YOZO MATSUSHIMA

Chapitre I Groupes topologiques

Cours de l'institut Fourier, tome 1 (1966), p. 1-31

<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1966__1__A1_0>

Chapitre I

GROUPES TOPOLOGIQUES

§1. DEFINITION D'UN GROUPE TOPOLOGIQUE

Définition :

On dit qu'un ensemble G est un groupe topologique s'il vérifie les conditions suivantes :

1) G est un groupe.

2) G est un espace topologique.

3) L'application

$$\varphi_1 : G \times G \longrightarrow G$$

qui à (x, y) fait correspondre xy^{-1} est continue,

Soit G un groupe topologique, pour tout $g \in G$, on définit la translation à gauche $I_g : G \longrightarrow G$ par $L_g(x) = gx$ et la translation à droite $R_g : G \longrightarrow G$ par $R_g(x) = xg$.
Pour tout $g \in G$, les translations L_g et R_g sont des homéomorphismes de G sur G ; car L_g est continue puisque

$$L_g(x) = \varphi_1(g, \bar{x}^1)$$

et d'autre part L_g est bijective et

$$(L_g)^{-1} = L\bar{g}^1 \quad .$$

De même pour R_g .

Remarque :

La topologie d'un groupe topologique G est uniforme : c'est-à-dire que pour tous $a, b \in G$, il existe un homéomorphisme $f : G \longrightarrow G$ tel que

$$b = f(a) \quad .$$

On peut en effet choisir

$$f) L_{b\bar{a}^1} \quad .$$

Exemple 1 :

Le groupe additif des réels $\mathbb{R}$ est un groupe topologique.

Exemple 2 :

Soit $M(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de degré n à coefficients réels, il peut être identifié à $\mathbb{R}^{n^2}$ et muni de la topologie habituelle sur $\mathbb{R}^{n^2}$; alors pour la multiplication des matrices, $M(n, \mathbb{R})$ est un groupe topologique. Soit $GL(n, \mathbb{R})$ le sous-ensemble de $M(n, \mathbb{R})$ des matrices inversibles. L'application qui à une matrice fait correspondre son déterminant est une fonction continue sur $M(n, \mathbb{R})$, puisque le déterminant d'une matrice est un polynôme en ses coefficients ; et $GL(n, \mathbb{R})$ est l'image réciproque par cette application de l'ouvert $\mathbb{R} - \{0\}$ de $\mathbb{R}$, c'est donc un ouvert de $M(n, \mathbb{R})$ et, muni de la topologie induite, c'est un groupe topologique. On l'appelle le <u>groupe linéaire général de degré n</u>.

Soient A et B des sous-ensembles d'un groupe topologique G. on notera $\bar{A}^{1}$ l'ensemble de tous les éléments de la forme $\bar{a}^{1}$ où $a \in A$; on notera AB l'ensemble de tous les éléments de la forme ab, où $a \in A$ et $b \in B$, et on notera aB pour $\{a\}B$ et Ab pour $A\{b\}$.

<u>Propriétés</u> :

<u>Si A (ou B) est un sous-ensemble ouvert de G, alors AB est un sous-ensemble ouvert de G</u>. Car

$$AB = \bigcup_{b \in B} R_b(A)$$

et chaque $R_b(A)$ est ouvert puisque R_b est un homéomorphisme de G sur G. (Si c'est B qui est ouvert, le résultat découle de l'égalité

$$AB = \bigcup_{a \in A} L_a(B) \quad).$$

D'autre part, <u>si A est un ouvert de G, alors $\bar{A}^{1}$ est un ouvert de G</u>. Car A^{-1} est l'image réciproque de A par l'application continue ψ.

Dans ce chapitre et dans les suivants, on appellera voisinage d'un point x d'un espace topologique X, un sous-ensemble <u>ouvert</u> de X contenant x.

Soit G un groupe topologique, on notera e son élément neutre. On considère l'ensemble $\mathfrak{U}$ de tous les voisinages de e dans G. Alors pour tout $g \in G$, l'ensemble $g\mathfrak{U} = \{gU \; ; \; U \in \mathfrak{U}\}$ est l'ensemble des voisinages de g ; en effet, si U est un ouvert contenant e, $gU = L_g(U)$ est un ouvert et il contient $ge = g$; réciproquement si V est un ouvert contenant g, alors $U = g^{-1}V$ est un ouvert contenant e et

$$V = gU \quad .$$

L'ensemble $\mathfrak{U}$ des voisinages de e dans G jouit des cinq propriétés suivantes :

1) <u>L'ensemble $\mathfrak{U}$ n'est pas vide</u>. En effet, il contient G.

2) <u>Pour tous</u> $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$, <u>il existe</u> $U_3 \in \mathfrak{U}$ <u>tel que</u> U_3 <u>soit contenu dans</u> $U_1 \cap U_2$. On peut en effet choisir pour U_3 , $U_1 \cap U_2$ lui-même.

3) <u>Pour tout $U \in \mathfrak{U}$, il existe $V \in \mathfrak{U}$ tel que VV^{-1} soit contenu dans U</u>. En effet, l'application

$$\varphi : G \times G \longrightarrow G$$

est continue, donc

$$\varphi^{-1}(U)$$

est un ouvert de $G \times G$, contenant (e, e), et donc il existe un voisinage V de e tel que $V \times V$, soit contenu dans $\varphi^{-1}(U)$ et on a bien

$$VV^{-1} \subset U \quad .$$

4) <u>Pour tout $U \in \mathfrak{U}$, pour tout $a \in U$, il existe $V \in \mathfrak{U}$ tel que aV soit contenu dans U.</u> En effet $V = a^{-1}U$ est un ouvert qui contient

$$a^{-1}a = e \quad ,$$

c'est donc un élément de $\mathfrak{U}$ et $aV = U$ est contenu dans U.

5) <u>Pour tout $U \in \mathfrak{U}$ et pour tout $g \in G$, il existe $V \in \mathfrak{U}$ tel que</u>

$$gVg^{-1}$$

<u>soit contenu dans U</u>. En effet $V = g^{-1}Ug$ est un ouvert de G, il contient

$$geg^{-1} = e \quad ,$$

c'est donc un élément de $\mathfrak{U}$ et $gVg^{-1} = U$ est contenu dans U.

Réciproquement, étant donnés un groupe G et une famille $\mathfrak{U}$ de sous-ensembles de G contenant l'élément neutre e et ayant les cinq propriétés ci-dessus, alors il existe sur G une topologie et une seule telle que G soit un groupe topologique et telle que $\mathfrak{U}$ soit un système fondamental de voisinages de l'élément neutre e. Ceci est le cas par exemple si G est un groupe commutatif et $\mathfrak{U}$ un ensemble de sous-groupes de G tel que si $H_1, H_2 \in \mathfrak{U}$, alors

$$H_1 \cap H_2 \in \mathfrak{U} \quad .$$

On dira qu'un groupe topologique est séparé, s'il est séparé en tant qu'espace topologique.

Proposition :

Soit G un groupe topologique et soit $\mathfrak{U}$ l'ensemble des voisinages de l'élément neutre e de G. La condition nécessaire et suffisante pour que G soit séparé est que

$$\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U = \{e\} \quad .$$

En effet, si G est séparé, pour tout point s de G, il existe un voisinage U de e qui ne contient pas s, alors $\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U$ ne contient pas s. Réciproquement, on suppose que

$$\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U = \{e\}$$

et soient s et t deux points distincts de G ; alors $s^{-1}t$ est distinct de e et il existe $U \in \mathfrak{U}$ qui ne contient pas $s^{-1}t$. D'après la propriété 3) de $\mathfrak{U}$, il existe $V \in \mathfrak{U}$ tel que

$$VV^{-1} \subset U \quad .$$

S'il existait un point a qui appartienne à la fois à sV et à tV , alors s serait dans aV^{-1} , s^{-1} serait dans Va^{-1} , et t serait dans aV^{-1} , donc $s^{-1}t$ serait dans VV^{-1} , donc dans U ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc sV et tV sont disjoints, or ce sont des voisinages respectivement de s et t ; donc G est séparé.

§2. SOUS-GROUPES D'UN GROUPE TOPOLOGIQUE

Soit G un groupe topologique et soit H un sous-groupe de G. La topologie de G induit une topologie sur H et les applications

$$\varphi : (x, y) \longrightarrow x y^{-1} \quad \text{et} \quad \psi : x \longrightarrow x^{-1}$$

sont continues sur H pour cette topologie. Donc H est un groupe topologique. On dit que H est un sous-groupe (topologique) du groupe topologique G.

Proposition :

Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe de G, alors :

1) L'adhérence de H est aussi un sous-groupe de G ; et si H est distingué, $\overline{H}$ l'est aussi.

2) Si H est ouvert, alors il est fermé.

En effet, soient s et t deux éléments de $\overline{H}$ et soit U un voisinage quelconque de $s^{-1}t$. Puisque l'application qui à (s, t) fait correspondre $s^{-1}t$ est continue sur $G \times G$, il existe un voisinage V de s et un voisinage W de t tels que $V^{-1}W$ soit contenu dans U. Puisque s et t sont adhérents à H, il existe h appartenant à $V \cap H$ et il existe h' appartenant à $W \wedge H$. Alors $h^{-1}h'$ appartient à $V^{-1}W$, donc à U, et d'autre part $h^{-1}h'$ appartient à H puisque H est un sous-groupe. Donc tout voisinage de $s^{-1}t$ rencontre H, donc $s^{-1}t \in \overline{H}$, donc $\overline{H}$ est un sous-groupe. D'autre part, pour tout $s \in G$, l'application

$$f = L_s \circ R_{s^{-1}}$$

est un homéomorphisme de G, donc

$$\overline{f(H)} = f(\overline{H}) \quad ;$$

donc

$$s\overline{H}s^{-1} = f(\overline{H}) = \overline{f(H)} = \overline{sHs^{-1}} = \overline{H} \quad ,$$

c'est-à-dire que $\overline{H}$ est distingué, ce qui montre la première assertion.

La seconde assertion résulte du fait que si H est ouvert, alors les classes à gauche suivant H sont ouvertes et du fait que H est le complémentaire de la réunion des classes à gauche aH,, $a \in G$, distinctes de H.

Exemple :

On considère $G = GL(n, \mathbb{R})$. Alors l'ensemble $GL^+(n, \mathbb{R})$ des matrices de G de déterminant positif, est un sous-groupe de G, ouvert (car image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^+$). Il est donc aussi fermé d'après la proposition ci-dessus.

Soit $SL(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de G de déterminant égal à $+1$, on l'appelle le groupe linéaire spécial de degré n, c'est un sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{R})$.

Soit $O(n)$ l'ensemble des matrices de $GL(n, \mathbb{R})$ qui sont orthogonales, (c'est-à-dire des matrices a telles que

$${}^t a \cdot a = 1 \quad).$$

Les éléments de $O(n)$ sont donc les matrices $a = (a_{ik})$ qui vérifient

$$\sum_k a_{ki}\, a_{kj} = \delta_{ij} \qquad \text{(symbole de Kronecker)}.$$

L'application f_{ij} qui à a fait correspondre

$$\sum_k a_{ki}\, a_{kj}$$

est une application continue de $GL(n, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ et les applications f_{ij} sont en nombre fini, donc $O(n)$ est l'intersection finie des images réciproques de 0 ou 1, c'est donc un fermé ; d'autre part $O(n)$ est un groupe ; donc $O(n)$, groupe orthogonal, est un sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{R})$.

§3. ESPACES QUOTIENTS D'UN GROUPE TOPOLOGIQUE

Soit G un groupe et soit H un sous-groupe de G. On considère le quotient G/H , ensemble des classes à gauche de G selon H et on désigne par π la projection canonique de G sur G/H .

Si G a une structure de groupe topologique, on peut définir sur G/H une topologie de la manière suivante : un sous-ensemble O de G/H sera un ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(O)$ est un ouvert de G. (On vérifie facilement que ceci définit bien une topologie). On a alors les propriétés suivantes :

1) La projection canonique

$$\pi : G \longrightarrow G/H$$

est continue. Car par définition même de la topologie, l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert.

2) La projection canonique

$$\pi : G \longrightarrow G/H$$

est une application ouverte. Car si U est un ouvert de G, alors

$$\pi^{-1}\left(\pi(U)\right)$$

est un ouvert de G puisqu'il est égal à UH .

<u>Remarque</u> :

Tout sous-ensemble ouvert O de G/H est de la forme $\pi(U)$ où U est un ouvert de G, car $U = \pi^{-1}(O)$ est un ouvert de G, d'après la définition de la topologie et

$$O = \pi\left(\pi^{-1}(O)\right)$$

puisque π est surjective.

On considère la loi d'opération à gauche de G dans G/H, c'est-à-dire l'application $\varphi' : G \times G/H \longrightarrow G/H$ qui à $\left(s, \pi(x)\right)$ fait correspondre $\pi(sx)$. Pour $s \in G$, on considère l'application $T_s : G/H \longrightarrow G/H$ définie par

$$T_s(\xi) = \varphi'(s, \xi) \quad .$$

On a les propriétés suivantes :

1) <u>L'application $\varphi' : G \times G/H \longrightarrow G/H$ est continue</u>. Car si O est un ouvert contenant $\pi(sx)$, d'après la remarque précédente

$$O = \pi(U)$$

où U est un ouvert de G et puisque φ est continue il existe un voisinage U_1 de s et un voisinage U_2 de t tels que

$$\varphi(U_1, U_2) \subset U \quad ;$$

d'autre part

$$\varphi'\left(U_1, \pi(U_2)\right) = \pi\left(\varphi(U_1, U_2)\right)$$

donc

$$\varphi'\left(U_1, \pi(U_2)\right)$$

est contenu dans $\pi(U)$, c'est-à-dire dans O, ce qui signifie que φ' est continue car $U_1 \times \pi(U_2)$ est un voisinage de $\left(s, \pi(x)\right)$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\varphi} & G \\ {\scriptstyle \mathrm{id.}}\downarrow \quad \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ G \times G/H & \xrightarrow{\varphi'} & G/H \end{array}$$

où φ représente la multiplication.

2) <u>L'application</u> T_s <u>est un homéomorphisme de G/H sur G/H</u> . D'abord, elle est continue, car si O est un ouvert de G/H , il est de la forme $O = \pi(U)$ où U est un ouvert de G et $T_s^{-1}(O)$ est l'ensemble des éléments de la forme $\pi(x)$ tels que

$$sx \in U$$

donc

$$\pi^{-1}\left(T_s^{-1}(O)\right) = L_s^{-1}(U)$$

qui est ouvert et donc $T_s^{-1}(O)$ est ouvert. D'autre part, l'application T_s est inversible, son inverse faisant correspondre à $\xi = \pi(a)$ l'élément

$$(T_s)^{-1}(\xi) = \pi(s^{-1}a)$$

qui est bien indépendant du choix du représentant a ;

et cette application inverse est continue, car si $O = \pi(U)$ est un ouvert de G/H , U étant ouvert de G, alors $T_s(O)$ est l'ensemble des éléments de la forme $\pi(sx)$ où $x \in U$, il est donc ouvert car son image réciproque par π est l'ouvert

$$L_s(U) \quad .$$

Si H est un sous-groupe distingué de G, le quotient G/H est alors muni d'une structure de groupe. Si $\varphi : G \times G \longrightarrow G$ désigne la multiplication dans G et $\psi : G \longrightarrow G$ le passage à l'inverse dans G, alors la multiplication dans G/H , représentée par $\overline{\varphi}$ est définie par le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi \times \pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/H \times G/H \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & G/H \end{tikzcd}$$

et le passage à l'inverse, représenté par $\overline{\Psi}$ est définie par le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/H \arrow[r, "\overline{\Psi}"] & G/H \end{tikzcd}$$

On voit, à l'aide de ce dernier diagramme, que l'application $\overline{\Psi}$ est continue : en effet, si O est un ouvert de G/H , de la forme $O = \pi(U)$ où U est un ouvert de G, alors $\psi^{-1}(U)$ est ouvert puisque ψ est continue (car G est supposé être un groupe topologique) et

$$\overline{\Psi}^{-1}(O) = \pi\left(\psi^{-1}(U)\right)$$

est ouvert. De façon analogue, en s'appuyant sur le premier diagramme commutatif, on montre que l'application $\overline{\varphi}$ est continue. Donc, si H est distingué, le groupe G/H a une structure de groupe topologique.

Dans le cas général (c'est-à-dire H pas obligatoirement distingué) :

Proposition :

Soit G un groupe topologique séparé et soit H un sous-groupe de G. Pour que l'espace topologique G/H soit séparé, il faut et il suffit que H soit fermé.

Car si G/H est séparé, le point $\{\pi(e)\}$ est un fermé et

$$H = \pi^{-1}\left(\{\pi(e)\}\right)$$

est fermé puisque π est continue.

Réciproquement, on suppose H fermé ; soient $\xi = \pi(s)$ et $\eta = \pi(t)$ deux points de G/H , s'ils sont distincts, $s^{-1}t$ n'appartient pas à H et puisque H est fermé, il existe un voisinage V de $s^{-1}t$ qui ne rencontre pas H. D'après une propriété des voisinages dans un groupe topologique, il existe un voisinage V_1 de s et un voisinage V_2 de t tels que le voisinage $V_1^{-1} V_2$ de $s^{-1}t$ soit contenu dans V. Aloss $V_\xi = \pi(V_1)$ est un voisinage de ξ et $V_\eta = \pi(V_2)$ est un voisinage de η ; s'il existait un élément α de G/H appartenant à V_ξ et à V_η, on aurait

$$\alpha = \pi(v_1)$$

avec $v_1 \in V_1$ et

$$\alpha = \pi(v_2)$$

avec $v_2 \in V_2$, v_1 et v_2 seraient dans la même classe selon H, c'est-à-dire que $v_1^{-1} v_2$ serait un élément de $V_1^{-1} V_2$

appartenant à H, ce qui est absurde, donc ξ et η ont des voisinages respectifs V_ξ et V_η qui sont disjoints, donc G/H est séparé.

§4. HOMOMORPHISMES ET ISOMORPHISMES DE GROUPES TOPOLOGIQUES

Définitions :

Soient G et G' deux groupes topologiques et soit φ une application de G dans G'. On dit que φ est un homomorphisme du groupe topologique G dans le groupe topologique G' si c'est un homomorphisme de groupes qui est une application continue. L'application φ est un isomorphisme (de groupes topologiques) de G sur G', si c'est un isomorphisme de groupes et un homéomorphisme d'espaces topologiques.

Un homomorphisme de groupe topologique est un homomorphisme ouvert si c'est une application ouverte.

Exemple :

Si H est un sous-groupe distingué du groupe topologique G, la projection canonique

$$\pi : G \longrightarrow G/H$$

est un homomorphisme ouvert de groupes topologiques.

Théorème :

Soient G et G' deux groupes topologiques et

$$\varphi : G \longrightarrow G'$$

un homomorphisme ouvert, surjectif. Soit N le noyau de φ. Alors il existe un isomorphisme $\overline{\varphi}$ de G/N sur G' tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & G' \\ G/N \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

En effet, d'abord le noyau N est un sous-groupe distingué de G, et G/N est donc bien muni d'une structure de groupe topologique. On peut définir l'application

$$\overline{\varphi} : G/N \longrightarrow G'$$

par

$$\overline{\varphi}\left(\pi(x)\right) = \varphi(x)$$

pour $x \in G$, cette application est un isomorphisme de groupes. Cette application $\overline{\varphi}$ est continue car si O est un ouvert de G', alors $\overline{\varphi}^{-1}(O)$ est un ouvert de G/N , car c'est

$$\pi\left(\varphi^{-1}(O)\right)$$

et π est ouverte et φ continue. (Remarque : cette démonstration de la continuité de $\overline{\varphi}$ n'utilise pas le fait que φ est ouverte ; ce fait n'est utile que pour montrer la continuité de $\overline{\varphi}^{-1}$). L'application $\overline{\varphi}^{-1}$ est continue car si O est un ouvert de G/N , alors

$$U = \pi^{-1}(O)$$

est un ouvert de G et

$$\overline{\varphi}(O) = \varphi(U)$$

est ouvert puisque φ est supposée ouverte.

Remarque :

On montrera ultérieurement que si G et G' sont des groupes topologiques localement compacts et à base dénombrable, alors tout homomorphisme de G sur G' est ouvert, c'est-à-dire que la conclusion du théorème précédent vaut alors pour tout homomorphisme surjectif.

§5. COMPOSANTES CONNEXES D'UN GROUPE TOPOLOGIQUE

Définition :

Un groupe topologique est dit connexe s'il est connexe en tant qu'espace topologique.

Théorème :

Soit G un groupe topologique connexe et U un voisinage de l'élément neutre e tel que

$$U^{-1} = U \quad .$$

Alors G est engendré par U.

Remarque :

Pour tout voisinage W de e, il existe un voisinage U de e, contenu dans W et tel que

$$U^{-1} = U$$

(en effet,

$$U = W \cap W^{-1}$$

répond à la question) ; l'hypothèse du théorème n'est donc pas restrictive.

Démonstration du théorème :

Pour tout entier positif k, soit U^k l'ensemble des éléments de G de la forme $s_1 \, s_2 \, \ldots \, s_k$ où les s_i appartiennent à U. Pour $k = 1$,

$$U^k = U$$

est ouvert, pour $k > 1$,

$$U^k = U \, U^{k-1} \quad ,$$

ce qui montre par récurrence que U^k est ouvert pour tout k.

Soit G' la réunion des U^k pour tous les entiers k, c'est un sous-groupe de G car si $s, t \in G'$, si $s = s_1 \dots s_k$ alors

$$\bar{s}^1 = \bar{s}_k^1 \dots \bar{s}_1^1$$

et les $\bar{s}_i^1$ appartiennent à U puisque

$$\bar{U}^1 = U \quad ,$$

donc $\bar{s}^1 \in U^k$ donc $\bar{s}^1 \in G'$ et si $t = t_1 \dots t_\ell$, alors $st \in U^{k+\ell}$ donc $st \in G'$. Puisque chaque U_k est ouvert, G' est ouvert, or tout sous-groupe ouvert d'un groupe topologique est fermé ; le sous-ensemble G' est donc ouvert et fermé dans G, c'est donc G lui-même puisque G est supposé connexe, donc pour tout élément s de G, il existe un entier k et k éléments $s_1 \dots s_k$ de U tels que s soit égal au produit $s_1 \dots s_k$.

Proposition :

Soit G un groupe topologique et soit H un sous-groupe de G. Si H et G/H sont connexes, alors G est connexe.

En effet, si G est réunion de deux ouverts disjoints O_1 et O_2, alors G/H est réunion des deux ouverts $\pi(O_1)$ et $\pi(O_2)$. S'il existait un élément ξ commun à $\pi(O_1)$ et $\pi(O_2)$, on aurait

$$\xi = \pi(s_1) = \pi(s_2)$$

où $s_1 \in O_1$ et $s_2 \in O_2$, et la classe $s_1H = s_2H$ serait réunion des deux ouverts $s_1H \cap O_1$ et $s_1H \cap O_2$ qui sont disjoints puisque O_1 et O_2 le sont ; or $s_1H = L_{s_1}(H)$ est connexe puisque H est connexe, donc un des ouverts

$s_1H \cap O_1$ et $s_2H \cap O_2$ est vide, ce qui est absurde car $s_1 \in O_1$ et $s_2 \in O_2$, donc un tel ξ n'existe pas. Alors l'espace connexe G/H est réunion des deux ouverts disjoints $\pi(O_1)$ et $\pi(O_2)$, donc l'un de ces deux ouverts est vide et donc l'un des deux ouverts O_1 et O_2 est vide, c'est-à-dire que G est connexe.

Cette proposition est très souvent utilisée pour montrer qu'un groupe topologique est connexe.

Exemple :

Le groupe $GL^+(n, \mathbb{R})$ est connexe : pour $n = 1$,

$$GL^+(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$$

est connexe. Si $n > 1$, soit H le sous-groupe de $G = GL^+(n, \mathbb{R})$ des matrices de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où $A \in GL^+(n-1, \mathbb{R})$. Par l'application

$$B \longrightarrow (A, a_{12}, \ldots, a_{1n})$$

l'espace topologique H est homéomorphe à

$$GL^+(n-1, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-1}$$

donc si l'on suppose, par récurrence, que $GL^+(n-1, \mathbb{R})$ est connexe, alors H est connexe. On considère le quotient

$$GL^+(n, \mathbb{R})/H \quad .$$

deux matrices B et C sont dans la même classe selon H si $B^{-1}C \in H$, c'est-à-dire si et seulement si la première ligne de B est identique à la première ligne de C ; l'application de $GL^+(n, \mathbb{R})/H$ dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$ qui à $\pi(B)$ fait correspondre la première ligne de B, est un homéomorphisme, on peut donc identifier le quotient G/H à $\mathbb{R}^n - \{0\}$ qui est connexe puisque $n > 1$. Alors, d'après la proposition précédente, G est connexe puisque H et G/H le sont.

Autre exemple de groupe topologique connexe :

On peut montrer que

$$GL(n, \mathbb{C})$$

est connexe, par récurrence sur n à partir de $GL(1, \mathbb{C})$ qui est connexe, car il est égal à $\mathbb{C} - \{0\}$. (Ceci n'est pas vrai pour $GL(n, \mathbb{R})$ car $\mathbb{R} - \{0\}$ n'est pas connexe).

Théorème :

Soit G un groupe topologique et soit G_0 la composante connexe de G contenant l'élément neutre e. Alors G_0 est un sous-groupe, fermé, distingué, de G et la composante connexe de G contenant un élément s est la classe

$$sG_0 = G_0 s \quad .$$

D'abord, G_0 est fermé car c'est une composante connexe. C'est un sous-groupe car si $s \in G_0$, alors $s^{-1}G_0$ contient e et est connexe puisque $L_{s^{-1}}$ est continue, donc $s^{-1}G_0$ est contenu dans la composante connexe G_0, donc pour tout $t \in G_0$, $s^{-1}t \in G_0$. Ce sous-groupe est distingué car pour tout $s \in G$,

sG_0s^{-1} est contenu dans G_0 puisque c'est un connexe contenant e.

Soit G_s la composante connexe de G contenant l'élément s. La classe sG_0 est connexe et contient s, donc

$$sG_0 \subset G_s \quad ,$$

d'autre part $s^{-1}G_s$ est connexe et contient e, donc

$$s^{-1}G_s \subset G_0 \quad ,$$

donc $G_s \subset sG_0$, donc

$$G_s = sG_0 \quad ;$$

et d'autre part

$$sG_0 = G_0 s \quad ;$$

puisque G_0 est un sous-groupe distingué.

Exemple :

La composante connexe neutre de $GL(n, \mathbb{R})$ est $GL^+(n, \mathbb{R})$. En effet, on a vu que $GL^+(n, \mathbb{R})$ était connexe, il contient 1 et si G_0 est la composante connexe de 1 de $GL^+(n, \mathbb{R})$, alors l'image $\varphi(G_0)$ de G_0 par l'application $\varphi = G \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ qui à une matrice associe son déterminant, est connexe ; donc

$$\varphi(G_0) \subset \mathbb{R}^+ \quad ,$$

donc $G_0 \subset GL^+(n, \mathbb{R})$, donc

$$G_0 = GL^+(n, \mathbb{R}) \quad .$$

Autre exemple :

On verra plus loin que la composante connexe neutre du groupe orthogonal $O(n)$ est

$$SO(n) = O(n) \cap GL^+(n, \mathbb{R}) \quad .$$

§6. ESPACE HOMOGENE D'UN GROUPE TOPOLOGIQUE ET GROUPES TOPOLOGIQUES LOCALEMENT COMPACTS.

Définitions :

Soient X un espace topologique et G un groupe topologique. On dit que G est un groupe de transformations de X si il existe une application continue φ de $G \times X$ dans X vérifiant les deux conditions suivantes :

1) $\varphi(st, x) = \varphi\big(s, \varphi(t, x)\big)$ pour tous s et t dans G et tout x dans X.

2) $\varphi(e, x) = x$ pour tout x dans X.

On dit aussi que G opère dans X.

Pour $s \in G$ et $x \in X$, on note en général

$$\varphi(s, x) = sx \quad .$$

Soit $T_s : X \longrightarrow X$ l'application définie par

$$T_s(x) = sx \quad .$$

Pour tout $s \in G$, T_s est un homéomorphisme et

$$(T_s)^{-1} = T_{s^{-1}} \quad .$$

On dit que G opère effectivement dans X si T_s n'est l'identité que pour $s = e$; c'est-à-dire si la condition "$sx = x$ pour tout $x \in X$" entraîne $s = e$.

Soit x_0 un point de X. Soit H l'ensemble des éléments s de G tels que

$$sx_0 = x_0 \quad ,$$

c'est un sous-groupe de G. Ce sous-groupe H est appelé le groupe d'isotropie (ou de stabilité) de G au point x_0.

Propriété :

Si X est séparé, le groupe de stabilité H d'un point x_0 est fermé. Car l'application

$$\beta : G \longrightarrow X$$

qui à $s \in G$ fait correspondre sx_0, est continue et

$$H = \beta^{-1}(\{x_0\})$$

est donc image réciproque de $\{x_0\}$ qui est fermé.

On dit que G opère transitivement dans X si pour tous points x, y de X, il existe $s \in G$ tel que

$$sx = y \quad .$$

Si G opère transitivement dans X, on dit que X est un espace homogène de G.

Exemple 1 :

Si G est un groupe topologique et H un sous-groupe de G, le quotient G/H est un espace homogène de G. La loi d'opération est définie par

$$\varphi(s, tH) = stH \quad .$$

Exemple 2 :

La sphère S^n est un espace homogène du groupe orthogonal $O(n + 1)$: la sphère S^n de dimension n est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$ des points $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ vérifiant

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1 \quad .$$

On considère l'application

$$\varphi : O(n + 1) \times S^n \longrightarrow S^n$$

qui à $\big(a, (x_1, \ldots, x_{n+1})\big)$ fait correspondre le transformé de

$(x_1, \ldots, x_{n+1})$ par la matrice a ; ce transformé appartient bien à S^n puisque a est orthogonale. On vérifie immédiatement que c'est une loi d'opération du groupe $O(n+1)$ dans S^n. Cette loi d'opération est transitive, car il existe toujours une matrice orthogonale d'ordre $n+1$ qui fait passer d'un point de S^n à un autre. Quel est le groupe de stabilité du point $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, par exemple ? : on a toujours

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & & \\ \vdots & & \\ a_{n+1,1} & & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n+1,1} \end{pmatrix}$$

Pour que la matrice (a_{ij}) laisse invariant e_1, il faut donc qu'elle soit de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} \cdots a_{1,n+1} \\ 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{pmatrix} .$$

Une telle matrice orthogonale est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{pmatrix}$$

où $A \in O(n)$. Le groupe d'isotropie de e_1 est le sous-ensemble de $O(n+1)$ des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{pmatrix}$$

où $A \in O(n)$; il peut être identifié à $O(n)$.

Soit G un groupe topologique et X un espace homogène de G. Soit x_0 un point de X et soit H le groupe d'isotropie de G en x_0. On considère le quotient G/H et on note toujours π la projection canonique : $G \longrightarrow G/H$. Si s et t sont deux éléments de G tels que

$$\pi(s) = \pi(t)$$

alors

$$sx_0 = tx_0$$

car $s^{-1}t = h$, élément de H et donc

$$tx_0 = shx_0 = sx_0 \quad .$$

Réciproquement si $sx_0 = tx_0$, alors

$$s^{-1}tx_0 = x_0 \quad ,$$

c'est-à-dire que $s^{-1} \in H$; c'est-à-dire que s et t sont dans la même classe selon H. Ceci permet de définir une application

$$\alpha : G/H \longrightarrow X$$

par $\alpha\big(\pi(s)\big) = sx_0$.

Proposition :

Soit X un espace homogène d'un groupe topologique G. Soit H le groupe d'isotropie en un point x_0. Alors l'application canonique $\alpha : G/H \longrightarrow X$ est bijective et continue.

En effet, α est surjective puisque G opère transitivement dans X ; elle est injective par sa définition même. Le diagramme :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\ G/H \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif, β étant l'application définie par

$$\beta(s) = sx_0 \quad ;$$

l'application β est continue. Si O est un ouvert de X alors

$$\pi^{-1}\left(\alpha^{-1}(O)\right) = \beta^{-1}(O) \quad ,$$

et $\beta^{-1}(O)$ est ouvert, donc $\alpha^{-1}(O)$ est un ouvert de G/H , donc α est continue.

On rappelle qu'un espace topologique est dit localement compact s'il est séparé et si tout point possède un voisinage dont l'adhérence est compacte.

Théorème :

Soit X un espace homogène d'un groupe topologique G. On suppose que X et G sont localement compacts et à base dénombrable. Soit H le groupe d'isotropie de G en un point x_0 , Alors l'application canonique

$$\alpha : G/H \longrightarrow X$$

est un homéomorphisme.

<u>Lemme</u> :

Soit X un espace topologique localement compact tel que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

où les X_n sont des fermés de X. Alors un des sous-ensembles contient un ouvert de X.

En effet, si chaque X_n ne contenait pas d'ouvert de X, si U_0 est un ouvert de X tel que $\overline{U}_0$ soit compact (U_0 existe puisque X est localement compact), alors $U_0 \cap \complement X_1$ serait un ouvert non vide, et on pourrait trouver un ouvert U_1 contenu dans $U_0 \cap \complement X_1$ tel que $\overline{U}_1$ serait compact et

$$\overline{U}_1 \cap X_1 = \emptyset \quad .$$

Alors $U_1 \cap \complement X_2$ serait un ouvert non vide et on pourrait trouver un ouvert U_2 contenu dans $U_1 \cap \complement X_2$ tel que $\overline{U}_2$ serait compact et

$$\overline{U}_2 \cap X_2 = \emptyset \quad ,$$

... et ainsi de suite, on construirait une suite d'ouverts U_n de X tels que

$$U_{n-1} \supset \overline{U}_n$$

et

$$\overline{U}_n \cap X_n = \emptyset \quad .$$

Dans le compact $\overline{U}_0$, la suite $\overline{U}_0, \overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_n, \ldots$ serait une suite décroissante (car $\overline{U}_{n-1} \supset \overline{U}_n$) de fermés, dont l'intersection serait donc non vide ; or cette intersection ne rencontrerait aucun X_n puisque $\overline{U}_n \cap X_n = \emptyset$.

ceci est impossible puisque X est réunion des X_n . Donc un au moins des sous-ensembles X_n contient un ouvert de X. c.q.f.d.

Démonstration du théorème :

On va montrer que l'application

$$\beta : G \longrightarrow X \quad ,$$

qui à s fait correspondre sx_0 , est ouverte. Soit V un ouvert de G, soit x un point de $\beta(V)$, il est l'image par β d'un certain $s \in V$:

$$x = \beta(s) \quad .$$

L'application

$$t \longrightarrow s t^{-1} t$$

est continue et

$$s e^{-1} e = s$$

appartient à V, donc il existe un voisinage U de e tel que

$$s U^{-1} U \subset V$$

et il existe un tel U dont l'adhérence est compacte (car G est localement compact) et tel que

$$s \overline{U}^{-1} U \subset V \quad .$$

La famille $\{tU\}_{t \in G}$ forme un recouvrement ouvert de G et puisque G est à base dénombrable, on peut trouver un sous-ensemble dénombrable $\{t_1, \ldots, t_n, \ldots\}$ tel que

$$\{t_n U\}_{n=1,\ldots,\infty}$$

soit un recouvrement ouvert de G. On a

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} t_n U = \bigcup_{n=1}^{\infty} t_n \overline{U}$$

et si on pose

$$X_n = \beta(t_n \overline{U}) \quad ,$$

alors

$$X = \beta(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \quad .$$

Pour chaque n, $t_n\overline{U}$ est compact et l'image continue par β d'un compact dans l'espace séparé X est compacte, donc X_n est compact et puisque X est séparé, X_n est fermé. Donc X est réunion dénombrable des fermés X_n et le lemme dit qu'il existe n tel que

$$X_n = \beta(t_n\overline{U})$$

contienne un ouvert Z de X. Or $\beta(t_n\overline{U}) = t_n\overline{U}x_0$, donc

$$\beta(\overline{U}) = \overline{U}x_0 = t_n^{-1}\ \beta(t_n\overline{U})$$

et puisque l'application $x \longrightarrow t_n^{-1}x$ est un homéomorphisme et que $\beta(t_n\overline{U})$ contient un ouvert Z, $\beta(\overline{U})$ contient l'ouvert $W = t_n^{-1}Z$. Soit y un point de W, y est dans $\beta(\overline{U})$ donc il existe $h \in \overline{U}$ tel que

$$y = \beta(h) = hx_0 \quad ;$$

alors

$$\beta(s) = sh^{-1}hx_0$$

appartient à $sh^{-1}W$; d'autre part, $sh^{-1}W$ est contenu dans $sh^{-1}\ \beta(\overline{U}) = sh^{-1}\overline{U}x_0$ et puisque

$$sh^{-1}\overline{U} \subset s\overline{U}^{-1} \subset V \quad ,$$

$sh^{-1}W$ est contenu dans $Vx_0 = \beta(V)$. On a donc trouvé un ouvert $sh^{-1}W$ qui contient

$$x = \beta(s)$$

et qui est contenu dans $\beta(V)$, donc $\beta(V)$ est voisinage de chacun de ses points, donc il est ouvert. L'application β est donc ouverte. On en déduit facilement que l'application α est ouverte : en effet, si O est un ouvert de G/H , alors

$$\alpha(0) = \beta\left(\bar{\pi}^1(0)\right)$$

qui est ouvert. L'application α qui est bijective, continue est ouverte est donc bien un homéomorphisme de G/H sur X.

Application 1 :

Le groupe

$$SO(n) = O(n) \cap GL^+(n, \mathbb{R})$$

est connexe : le groupe

$$SO(n + 1)$$

opère transitivement sur la sphère S^n de dimension n ;
le groupe d'isotropie de $SO(n + 1)$ au point $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ est le sous-groupe de $SO(n + 1)$ des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{pmatrix}$$

où $A \in SO(n)$. Donc, d'après le théorème précédent, le quotient

$$SO(n + 1)/SO(n)$$

est homéomorphe à S_n, donc il est connexe. Alors si $SO(n)$ est connexe, $SO(n + 1)$ est connexe, ceci montre par récurrence que pour tout n, $SO(n)$ est connexe.

La composante connexe neutre de $O(n)$ est contenue dans l'image réciproque de $+ 1$ par l'application qui à une matrice associe son déterminant, cette image réciproque est $SO(n)$. Puisque $SO(n)$ est connexe, c'est la composante neutre de $O(n)$.

Application 2 :

On a montré au §5 que $GL^+(n, \mathbb{R})$ était connexe. Dans cette démonstration, le fait que

$$GL^+(n, \mathbb{R})/H$$

est homéomorphe à $\mathbb{R}^n - \{0\}$ peut s'obtenir en appliquant le théorème précédent car $GL^+(n, \mathbb{R})$ opère transitivement sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$ et H est le groupe d'isotropie de $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$.

Application 3 :

Soit X un ensemble et G un groupe opérant transitivement sur X (ceci sans topologie). Soit H le groupe d'isotropie de G en un point x_0 de X. Soit α l'application canonique de G/H sur X. Alors si G est muni d'une topologie, on peut définir sur X une topologie et une seule telle que α soit un homéomorphisme.

Variété grassmannienne :

Soit V un espace vectoriel réel de dimension N. Soit $G_{N,n}$ l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de dimension n de V. On considère le groupe topologique

$$GL(V) = GL(N, \mathbb{R}) \quad ,$$

il opère transitivement sur $G_{N,n}$ de la façon suivante : si $W \in G_{N,n}$ et $s \in GL(V)$ alors sW est l'ensemble des transformés par s des vecteurs de W (sW est bien un élément de $G_{N,n}$ puisque s est un automorphisme). Si W et W' sont des éléments de $G_{N,n}$, il existe des bases $\{e_1, \dots, e_n, \dots, e_N\}$ et $\{e'_1, \dots, e'_n, \dots, e'_N\}$ de V telles que

$$\{e_1, \dots, e_n\}$$

soit une base de W et

$$\{e'_1, \ldots, e'_n\}$$

une base de W', alors il existe un automorphisme s tel que

$$s(e_i) = e'_i$$

pour tout i de 1 à N, donc tel que

$$sW = W' \quad ,$$

ce qui prouve que la loi d'opération est transitive. On identifie V à $\mathbb{R}^n$ et soit $\{e_1, \ldots, e_N\}$ sa base usuelle ; soit W_0 le sous-espace engendré par $\{e_1, \ldots, e_n\}$; le groupe d'isotropie de $GL(n, \mathbb{R})$ en W_0 est l'ensemble H des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \\ \vdots & & \vdots & B \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & \\ & 0 & & C \end{pmatrix}$$

et $G_{N,n}$ est, d'après le théorème précédent, homéomorphe à $GL(N, \mathbb{R})/H$. L'ensemble $G_{N,n}$ s'appelle une <u>variété grassmannienne</u>. On peut montrer que $G_{N,n}$ est compacte et connexe.