CAHIERS DU BURO

P. CAZES

Une généralisation des correspondances multiples et des correspondances hiérarchiques

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 46-47 (1986), p. 37-64

<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1986__46-47__37_0>

UNE GÉNÉRALISATION DES CORRESPONDANCES MULTIPLES ET DES CORRESPONDANCES HIÉRARCHIQUES

P. CAZES

CEREMADE (Université de Paris 9 Dauphine)

On étudie ici dans quelles conditions l'analyse des correspondances d'un tableau partitionné en blocs fournit des facteurs dont l'une des deux variances interclasse ou intraclasse est nulle.

On obtient ainsi un modèle qui comprend comme cas particuliers les correspondances multiples et les correspondances hiérarchiques.

SOMMAIRE

I. INTRODUCTION

On considère ici un tableau de nombres positifs k_{IJ} défini sur le produit de deux ensembles finis I et J, et on désignera par P_{IJ} (ou plus simplement P) le tableau de probabilités associé ($P_{IJ} = k_{IJ}/k$ si k est le total des éléments du tableau k_{IJ}). On supposera que I et J sont munis d'une partition dont les classes sont respectivement indicées par K et K' :

$$\left.\begin{array}{l} I = \cup\{I_q \mid q \in K\} \\ \\ J = \cup\{J_{q'} \mid q' \in K'\} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

et on supposera que les couples de facteurs non triviaux* ($\underline{a},\underline{b}$) issus de l'analyse factorielle des correspondances (A.F.C.) de k_{IJ} peuvent se répartir (par un choix convenable d'un système complet de facteurs, lequel n'est unique que s'il n'y a pas de valeurs propres multiples) dans l'un des deux groupes A et B suivants :

1) Si $(\underline{a}_\alpha,\underline{b}_\alpha)$, $(\alpha \in A)$ est un couple de facteurs du premier groupe, alors :

$\forall$ q $\in$ K, les composantes $a_{i\alpha}$ de $\underline{a}_\alpha$ prennent la même valeur pour $i \in I_q$

$\forall$ q'$\in$ K', les composantes $b_{j\alpha}$ de $\underline{b}_\alpha$ prennent la même valeur pour $j \in J_{q'}$

En d'autres termes le sous-vecteur $\underline{a}_{q\alpha}$ (resp. $\underline{b}_{q'\alpha}$) de $\underline{a}_\alpha$ (resp. $\underline{b}_\alpha$) dont les composantes sont indicées par I_q (resp. $J_{q'}$) a toutes ses composantes égales.

2) Si $(\underline{a}_\beta,\underline{b}_\beta)$ $(\beta \in B)$ est un couple de facteurs du second groupe, alors :

---

* *i.e. facteurs associés à une valeur propre non nulle et différents du facteur constant associé à la valeur propre 1 .*

$\forall\, q \in K$, $\underline{a}_\beta$ est de moyenne nulle sur I_q

$\forall\, q' \in K'$, $\underline{b}_\beta$ est de moyenne nulle sur $J_{q'}$

En d'autres termes, si $p_I = \{p_{i.} | i \in I\}$ et $p_J = \{p_{.j} | j \in J\}$ désignent les lois marginales du tableau P , on a :

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, q \in K : \Sigma\{p_{i.}\, a_{i\beta} | i \in I_q\} = 0 \\ \\ \forall\, q' \in K' : \Sigma\{p_{.j} b_{j\beta} | j \in J_{q'}\} = 0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

$a_{i\beta}$ (resp. $b_{j\beta}$) désignant la $i^{\text{ème}}$ (resp. $j^{\text{ème}}$) composante de $\underline{a}_\beta$ (resp. $\underline{b}_\beta$) .

On obtient ainsi une généralisation des correspondances multiples (cf. [4a], [4b]) et du modèle de correspondance hiérarchique à un niveau introduit par J.P. BENZECRI et B. ESCOFIER (cf. [1b], §2.5, [1c], [5] et [6]).

Après avoir fixé les notations et donné deux caractérisations des tableaux obéissant au modèle précédent (§II), on donne au §III quelques propriétés de ces tableaux (décomposition de l'inertie, majoration de la plus grande valeur propre des facteurs du groupe B). Enfin au §IV, prenant un tableau P quelconque, on impose des contraintes aux facteurs issus de l'A.F.C. de P pour qu'ils rentrent dans l'une des deux catégories définies ci-dessus.

II. NOTATIONS - CARACTERISATIONS DU MODELE

II.1 Notations - Premières propriétés

p_{ij} désignant le terme général de P, on pose :

$\forall\, i \in I$, $\forall\, j \in J$, $\forall\, q \in K$, $\forall\, q' \in K'$:

$$\left.\begin{aligned}
p_{iq'} &= \Sigma\{p_{ij} \mid j \in J_{q'}\} \\
p_{qj} &= \Sigma\{p_{ij} \mid i \in I_q\} \\
p_{qq'} &= \Sigma\{p_{ij} \mid i \in I_q,\ j \in J_{q'}\} \\
&= \Sigma\{p_{iq'} \mid i \in I_q\} = \Sigma\{p_{qj} \mid j \in J_{q'}\} \\
p_{q.} &= \Sigma\{p_{i.} \mid i \in I_q\} = \Sigma\{p_{qj} \mid j \in J\} \\
&= \Sigma\{p_{qq'} \mid q' \in K'\} \\
p_{.q'} &= \Sigma\{p_{.j} \mid j \in J_{q'}\} = \Sigma\{p_{iq'} \mid i \in I\} \\
&= \Sigma\{p_{qq'} \mid q \in K\}
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

et on désignera par Q le tableau de terme général $p_{qq'}(q \in K,\ q' \in K')$ tableau défini sur le produit $K \times K'$ et déduit du tableau P en remplaçant chaque bloc $I_q \times J_{q'}$ par son total.

On désignera par a (resp. b ; c ; d) une fonction sur I (resp. J ; K ; K') qu'on identifiera au vecteur $\underline{a}$ (resp. $\underline{b}$; $\underline{c}$; $\underline{d}$)* des valeurs a_i $(i \in I)$(resp. b_j $(j \in J)$; c_q $(q \in K)$; $d_{q'}$ $(q' \in K')$) qu'elle prend sur I (resp. J ; K ; K'), et on supposera dans toute la suite, que I et J sont respectivement munis des mesures p_I et p_J marges du tableau P , tandis que K et K' sont munis des mesures associées aux marges du tableau Q .

Pour α appartenant à A, on désignera par $c_{q\alpha}$ (resp. $d_{q'\alpha}$) la valeur $a_{i\alpha}$ (resp. $b_{j\alpha}$) du facteur $\underline{a}_\alpha$ (resp. $\underline{b}_\alpha$) pour $i \in I_q$ (resp. $j \in J_{q'}$), puisque par hypothèse, cette valeur ne dépend que de q (resp. q'), et on notera $\underline{c}_\alpha$ (resp. $\underline{d}_\alpha$) le vecteur de composantes $\{c_{q\alpha} \mid q \in K\}$ (resp. $\{d_{q'\alpha} \mid q' \in K'\}$).

---

* *dans la suite on écrira indifferemment a ou* $\underline{a}$ *(resp. b ou* $\underline{b}$ *; c ou* $\underline{c}$ *; d ou* $\underline{d}$*) suivant que l'on considère la fonction ou le vecteur associé.*

On dira que le vecteur $\underline{c}_\alpha$ (resp. $\underline{d}_\alpha$) est associé au vecteur $\underline{a}_\alpha$ (resp. $\underline{b}_\alpha$).

On posera enfin, si λ_α (resp. λ_β) désigne la valeur propre associée au couple $(\underline{a}_\alpha, \underline{b}_\alpha)$ (resp. $(\underline{a}_\beta, \underline{b}_\beta)$) :

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, q \in K,\ \forall\, q' \in K' : r_{qq'} = \Sigma\{c_{q\alpha}\, d_{q'\alpha}\, \sqrt{\lambda_\alpha} \mid \alpha \in A\} \\ \forall\, i \in I,\ \forall\, j \in J\ \ : s_{ij} = \Sigma\{a_{i\beta}\, b_{j\beta}\, \sqrt{\lambda_\beta} \mid \beta \in B\} \end{array}\right\} \quad (4)$$

On supposera que les facteurs précédents sont normés, soit en omettant les indices α et β pour simplifier l'écriture :

$$\Sigma\{p_{i.}(a_i)^2 \mid i \in I\} = \Sigma\{p_{.j}(b_j)^2 \mid j \in J\} = 1 \quad .$$

La formule de reconstitution des données (cf. [1a]) s'écrit alors :

$$\forall\, q \in K,\ \forall\, q' \in K',\ \forall\, i \in I_q,\ \forall\, j \in J_{q'} :$$

$$p_{ij} = p_{i.}\, p_{.j}(1 + r_{qq'} + s_{ij}) \qquad (5)$$

Remarques

1) De (2) et (4), l'on déduit les relations suivantes dont on se servira plus loin :

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, j \in J,\ \forall\, q \in K : \Sigma\{p_{i.}\ s_{ij} \mid i \in I_q\} = 0 \\ \forall\, i \in I,\ \forall\, q' \in K' : \Sigma\{p_{.j}\ s_{ij} \mid j \in J_{q'}\} = 0 \end{array}\right\} \quad (6)$$

2) Si $r = \mathrm{Card}\,K - 1 - \mathrm{Card}\,A$ (resp. $r' = \mathrm{Card}\,K' - 1 - \mathrm{Card}\,A$) est positif, on peut compléter les facteurs $\underline{a}_\alpha$ (resp. $\underline{b}_\alpha$) de A par r (resp. r') facteurs triviaux linéairement indépendants*, de moyenne nulle, et constants sur chaque I_q ($q \in K$) (resp. $J_{q'}$ ($q' \in K'$)). On désignera par A' (resp. A") l'ensemble (qui peut être vide) de ces facteurs.

* *cf. bas de la page suivante.*

Les vecteurs $\underline{c}_\alpha$ (resp. $\underline{d}_\alpha$) associés à $\underline{a}_\alpha$ (resp. $\underline{b}_\alpha$) constituent pour $\alpha \in A \cup A'$ (resp. $A \cup A''$) une base de l'espace des fonctions sur K (resp. K') de moyenne nulle (pour la mesure définie, rappelons-le, par la marge sur K (resp. K') du tableau Q), et on verra (cf. §II.2), résultat pratiquement évident, qu'ils sont facteurs sur K (resp. K') issus de l'A.F.C. de Q . (facteurs non triviaux si $\alpha \in A$, triviaux sinon).

De même si $s = \text{Card } I - \text{Card } K - \text{Card } B$ (resp. $s' = \text{Card } J - \text{Card } K' - \text{Card } B$) est positif, on peut compléter les facteurs non triviaux $\underline{a}_\beta$ (resp. $\underline{b}_\beta$) du groupe B par un système B' (resp. B") de s (resp. s') facteurs triviaux, linéairement indépendants*, de moyenne nulle sur chaque $I_q (q \in K)$ (resp. $J_{q'} (q' \in K')$), ce qui permet d'obtenir une base (de facteurs) dans l'espace des fonctions sur I (resp. J) centrées sur chaque I_q $(q \in K)$ (resp. $J_{q'} (q' \in K')$).

3) Deux fonctions sur I (resp. J), l'une constante sur chaque I_q (resp. $J_{q'}$), l'autre centrée sur chaque I_q (resp. $J_{q'}$) étant par construction non corrélées, tout facteur $\underline{a}_\alpha$ de $A \cup A'$ (resp. $\underline{b}_\alpha$ de $A \cup A''$) est non corrélé à tout facteur $\underline{a}_\beta$ de $B \cup B'$ (resp. $\underline{b}_\beta$ de $B \cup B''$).

II.2 <u>Première caractérisation du modèle : Théorème 1</u>

II.2.1 <u>Enoncé</u>

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse trouver un système complet de facteurs non triviaux issus de l'A.F.C. de P et se répartissant suivant les deux groupes A et B précédents est que soient vérifiées les deux conditions suivantes :

1) à tout couple non trivial de facteurs associés $(\underline{c},\underline{d})$ (avec $\underline{c} = \{c_q | q \in K\}$, $\underline{d} = \{d_{q'} | q' \in K'\}$), issu de l'A.F.C. de Q correspond un

---

* *que l'on peut choisir non corrélés.*

couple non trivial $(\underline{a},\underline{b})$ (avec $\underline{a}=\{a_i | i \in I\}$, $\underline{b}=\{b_j | j \in J\}$) de facteurs issu de l'A.F.C. de P , et défini par $a_i = c_q$ si $i \in I_q$ et $b_j = d_{q'}$ si $j \in J_{q'}$.

2) à tout facteur $\underline{c}$ sur K (resp. $\underline{d}$ sur K') issu de l'A.F.C. de Q et correspondant à la valeur propre nulle, est associé un facteur $\underline{a}$ sur I (resp. $\underline{b}$ sur J) issu de l'A.F.C. de P et correspondant à la valeur propre nulle, avec $a_i = c_q$ si $i \in I_q$ (resp. $b_j = d_{q'}$ si $j \in J_{q'}$).

Remarque

Les couples de facteurs $(\underline{a},\underline{b})$ et $(\underline{c},\underline{d})$ définis dans la condition 1) sont relatifs à la même valeur propre.

II.2.2 *Démonstration de la condition nécessaire*

Les facteurs non triviaux issus de l'A.F.C. de P se répartissent donc suivant les groupes A et B .

Soit $(\underline{a},\underline{b})$ un couple de facteurs associés du groupe A, et désignons par c_q (resp. $d_{q'}$) la valeur commune des a_i pour $i \in I_q$ (resp. b_j pour $j \in J_{q'}$).

La première formule de transition (cf. [1a]) qui s'écrit, si λ désigne la valeur propre associée à $(\underline{a},\underline{b})$:

$$\forall\ i \in I_q\ :\ \Sigma\{p_{ij}\, b_j \mid j \in J\} = \sqrt{\lambda}\, p_{i.}\, a_i = \sqrt{\lambda}\, p_{i.}\, c_q$$

peut se mettre sous la forme suivante, puisque :

$$\Sigma\{p_{ij} b_j \mid j \in J_{q'}\} = \Sigma\{p_{ij} d_{q'} \mid j \in J_{q'}\} = p_{iq'}\, d_{q'} \quad :$$

$$\forall\, i \in I_q :\ \Sigma\{p_{iq'} d_{q'} \mid q' \in K'\} = \sqrt{\lambda}\, p_{i.}\, c_q$$

d'où en sommant cette relation sur I_q :

$$\Sigma\{p_{qq'}d_{q'}|q' \in K'\} = \sqrt{\lambda}\, p_{q.}\, c_q \tag{7}$$

Opérant de même avec la seconde formule de transition, on obtient :

$$\Sigma\{p_{qq'}c_q|q \in K\} = \sqrt{\lambda}\, p_{.q'}d_{q'} \tag{8}$$

Les relations (7) et (8) correspondent aux formules de transition dans l'A.F.C. du tableau Q , ce qui prouve que le couple $(\underline{c},\underline{d})$ avec $\underline{c} = \{c_q|q \in K\}$, $\underline{d} = \{d_{q'}|q' \in K'\}$ est un couple de facteurs associés issu de l'A.F.C. de Q , et relatif à la valeur propre λ .

On obtient ainsi un système de Card A facteurs non triviaux sur K (resp. K') linéairement indépendants, et issus de l'A.F.C. de Q . Nous allons voir que les facteurs restants sont associés à la valeur propre nulle.

En effet, on peut noter que si $\lambda = 0$, les formules (7) et (8) restent valables. Il suffit alors de considérer les facteurs triviaux $\underline{a}_\alpha$ (resp. $\underline{b}_\alpha$) du groupe A' (resp. A"), facteurs définis dans la deuxième remarque située à la fin du §II.1, pour en déduire que les vecteurs $\underline{c}_\alpha$ (resp. $\underline{d}_\alpha$) associés, sont facteurs sur K (resp. K') issus de l'A.F.C. de Q et relatifs à la valeur propre nulle, ce qui termine la démonstration de la condition nécessaire.

II.2.3 *Démonstration de la condition suffisante*

Nous supposons donc les conditions 1) et 2) satisfaites. Désignons par A un système complet de couples de facteurs non triviaux $(\underline{c}_\alpha,\underline{d}_\alpha)$ issus de l'A.F.C. de Q . Les facteurs $(\underline{a}_\alpha,\underline{b}_\alpha)$ associés et définis par la condition 1) correspondent au groupe A de facteurs issus de l'A.F.C. de P .

Les couples de facteurs non triviaux restants $(\underline{a}_\beta,\underline{b}_\beta)$ correspondent aux facteurs du groupe B .

En effet $\underline{a}_\beta$ (resp. $\underline{b}_\beta$) étant non corrélé aux facteurs $\underline{a}_\alpha$ (resp. $\underline{b}_\alpha$) du groupe A, ainsi qu'aux facteurs sur I (resp. J) définis par la condition 2) et associés à la valeur propre 0, est non corrélé à toute fonction sur I (resp. J) constante sur les I_q (resp. $J_{q'}$). Il en résulte immédiatement que $\underline{a}_\beta$ (resp. $\underline{b}_\beta$) est centré sur chaque I_q (resp. $J_{q'}$).

c.q.f.d.

II.3 Seconde caractérisation du modèle : Théorème 2

II.3.1 Enoncé

Pour que l'on puisse trouver un système complet de facteurs non triviaux, issus de l'A.F.C. de P et se répartissant suivant les deux groupes A et B précédents, il faut et il suffit que les relations suivantes soient vérifiées :

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, q \in K \,,\ \forall\, q' \in K' ,\ \forall\, i \in I_q \,,\ \forall\, j \in J_{q'} : \\ \quad p_{qj} / p_{qq'} = p_{.j}/p_{.q'} \\ \quad p_{iq'}/ p_{qq'} = p_{i.}/p_{q.} \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Remarque

Les relations (9) traduisent simplement le fait que les marges de chaque bloc $I_q \times J_{q'}$ du tableau P sont proportionnelles aux marges restreintes correspondantes du tableau P tout entier.

II.3.2 Démonstration de la condition nécessaire

Les facteurs issus de l'A.F.C. de P se répartissant suivant les groupes A et B, la formule (5) est valable. Sommant cette formule sur I_q , ou sur $J_{q'}$, ou sur $I_q \times J_{q'}$, on obtient compte tenu de (3) et (6) :

$$\left.\begin{array}{ll} \forall\, j \in J_{q'} : & p_{qj} = p_{q.}\; p_{.j}(1+r_{qq'}) \\ \forall\, i \in I_q \ : & p_{iq'} = p_{i.}\; p_{.q'}(1+r_{qq'}) \\ & p_{qq'} = p_{q.}\; p_{.q'}(1+r_{qq'}) \end{array}\right\} \quad (10)$$

Faisant le rapport de chacune des deux premières équations (10) avec la troisième, on obtient les relations (9).

II.3.3 Démonstration de la condition suffisante

Supposons donc les relations (9) vérifiées, et soit $(\underline{a},\underline{b})$ un couple de facteurs associés issu de l'A.F.C. de P .

Considérant $\underline{a}$ (resp. $\underline{b}$) comme une fonction sur I (resp. J), on peut écrire $\underline{a}$ (resp. $\underline{b}$) d'une manière unique comme la somme d'une fonction constante sur chaque I_q (resp. $J_{q'}$) et d'une fonction de moyenne nulle sur chaque I_q (resp. $J_{q'}$) :

$$\left.\begin{array}{ll} \forall\, q \in K, \forall\, i \in I_q & : \ a_i = c_q + e_i \\ \forall\, q' \in K', \forall\, j \in J_{q'} & : \ b_j = d_{q'} + f_j \end{array}\right\} \quad (11)$$

avec $\Sigma\{p_{i.}e_i \mid i \in I_q\} = \Sigma\{p_{.j}f_j \mid j \in J_{q'}\} = 0$ (12)

Les formules de transition (cf. [1a]) s'écrivent alors, si λ désigne la valeur propre associée au couple $(\underline{a},\underline{b})$:

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, i \in I_q : \Sigma\{p_{ij}(d_{q'}+f_j) \mid j \in J_{q'}, q' \in K'\} = \sqrt{\lambda}\, p_{i.}(c_q+e_i) \\ \forall\, j \in J_{q'} : \Sigma\{p_{ij}(c_q+e_i) \mid i \in I_q\ , q \in K\ \} = \sqrt{\lambda}\, p_{.j}(d_{q'}+f_j) \end{array}\right\} \quad (13)$$

Compte tenu de ce que, d'après (3) et (9), on a :

$$\Sigma\{p_{ij}\, d_{q'} | j \in J_{q'}\} = p_{iq'}\, d_{q'} = (p_{i.}/p_{q.}) p_{qq'}\, d_{q'} \quad ,$$

la première relation (13) s'écrit :

$$(p_{i.}/p_{q.}) \Sigma\{p_{qq'} d_{q'} | q' \in K'\} + \Sigma\{p_{ij}\, f_j | j \in J\} = \sqrt{\lambda}\, p_{i.} (c_q + e_i) \tag{14}$$

Sommant cette dernière relation pour i décrivant I_q , on obtient compte tenu de (12) :

$$\Sigma\{p_{qq'} d_{q'} | q' \in K'\} + \Sigma\{p_{qj}\, f_j | j \in J\} = \sqrt{\lambda}\, p_{q.}\, c_q \tag{15}$$

Compte tenu de (9) et de (12), on a :

$$\Sigma\{p_{qj}\, f_j | j \in J\} = \Sigma\{(p_{qq'}/p_{.q'}) \Sigma\{p_{.j}\, f_j | j \in J_{q'}\} | q' \in K'\} = 0 \quad .$$

L'équation (15) s'écrit donc :

$$\Sigma\{p_{qq'}\, d_{q'} | q' \in K'\} = \sqrt{\lambda}\, p_{q.}\, c_q \tag{16}$$

On déduit alors de (14) et (16) que :

$$\Sigma\{p_{ij}\, f_j | j \in J\} = \sqrt{\lambda}\ p_{i.}\, e_i \tag{17}$$

Opérant sur la seconde formule de transition, on obtiendrait de même :

$$\Sigma\{p_{qq'}\, c_q | q \in K\} = \sqrt{\lambda}\, p_{.q'}\, d_{q'} \tag{18}$$

$$\Sigma\{p_{ij}\ \ e_i | i \in I\} = \sqrt{\lambda}\, p_{.j}\, f_j \tag{19}$$

Si $\underline{c}$ (resp. $\underline{d}$) désigne le vecteur de composantes c_q $(q \in K)$ (resp. $d_{q'}$ $(q' \in K')$), on déduit de (16) et (18) que $(\underline{c},\underline{d})$ est un couple de facteurs associés issu de l'A.F.C. du tableau Q .

Pour résoudre les équations (16) à (19), il suffit

- soit de résoudre les équations (16) et (18) en posant $e_i = f_j = 0$, auquel cas on obtient les facteurs non triviaux du groupe A, ainsi que les facteurs triviaux $\underline{a}$ (resp. $\underline{b}$) constants sur chaque I_q (resp. $J_{q'}$)

- soit de résoudre les équations (17) et (19) en posant $c_q = d_{q'} = 0$ auquel cas, les facteurs obtenus étant orthogonaux aux facteurs trouvés précédemment, vérifient automatiquement (12) et correspondent donc aux facteurs du groupe B .

On a bien obtenu la décomposition souhaitée des facteurs suivant les groupes A et B .

II.4 Cas particuliers

Si : $\forall\, (q,q') \in K \times K' : p_{qq'} = p_{q.}p_{.q'}$, (19bis)

alors tous les facteurs issus de l'A.F.C. de Q sont triviaux, et donc les facteurs correspondants issus de l'A.F.C. de P (i.e. les facteurs constants sur chaque sous-ensemble I_q ou $J_{q'}$) sont triviaux.

Tous les facteurs non triviaux issus de l'A.F.C. de P sont donc de moyenne nulle sur chaque sous-ensemble I_q ou $J_{q'}$. Dans ce cas, dans l'A.F.C. de P , le centre de gravité des i de I_q ($q \in K$) (resp. j de $J_{q'}$ ($q' \in K'$)) affectés des masses $p_{i.}$ (resp. $p_{.j}$) est identique au centre de gravité de tous les i de I (resp. j de J). On obtient l'analyse des correspondances multiples et ses généralisations (cf. [4a], [4b]).

Si on a K = K', et si on fait l'hypothèse que pour $q \neq q'$, la quantité s_{ij} définie par (4) est nulle pour $i \in I_q$ et $j \in J_{q'}$, on a d'après (5) et la dernière relation (10) :

$$\forall\, q,q' \in K \,,\; q \neq q' \;;\; \forall\, i \in I_q \,, \forall\, j \in J_{q'} :$$

$$p_{ij} = p_{i.}p_{.j}(1+r_{qq'}) = p_{qq'}(p_{i.}/p_{q.})(p_{.j}/p_{.q'}) \qquad (20)$$

On obtient alors la relation caractéristique d'une correspondance hiérarchique à un niveau (cf. [6]).

Si outre (20), (19bis) est vérifié, on a une correspondance qui est à la fois multiple et hiérarchique, avec le même ensemble K indiçant les partitions de I et J dans les deux modèles.

Dans ce cas, qui est réalisé, comme il est facile de le vérifier, si et seulement si $p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$ pour tout couple (i,j) n'appartenant pas à un bloc diagonal (i.e. $i \in I_q$, $j \in J_{q'}$, $q' \neq q$), les seuls facteurs non triviaux issus de l'A.F.C. de P proviennent des facteurs issus de l'A.F.C. des blocs diagonaux. Un tel cas a été rencontré par A. BOHY (cf. [2]).

Envisageons encore deux autres cas particuliers liés à la nature des partitions de I ou de J, disons I pour fixer les idées.

Si $\text{Card}\,K = 1$, on n'a que des facteurs du groupe B, puisque tout facteur non trivial sur I est centré ; tout facteur non trivial sur J est donc centré sur chaque $J_{q'}$ $(q' \in K')$. C'est un cas encore plus particulier de correspondance multiple, cas dans lequel rentrent les tableaux disjonctifs complets.

Si maintenant $\text{Card}\,K = \text{Card}\,I$, auquel cas on a la partition triviale de I où tout élément de I constitue une classe, les seuls facteurs non triviaux sont des facteurs du groupe A : tout facteur non trivial sur J est constant sur chaque $J_{q'}$ $(q' \in K')$. Dans ce cas, toutes les colonnes du bloc $I \times J_{q'}$ sont proportionnelles, et l'A.F.C. de P est équivalente à l'A.F.C. de Q.

De façon plus générale, K et K' étant quelconques, l'A.F.C. de P ne se réduit à l'A.F.C. de Q (i.e. P a pour facteurs non triviaux uniquement que des facteurs du groupe A) que si et seulement si :

a) $\forall\, q \in K$, toutes les lignes du bloc $I_q \times J$ sont proportionnelles

b) $\forall\, q' \in K'$, toutes les colonnes du bloc $I \times J_{q'}$ sont proportionnelles ce résultat découlant de (5) (où l'on fait $s_{ij} = 0$) et de (10),ou de façon plus immédiate du principe d'équivalence distributionnelle.

Remarque :

Quel que soit le tableau P considéré, les relations (9) sont trivialement vérifiées si l'on considère les partitions triviales telles que Card K = Card K' = 1 (resp. Card K = Card I, Card K' = Card J), tout facteur non trivial issu de l'A.F.C. de P étant alors considéré comme un facteur du groupe B (resp. A).

III. PROPRIETES

III.1 Décomposition de l'inertie

On déduit de (5) et de (6) que l'inertie totale obtenue dans l'A.F.C. de P, inertie qui s'écrit :

$$I_T = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (p_{ij} - p_{i.} p_{.j})^2 / (p_{i.} p_{.j})$$

peut se décomposer sous la forme suivante :

$$I_T = I_B + I_W \qquad (21)$$

avec $$I_B = \sum_{q \in K} \sum_{q' \in K'} p_{q.} p_{.q'} r^2_{qq'} \qquad (22)$$

$$I_W = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_{i.} p_{.j} s^2_{ij} \qquad (23)$$

I_B correspond à l'inertie interclasse, qui d'après la troisième relation (10) est égale à l'inertie totale
$\sum_{q \in K} \sum_{q' \in K'} (p_{qq'} - p_{q.} p_{.q'})^2 / (p_{q.} p_{.q'})$ obtenue dans l'AFC du tableau Q .

I_W correspond à l'inertie intraclasse, que l'on va décomposer en fonction des inerties $I_{n_{qq'}}$ obtenues en faisant l'A.F.C. de chaque bloc

$I_q \times J_{q'}$ du tableau P .

En effet, compte tenu de (5) et de la troisième relation (10), on a pour $(i,j) \in I_q \times J_{q'}$:

$$s_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{i.}p_{.j}} - (1+r_{qq'}) = \frac{p_{ij}}{p_{i.}p_{.j}} - \frac{p_{qq'}}{p_{q.}p_{.q'}}$$

$$= \frac{p_{qq'}}{p_{i.}p_{.j}} \left(\frac{p_{ij}}{p_{qq'}} - \frac{p_{i.}}{p_{q.}} \frac{p_{.j}}{p_{.q'}}\right)$$

d'où l'on déduit :

$$I_W = \sum_{q \in K} \sum_{q' \in K'} \sum_{i \in I_q} \sum_{j \in J_{q'}} \frac{p^2_{qq'}}{p_{i.}p_{.j}} \left(\frac{p_{ij}}{p_{qq'}} - \frac{p_{i.}}{p_{q.}} \frac{p_{.j}}{p_{.q'}}\right)^2$$

$$= \sum_{q \in K} \sum_{q' \in K'} \frac{p^2_{qq'}}{p_{q.}p_{.q'}} I_{n_{qq'}} \tag{24}$$

Des relations (21) à (24) l'on déduit que I_T peut se mettre sous la forme :

$$I_T = \sum_{q \in K} \sum_{q' \in K'} CR_{qq'} \tag{25}$$

la contribution $CR_{qq'}$ du bloc $I_q \times J_{q'}$ à cette inertie valant :

$$\left.\begin{aligned} CR_{qq'} &= p_{q.}p_{.q'}r^2_{qq'} + p^2_{qq'}I_{n_{qq'}}/(p_{q.}p_{.q'}) \\ &= ((p_{qq'} - p_{q.}p_{.q'})^2 + p^2_{qq'}\, I_{n_{qq'}})/(p_{q.}\, p_{.q'}) \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Dans le cas particulier des correspondances multiples ($p_{qq'} = p_{q.}\, p_{.q'}$) les formules précédentes se simplifient, puisque l'inertie interclasse est nulle, et l'on retrouve la formule (13) donnée dans [4a], p. 148 :

$$I_T = \Sigma\{p_{q.}\, p_{.q'}\, I_{n_{qq'}} \mid q \in K,\ q' \in K'\} \ .$$

Si $K = K'$, et si les s_{ij} sont nuls pour les blocs non diagonaux (cas des correspondances hiérarchiques), tous les blocs non diagonaux étant des blocs produits, $I_{n_{qq'}}$ est nul pour $q \neq q'$; on a alors :

$$I_T = \sum_{q \in K} \frac{p_{qq}^2}{p_{q.}\, p_{.q}} I_{n_{qq}} + \sum_{q \in K} \sum_{q' \in K} \frac{(p_{qq'} - p_{q.}\, p_{.q'})^2}{p_{q.}\, p_{.q'}}$$

Cette décomposition était évidente, dans la mesure où les facteurs issus d'une correspondance hiérarchique à un niveau s'obtiennent d'une part à partir des facteurs de Q avec la même valeur propre, et d'autre part, par prolongement des facteurs issus des blocs diagonaux $I_q \times J_q$, les valeurs propres issues de ces blocs devant être multipliées par $p_{qq}^2/(p_{q.}\, p_{.q})$ (cf. [1b], [5]).

III.2 *Majoration de la valeur propre la plus grande des facteurs du groupe B*

Considérons une fonction a sur I (resp. b sur J), qu'on identifiera (cf. §II.1) au vecteur $\underline{a}$ (resp. $\underline{b}$) des valeurs a_i (resp. b_j) qu'elle prend sur I (resp. J). On suppose que a (resp. b) est centré sur chaque sous-ensemble I_q (resp. $J_{q'}$). $I \times J$ étant muni de la mesure P_{IJ} , on va donner une majoration du carré de la corrélation entre a et b (considérées comme des fonctions sur I x J dont la première ne dépend que de I et la seconde que de J) indépendante du couple (a,b) choisi. Cette majoration étant valable pour tout couple de facteurs associés du groupe B nous fournira la majoration recherchée.

Si Cov(a,b) désigne la covariance entre a et b, et si $\mathrm{Cov}(a_q, b_{q'})$ désigne la covariance entre les restrictions de a et b à I_q et $J_{q'}$ respectivement, $I_q \times J_{q'}$ étant muni de la mesure $P_{I_q J_{q'}}/p_{qq'} = \{p_{ij}/p_{qq'} \mid i \in I_q,\ j \in J_{q'}\}$, on a :

$$\mathrm{Cov}(a,b) = \Sigma\{p_{qq'}\ \Sigma\{(p_{ij}/p_{qq'})a_i\, b_j\ |i \in I_q,\ j \in J_{q'}\}|q \in K,\ q' \in K'\}$$

$$= \Sigma\{p_{qq'}\ \mathrm{Cov}(a_q, b_{q'})|q \in K,\ q' \in K'\} \qquad (27)$$

Si Var(a) (resp. Var(b)) désigne la variance de a (resp. b) et σ_q^2 (resp. $\sigma_{q'}^2$) la variance de a_q (resp. $b_{q'}$), on a de même :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Var}(a) &= \Sigma\{p_{q.}\sigma_q^2 \mid q \in K\} \\ \mathrm{Var}(b) &= \Sigma\{p_{.q'}\sigma_{q'}^2 | q' \in K'\} \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Désirant majorer le carré de la corrélation entre a et b, on pourra supposer, sans perte de généralités que ces deux fonctions sont de variance unité, auquel cas :

$$\Sigma\{p_{q.}\sigma_q^2 \mid q \in K\} = \Sigma\{p_{.q'}\sigma_{q'}^2 \mid q' \in K'\} = 1 \qquad (29)$$

La corrélation entre a et b s'écrit alors d'après (27) et en désignant par $\rho_{qq'}$ la corrélation entre a_q et $b_{q'}$:

$$\mathrm{Corr}(a,b) = \Sigma\{p_{qq'}\sigma_q\sigma_{q'}\ \rho_{qq'} \mid q \in K, q' \in K'\} \qquad (30)$$

Posons

$$\left.\begin{aligned} t_{q'} &= (\Sigma\{p_{qq'}\sigma_q^2 \mid q \in K\})^{1/2} \\ u_{q'} &= (\Sigma\{p_{qq'}\rho_{qq'}^2 | \ q \in K\})^{1/2} \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Compte tenu de ce que $p_{qq'} < p_{q.}$ on déduit de (29) que :

$$t_{q'} < (\Sigma\{p_{q.}\sigma_q^2 \mid q \in K\})^{1/2} = 1 \qquad (32)$$

On a alors en appliquant l'inégalité de Schwarz sur K muni de la loi $\{p_{qq'}/p_{.q'}|q \in K\}$ et en tenant compte de (32) :

$$\left.\begin{aligned}|\mathrm{Corr}(a,b)| &\leq \Sigma\,\{\sigma_{q'}\,\Sigma\{p_{qq'}\,\sigma_q|\rho_{qq'}|\,|q\in K\}|q'\in K'\}\\ &\leq \Sigma\,\{\sigma_{q'}\,t_{q'}\,u_{q'}|q'\in K'\}\\ &\leq \Sigma\,\{p_{.q'}\,\sigma_{q'}\,u_{q'}/p_{.q'}|q'\in K'\}\end{aligned}\right\}\qquad(33)$$

Appliquant une seconde fois l'inégalité de Schwarz sur K' muni de la loi $\{p_{.q'}|q'\in K'\}$, on a, compte tenu de (29) :

$$|\mathrm{Corr}(a,b)| \leq (\Sigma\{p_{.q'}\,u^2_{q'}/p^2_{.q'}|\,q'\in K'\})^{1/2}$$

ou encore en remplaçant $u_{q'}$ par sa valeur :

$$\mathrm{Corr}^2(a,b) \leq \Sigma\{p_{qq'}\,\rho^2_{qq'}/p_{.q'}\,|q\in K,\,q'\in K'\}\qquad(34)$$

Si on avait appliqué l'inégalité de Schwarz, d'abord sur K', puis sur K, on aurait obtenu de façon symétrique :

$$\mathrm{Corr}^2(a,b) \leq \Sigma\{p_{qq'}\,\rho^2_{qq'}/p_{q.}\,|q\in K,\,q'\in K'\}\qquad(35)$$

Désignons par $\lambda_1^{qq'}$ la valeur propre la plus élevée (autre que la valeur propre triviale 1 associée au facteur constant) dans l'A.F.C. du bloc $I_q \times J_{q'}$, et posons

$$U = \Sigma\{p_{qq'}\,\lambda_1^{qq'}/p_{q.}\,|q\in K,\,q'\in K'\}$$

$$V = \Sigma\{p_{qq'}\,\lambda_1^{qq'}/p_{.q'}|q\in K,\,q'\in K'\}$$

$$W = \min(U,V)$$

Compte tenu de ce que $\rho^2_{qq'} \leq \lambda_1^{qq'}$, on a :

$$\mathrm{Corr}^2(a,b) \leq W\ .$$

Si λ_1 désigne la valeur propre la plus grande des facteurs du groupe B, et si $(\underline{a}_1,\underline{b}_1)$ désigne le couple de facteurs associés correspondant, on a :

$$\lambda_1 = \mathrm{Corr}^2(a_1,b_1) \prec W$$

qui est la majoration recherchée.

Cette majoration ne présente bien sur de l'intérêt que si W est plus petit que 1 .

Dans le cas des correspondances multiples ($p_{qq'} = p_{q.}p_{.q'}$) où tous les facteurs non triviaux appartiennent au groupe B, on a obtenu dans [4a] une majoration plus précise, à savoir $\sum_{q,q'} p_{q.}p_{.q'}\lambda_1^{qq'}$,

majoration obtenue dans la démonstration précédente en remplaçant $t_{q'}$ par sa valeur (facile à calculer dans ce cas, compte tenu de (29) et (31)) $\sqrt{p_{.q'}}$ au lieu de le majorer par 1 .

Dans le cas des correspondances hiérarchiques ($K = K', \lambda_1^{qq'} = 0$ si $q \neq q'$), la majoration précédente ne présente pas d'intérêt, puisque les valeurs propres non triviales du groupe B sont obtenues, comme on l'a rappelé ci-dessus, à partir des valeurs propres non triviales des blocs diagonaux $I_q \times J_q$, après multiplication par $p_{qq}^2/(p_{q.}p_{.q})$.

IV. RECHERCHE DES FACTEURS DE TYPE A *et* B DANS LE CAS D'UN TABLEAU P QUELCONQUE

IV.1 *Position du problème*

Considérons un tableau P ne vérifiant plus la condition de séparation des facteurs suivant les groupes A et B, ou, ce qui est équivalent, ne vérifiant plus les relations (9). On sait que, faire l'analyse des correspondances du tableau P revient à rechercher les couples de fonctions (a,b) centrées, de variance 1, et de corrélation extrémale, soit :

$$\Sigma\{p_{ij}\, a_i\, b_j \mid i \in I,\ j \in J\} \text{ extrêmum} \qquad (36)$$

avec :

$$\Sigma\{p_{i.}\, a_i \mid i \in I\} = \Sigma\{p_{.j}\; b_j \mid j \in J\} = 0 \tag{37}$$

$$\Sigma\{p_{i.}\,(a_i)^2 \mid i \in I\} = \Sigma\{p_{.j}(b_j)^2 \mid j \in J\} = 1 \tag{38}$$

On cherchera ici des couples de fonctions (a,b) vérifiant les conditions précédentes, sous l'une des deux contraintes suivantes :

- a et b sont constantes sur chaque sous-ensemble I_q et $J_{q'}$ respectivement.

- a et b sont centrées sur chaque sous-ensemble I_q et $J_{q'}$.

Dans le premier cas, on obtient des fonctions de corrélation interclasse extrêmale (on parlera encore par abus de langage de facteurs de type A), tandis que dans le second, on obtient des fonctions de corrélation intraclasse maximale (on parlera de facteurs de type B). On verra que ces fonctions peuvent s'obtenir à partir de l'A.F.C. d'un tableau T .

IV.2 Recherche des facteurs de type A

On suppose ici que :

$\forall\, q \in K, \forall\, i \in I_q \;:\; a_i = c_q$

$\forall\, q' \in K', \forall\, j \in J_{q'} \;:\; b_j = d_{q'}$

Les équations (36) à (38) s'écrivent alors :

$$\Sigma\{p_{qq'}\; c_q\; d_{q'} \mid q \in K,\ q' \in K'\} \quad \text{extremum}$$

$$\Sigma\{p_{q.}\; c_q \mid q \in K\} = \Sigma\{p_{.q'} d_{q'} \mid q' \in K'\} = 0$$

$$\Sigma\{p_{q.}\,(c_q)^2 \mid q \in K\} = \Sigma\{p_{.q'}(d_{q'})^2 \mid q' \in K'\} = 1 \quad .$$

On retrouve, résultat pratiquement évident, la caractérisation des facteurs (c,d) issus de l'A.F.C. du tableau Q des $p_{qq'}$.

IV.3 Recherche des facteurs de type B

On suppose ici que :

$$\left.\begin{aligned} &\forall\, q \in K : \Sigma\{p_{i.}\, a_i \,|\, i \in I_q\} = 0 \\ &\forall\, q' \in K' : \Sigma\{p_{.j}\, b_j \,|\, j \in J_{q'}\} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

conditions qui impliquent (37).

On est donc ramené à rendre extrêmum (36) sous les conditions (38) et (39).

Résolvant le problème précédent à l'aide de la technique des multiplicateurs de Lagrange, on obtient les équations suivantes :

$$\forall\, i \in I_q : \Sigma\{p_{ij}\, b_j \,|\, j \in J\} - \lambda p_{i.}\, a_i - \lambda_q\, p_{i.} = 0 \qquad (40)$$

$$\forall\, j \in J_{q'} : \Sigma\{p_{ij}\, a_i \,|\, i \in I\} - \mu\, p_{.j}\, b_j - \mu_{q'} p_{.j} = 0 \qquad (41)$$

où $\lambda/2$ et $\mu/2$ correspondent aux multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes de normalisation (38), tandis que λ_q et $\mu_{q'}$ sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes de centrage (39).

Montrons d'abord que

$$\lambda = \mu = \Sigma\{p_{ij}\, a_i\, b_j \,|\, i \in I,\ j \in J\} \qquad (42)$$

Il suffit pour cela de multiplier (40) par a_i , puis de sommer sur I, en tenant compte de (38) et (39), et d'opérer de façon analogue sur (41) après multiplication par b_j et sommation sur J .

Déterminons maintenant λ_q et $\mu_{q'}$:

Il suffit pour cela de sommer (40) (resp. (41)) pour i (resp. j) décrivant I_q (resp. $J_{q'}$), en tenant compte de (3) et (39). On obtient alors :

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\{p_{qj}\, b_j \,|\, j \in J\} - \lambda_q\, p_{q.} \;=\; 0 \\[2ex] \Sigma\{p_{iq'}\, a_i \,|\, i \in I\} - \mu_{q'}\, p_{.q'} \;=\; 0 \end{array}\right\} \qquad (43)$$

Reportant les valeurs ainsi trouvées de λ_q et $\mu_{q'}$ dans les équations (40) et (41), et posant

$$\left.\begin{array}{l} \forall\; i \in I_q \;:\; u_{ij} = p_{ij} - p_{i.}\; p_{qj}\, / p_{q.} \\[2ex] \forall\; j \in J_{q'} : \; v_{ij} = p_{ij} - p_{.j}\; p_{iq'} / p_{.q'} \end{array}\right\} \qquad (44)$$

On obtient (compte tenu de ce que $\lambda = \mu$) :

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\{u_{ij}\; b_j \,|\, j \in J\} = \lambda\, p_{i.}\; a_i \\[2ex] \Sigma\{v_{ij}\; a_i \,|\, i \in I\} = \lambda\, p_{.j}\; b_j \end{array}\right\} \qquad (45)$$

qui sont les équations de transition vérifiées par le couple (a,b).

Compte tenu de ce que :

$$\Sigma\{u_{ij} \,|\, i \in I_q\} = \Sigma\{v_{ij} \,|\, j \in J_{q'}\} = 0 \quad ,$$

il apparait que si (a,b) vérifie (45), avec λ différent de zéro, a et b sont centrés sur chaque sous-ensemble I_q ou $J_{q'}$.

IV.4 *Obtention des facteurs de type A et de type B à l'aide de l'analyse des correspondances usuelles*

Soit T_{IJ} (ou plus simplement T) le tableau défini sur le produit I x J et dont le terme général est donné par :

$$\left.\begin{aligned}\forall\, i \in I_q,\ \forall\, j \in J_{q'} :\ t_{ij} = p_{ij} - (p_{i.}\, p_{qj}/p_{q.}) - (p_{iq'}\, p_{.j}/p_{.q'}) \\ + 2(p_{i.}/p_{q.})(p_{.j}/p_{.q'})p_{qq'}\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Avec des notations analogues à celles définies dans (3) mais en remplaçant p_{ij} par t_{ij} , on déduit de (46) que :

$$\left.\begin{aligned}\forall\, i \in I_q,\ \forall\, j \in J_{q'} :\ t_{qj} &= (p_{.j}/p_{.q'})p_{qq'} \\ t_{iq'} &= (p_{i.}/p_{q.})p_{qq'} \\ t_{qq'} &= p_{qq'} \\ t_{i.} &= p_{i.} \\ t_{.j} &= p_{.j} \\ t_{q.} &= p_{q.} \\ t_{.q'} &= p_{.q'}\end{aligned}\right\} \quad (47)$$

$t_I = \{t_{i.} | i \in I\}$, et $t_J = \{t_{.j} | j \in J\}$ désignant les marges du tableau T .

On déduit alors des relations précédentes que :

$$\left.\begin{aligned}\forall\, j \in J_{q'} &:\ t_{qj}/t_{qq'} = t_{.j}/t_{.q'} \\ \forall\, i \in I_q &:\ t_{iq'}/t_{qq'} = t_{i.}/t_{q.}\end{aligned}\right\} \quad (48)$$

Le tableau T est donc un tableau, pouvant comporter des termes négatifs, mais dont les marges de tous les blocs $I_q \times J_{q'}$, ainsi que les marges totales ne comportent que des éléments positifs (ou nuls).

Les équations (48) correspondant aux équations (9), on déduit du théorème 2 que les facteurs issus de l'A.F.C. de T se divisent suivant les deux groupes A et B définis dans l'introduction.

Comme d'après (47) le tableau déduit de T en remplaçant chaque bloc $I_q \times J_{q'}$ par son total $t_{qq'}$ est identique au tableau Q , les facteurs du groupe A issus de l'A.F.C. de T sont identiques aux facteurs de type A du tableau P .

Par ailleurs, on constate à partir des formules de transition obtenues dans l'A.F.C. du tableau T, que les facteurs du groupe B issus de l'A.F.C. de T vérifient, du fait qu'ils sont centrés sur chaque sous-ensemble I_q ou $J_{q'}$, les équations (45). Les facteurs de type B du tableau P s'obtiennent donc à partir des facteurs du groupe B issus de l'A.F.C. de T .

L'analyse des correspondances de T permet donc d'obtenir les facteurs interclasse et intraclasse du tableau P .

Remarques :

1) Si le tableau P vérifie les relations (9), il est identique au tableau T .

2) L'A.F.C. de T revient à comparer le tableau P_{IJ} au tableau modèle W_{IJ} dont le terme général w_{ij} est donné (pour $i \in I_q$, $j \in J_{q'}$) par :

$$w_{ij} = p_{ij} - t_{ij} + p_{i.}\,p_{.j} = (p_{i.}\,p_{qj}/p_{q.}) + (p_{iq'}\,p_{.j}/p_{.q'}) - 2(p_{i.}/p_{q.})(p_{.j}/p_{.q'})p_{qq'} + p_{i.}\,p_{.j} \;.$$

En effet, W ayant mêmes marges que P, la comparaison de P et de W revient (cf. [7]) à effectuer l'A.F.C. du tableau de terme général $p_{ij} - w_{ij} + p_{i.}\,p_{.j}$, i.e. l'A.F.C. du tableau T .

3) Dans le cas où l'on ne dispose d'une partition que sur un seul des deux ensembles I ou J, disons J pour fixer les idées, tous les résultats précédents s'appliquent en raisonnant sur le tableau de Burt B_{JJ} de terme général défini par :

$\forall\ j,j' \in J : b_{jj'} = \Sigma\{p_{ij}\ p_{ij'}/p_{i.} | i \in I\}$,

tableau qui a mêmes facteurs de variance 1 sur J, que les facteurs sur J issus de l'A.F.C. de P .

Dans ce cas, compte tenu de la symétrie du tableau B, si B vérifie la première relation (9), il vérifie automatiquement la seconde.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENZECRI, J.P. (1982) : L'analyse des données, T.2, l'analyse des correspondances, Dunod, 4è édition (1982).

a) [Dis. χ^2 corr.], T II B n° 5 .

b) [Graphe corr.], T II B n° 10 .

c) [Corr. Hier.], T II B n° 11 .

[2] BOHY, A. (1979) : Contribution à l'étude du staphylocoque et de ses marqueurs épidémiologiques, Thèse de 3ème cycle, Université Paris 6.

[3] CAILLIEZ, F., PAGES, J.P. (1976) : Introduction à l'analyse des données, SMASH.

[4] CAZES, P. (1980) : L'analyse de certains tableaux rectangulaires décomposés en blocs : Généralisation des propriétés rencontrées dans l'étude des correspondances multiples.

a) I . Définitions et applications à l'analyse canonique des variables qualitatives [ANA. BLOCS I], Les Cahiers de l'Analyse des Données, Vol. V n° 2, pp. 145-161.

b) II . Questionnaires : variantes de codages et nouveaux calculs de contributions [ANA. BLOCS II], Les Cahiers de l'Analyse des Données, Vol. V n° 4, pp. 387-406.

[5] CAZES, P. (1984) : Correspondances hiérarchiques et ensembles associés, Cahiers du B.U.R.O., n°s 43-44, pp. 43-142.

[6] CAZES, P. (1985) : Correspondances hiérarchiques à un niveau et ensembles associés, à paraître dans les actes des 4ème journées internationales "Analyse des Données et Informatique", Versailles, Octobre 1985.

[7] ESCOFIER, B. (1983) : Analyse de la différence entre deux mesures définies sur le produit de deux mêmes ensembles [ANA. DIFF. PROD.], Les Cahiers de l'Analyse des Données, Vol. VIII n° 3, pp. 325-329.