \end{aligned}$$

La propriété de martingale et l'inégalité de Schwarz permettent d'écrire

$$\begin{aligned} |E(X_n Y_n)| &= |E\left(\sum_{i=0}^n \Delta X_i \Delta Y_i\right)| \leq E[V_n^{1/2}(X) V_n^{1/2}(Y)] \\ &\leq E[V_{(X)}^{1/2} V_{(Y)}^{1/2}] \end{aligned}$$

De (14) il résulte :

$$|E(X_n Y_n)| \leq 2 \|V_{(X)}^{1/2}\|_\Phi \|V_{(Y)}^{1/2}\|_\Psi$$

Soit encore en appliquant (13) puis (10) à la martingale $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ bornée dans L^Ψ :

$$|E(X_n Y_n)| \leq \lambda \|V_X^{1/2}\|_\Phi \sup_N \|Y_n\|_\Psi$$

Le lemme démontré ci-dessus permet d'affirmer que la martingale $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est bornée dans L^Φ et que

$$\sup_N \|X_n\|_\Phi \leq \lambda \|V_{(X)}^{1/2}\|_\Phi$$

soit en utilisant (10)

$$\|X^*\|_\Phi \leq \beta \|V_{(X)}^{1/2}\|_\Phi$$

ce qui démontre l'inégalité (ii).

Par la suite, on sera amené à considérer certaines fonctions de Young Φ telles que la fonction $\Phi_1 = \Phi \circ \sqrt{\cdot}$ soit également une fonction de Young, c.à.d essentiellement soit convexe et telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \Phi_1(t) = +\infty$.

Dans ce cas il est immédiat de vérifier l'équivalence

$$|X|^{1/2} \in L^\Phi \Leftrightarrow X \in L^{\Phi_1}$$

et plus précisément

$$\||X|^{1/2}\|_\Phi = \|X\|_{\Phi_1}^{1/2} \quad (17)$$

D'autre part si Φ est à croissance modérée, il en est de même pour Φ_1 . Si φ_1 désigne la dérivée à gauche de Φ_1 , on a en effet :

$$\alpha_1 = \sup_{t>0} \frac{t \varphi_1(t)}{\Phi_1(t)} = \sup_{t>0} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{t} \varphi(\sqrt{t})}{\Phi(\sqrt{t})} \leq \frac{\alpha}{2} < \infty \quad (18)$$

Rappelons enfin que dans [I] il est démontré la proposition suivante :

Soit Φ une fonction de Young telle que $\alpha = \sup_{t>0} \frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)} < \infty$. Soit Z une v.a positive de L^Φ . Tout processus croissant $(A_n, n \in \mathbb{N})$ dont le potentiel $(E^{\otimes n}(A_\infty - A_n), n \in \mathbb{N})$ est majoré par la martingale positive $(E^{\otimes n}(Z), n \in \mathbb{N})$ vérifie l'inégalité :

$$\|A_\infty\|_\Phi \leq \alpha \|Z\|_\Phi \quad (19)$$

...

Soit (Φ, Ψ) un couple fonctions de Young conjuguées à croissance modérée. On suppose que $\Phi_1 = \Phi \circ \sqrt{\cdot}$ est également une fonction de Young.

Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une martingale bornée dans L^Φ , donc vérifiant l'une des conditions équivalentes :

$$V_{(X)}^{1/2} \in L^\Phi \Leftrightarrow V_{(X)} \in L^{\Phi_1}$$

Remarquons que $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est de carré intégrable car $V_{(X)} \in L^{\Phi_1} \subset L^1$ implique, par récurrence sur i :

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad X_i \in L^2$$

Désignons par $(A_n, n \in \mathbb{N})$ le processus croissant de la décomposition de Doob de la sous-martingale intégrable $(X_n^2, n \in \mathbb{N})$

$$A_n = \sum_{m < n} E^{\otimes m} [(X_{m+1} - X_m)^2] \quad (A_0 = 0)$$

$$A_\infty = \sum_{\mathbb{N}} E^{\otimes m} [(X_{m+1} - X_m)^2]$$

Comme $V_{(X)} - V_{n(X)} = \sum_{m \geq n} (X_{m+1} - X_m)^2$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 E^{\alpha n} [V - V_n] &= \sum_{m \geq n} E^{\alpha n} [(X_{m+1} - X_m)^2] = \sum_{m \geq n} E^{\alpha n} E^{\alpha m} [(X_{m+1} - X_m)^2] \\
 &= E^{\alpha n} (A_\infty - A_n)
 \end{aligned}$$

Par conséquent le processus croissant $(A_n, n \in \mathbf{N})$ vérifie

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad E^{\alpha n} (A_\infty - A_n) \leq E^{\alpha n} (V)$$

Comme $V_{(X)} \in L^{\Phi^1}$, la proposition rappelée ci-dessus permet de conclure que $A_\infty \in L^{\Phi^1}$ et que [cf. (18) et (19)] :

$$\|A_\infty\|_{\Phi^1} \leq \frac{\alpha}{2} \|V_{(X)}\|_{\Phi^1}$$

soit encore, ce qui est équivalent : $A_\infty^{1/2} \in L^\Phi$ et

$$\|A_\infty^{1/2}\|_\Phi \leq \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \|V_{(X)}^{1/2}\|_\Phi \quad (20)$$

Remarque préliminaire :

Si $(U_i ; i = 1, \dots, n)$ et $(W_i ; i = 1, \dots, n)$ sont des v.a de carré intégrable, il est immédiat de vérifier que

$$\left| \sum_{i=1}^n E^{\alpha i-1} (U_i W_i) \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n E^{\alpha i-1} (U_i^2)} \sqrt{\sum_{i=1}^n E^{\alpha i-1} (W_i^2)} \quad (21)$$

La démonstration est analogue à celle de l'inégalité de Schwarz à partir de :

$$\forall \lambda \in \mathbf{R} \quad \sum_{i=1}^n E^{\alpha i-1} [(U_i + \lambda W_i)^2] \geq 0$$

...

Soit (Φ, Ψ) un couple de fonctions de Young conjuguées à croissance modérée. On suppose que $\Psi_1 = \Psi \circ \sqrt{\cdot}$ est une fonction de Young.

Soit $(X_n, n \in \mathbf{N})$ une martingale de L^Φ de carré intégrable et telle que $X_0 = 0$ ps. On suppose de plus que $A_\infty^{1/2} \in L^\Phi$, $(A_n, n \in \mathbf{N})$ désignant le processus croissant de la décomposition de Doob de la sous-martingale $(X_n^2, n \in \mathbf{N})$.

Soit $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ une martingale bornée dans L^Ψ , donc également de carré intégrable d'après la remarque faite ci-dessus. On désigne par $(A'_n, n \in \mathbb{N})$ le processus croissant de la décomposition de Doob de la sous-martingale $(Y_n^2, n \in \mathbb{N})$.

Les hypothèses faites permettent d'affirmer que $A_\infty'^{1/2} \in L^\Psi$ et que d'après (20), (13) et (10) :

$$\|A_\infty'^{1/2}\|_\Psi \leq c \|V_Y^{1/2}\|_\Psi \leq c' \sup_{\mathbb{N}} \|Y_n\|_\Psi$$

Posons :

$$\forall i \geq 1 \quad \Delta X_i = X_i - X_{i-1} \quad \Delta Y_i = Y_i - Y_{i-1}$$

La propriété de martingale et l'hypothèse $X_0 = 0$ ps entraînent :

$$E(X_n Y_n) = E\left(\sum_{i=1}^n \Delta X_i \Delta Y_i\right) = E\left(\sum_{i=1}^n E^{\mathcal{G}_{i-1}}(\Delta X_i \Delta Y_i)\right)$$

Soit d'après (21) :

$$|E(X_n Y_n)| \leq E\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n E^{\mathcal{G}_{i-1}}(\Delta X_i^2)} \sqrt{\sum_{i=1}^n E^{\mathcal{G}_{i-1}}(\Delta Y_i^2)}\right) = E(\sqrt{A_n} \sqrt{A'_n})$$

Donc

$$|E(X_n Y_n)| \leq E(\sqrt{A_\infty} \sqrt{A'_\infty})$$

L'hypothèse $A_\infty'^{1/2} \in L^\Phi$ permet d'écrire d'après (14) :

$$|E(X_n Y_n)| \leq 2 \|A_\infty'^{1/2}\|_\Phi \|A_\infty'^{1/2}\|_\Psi \leq k \|A_\infty'^{1/2}\|_\Phi \sup_{\mathbb{N}} \|Y_n\|_\Psi$$

Donc d'après le lemme ci-dessus, $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est bornée dans L^Φ et

$$\sup_{\mathbb{N}} \|X_n\|_\Phi \leq k \|A_\infty'^{1/2}\|_\Phi$$

soit encore d'après (10)

$$\|\sup_{\mathbb{N}} |X_n|\|_\Phi \leq c \|A_\infty'^{1/2}\|_\Phi$$

CONCLUSION

Soit (Φ, Ψ) un couple de fonctions de Young à croissance modérée. Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une martingale de L^Φ .

1) Si $\Phi \circ \sqrt{\cdot}$ est une fonction de Young et si $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est bornée dans L^Φ , alors $A_\infty^{1/2} \in L^\Phi$ et

$$\|A_\infty^{1/2}\|_\Phi \leq c \|V_X^{1/2}\|_\Phi$$

2) Si $\Phi \circ \sqrt{\cdot}$ est une fonction de Young, si $X_0 = 0$ et si $A_\infty^{1/2} \in L^\Phi$, alors $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est bornée dans L^Φ et

$$\|\sup_N |X_n|\|_\Phi \leq c' \|A_\infty^{1/2}\|_\Phi$$

les constantes c et c' ne dépendant que de Φ et de Ψ

BIBLIOGRAPHIE

- [I] J. NEVEU – *Martingales à temps discret* Masson 1972
- [II] B.L. BURKHOLDER – *Distribution function inequalities for martingales*
The Annals of Probability 1973 Vol 1 N° 1 p. 19-49
- [III] P.A. MEYER – “*Martingales and Stochastic Integrals I*” Springer Berlin 1972
- [IV] GARSIA Adriano M. – *On a convex function inequality for martingales.*
Annals of Probability 1973 Vol. 1 N° 1, p. 171-174.
- [V] GARSIA Adriano M. – *Recent progress in the theory of martingale inequalities.* Seminar notes. To appear.