Yozo Matsushima

Chapitre III Groupes de Lie

Cours de l'institut Fourier, tome 1 (1966), p. 1-64
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1966__1__A3_0>

Chapitre III

GROUPES DE LIE

§1. GROUPES DE LIE ET ALGEBRES DE LIE

Définition :

Un ensemble G vérifiant les conditions suivantes est appelé un groupe de Lie :

1) L'ensemble G est muni d'une structure de groupe et d'une structure de variété différentiable à base dénombrable.

2) L'application

$$\psi : G \longrightarrow G$$

qui à x fait correspondre x^{-1} est différentiable.

3) L'application

$$\varphi : G \times G \longrightarrow G$$

qui à (x, y) fait correspondre xy est différentiable.

Ces conditions entraînent qu'un groupe de Lie est un groupe topologique, localement compact, à base dénombrable. Et c'est en particulier une variété paracompacte.

Soit G_0 la composante connexe neutre de G, c'est un sous-groupe distingué de G. Les composantes connexes de G sont ouvertes car G est localement connexe ; G_0 est donc une variété différentiable à base dénombrable, vérifiant les conditions 3 et 4, donc G_0 <u>est un groupe de Lie</u>.

Pour $g \in G$, L_g et R_g désignent les translations respectivement à gauche et à droite, définies par $L_g(x) = gx$ et $R_g x = xg$. Ce sont des difféomorphismes de la variété G car l'application φ définie par $\varphi(g, x) = L_g x$ est différentiable et

$$(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$$

(de même pour R_g).

Si φ est un difféomorphisme de M, et si X est un champ de vecteur sur M, $\varphi_* X$ est un champ de vecteur sur M (défini par

$$(\varphi_* X)_p = (\varphi_*)_{\varphi^{-1}(p)} \, X_{\varphi^{-1}(p)} \quad).$$

<u>Définition</u> :

<u>Un champ de vecteur X sur G, groupe de Lie, est dit invariant à gauche (resp. à droite) si</u>

$$(L_g)_* X = X$$

<u>pour tout $g \in G$ (resp.</u> $(R_g)_* X = X$) .

On écrira parfois L_g pour $(L_g)_*$ et R_g pour $(R_g)_*$.

Soit $\mathfrak{G}$ l'ensemble de tous les champs de vecteurs sur G, invariants à gauche, $\mathfrak{G}$ est une algèbre de Lie par rapport au crochet de Poisson. En effet, si $X, Y \in \mathfrak{G}$, alors pour tout $s \in G$,

$$L_s(\lambda X + \mu Y) = \lambda\, L_s X + \mu\, L_s Y = \lambda X + \mu Y$$

et

$$L_s[X, Y] = \left[L_s X, L_s Y\right] = [X, Y]$$

(car pour tout difféomorphisme φ, on a

$$\varphi_*[X, Y] = [\varphi_* X, \varphi_* Y]$$

Définition :

L'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ de tous les champs de vecteurs sur G, invariants à gauche est l'algèbre de Lie du groupe G.

Théorème :

La dimension d'un groupe de Lie G est égale à la dimension de son algèbre de Lie $\mathfrak{G}$.

En effet, soit α l'application de $\mathfrak{G}$ dans $T_e(G)$, (espace tangent au point e, unité de G) qui à X associe X_e . C'est une application linéaire. Pour tout $g, h \in G$, on a :

$$X_{gh} = (L_g)_h\, X_h \quad ,$$

en particulier si $h = e$,

$$X_g = (L_g)_e\, X_e$$

donc si $X_e = 0$, alors

$$X_g = (L_g)_e\, 0 = 0$$

pour tout $g \in G$, ceci montre que α est une application injective de $\mathfrak{G}$ dans $T_e(G)$. Elle est aussi surjective, en effet soit $u \in T_e(G)$, on considère le champ de vecteur X défini par

$$X_g = (L_g)_e\, u$$

pour tout $g \in G$. C'est un champ de vecteur différentiable sur G car si U est un voisinage de e dans lequel $(x^1, \ldots, x^n)$ est un système de coordonnées locales tel que

$$x^1(e) = \ldots = x^n(e) = 0 \quad ,$$

soit W un voisinage de e tel que

$$WW \subset U \quad ,$$

alors l'application φ qui à (g, h) fait correspondre gh est définie dans W par

$$x^i(gh) = \varphi^i\big(x^1(g), \ldots, x^n(g), x^1(h), \ldots, x^n(h)\big)$$

pour $i = 1, \ldots, n$ où les φ^i sont des fonctions différentiables de $2n$ variables dans un voisinage de $(0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0)$, donc pour $g \in W$, on a

$$x^i \circ L_g = \varphi^i\big(x^1(g), \ldots, x^n(g), x^1, \ldots, x^n\big)$$

et si $f \in C^\infty(G)$ alors

$$(Xf)(g) = X_g \cdot f = \big((L_g)_e\, u\big)\, f = u(f \circ L_g)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial(f \circ L_g)}{\partial x^i}\right)_{x = 0}$$

si $a_1, \ldots, a_n$ sont les composantes de u par rapport à la base $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$, et

$$\left(\frac{\partial(f \circ L_g)}{\partial x^i}\right)_{x=0} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^k}\right)_{x=0} \left(\frac{\partial \varphi^k\big(x^1(g), \ldots, x^n(g), x^1, \ldots, x^n\big)}{\partial x^i}\right)_{x=0}$$

qui sont des fonctions différentiables de la variable g.

Donc l'application Xf est différentiable dans W. Si $t \in G$ et $g \in W$ alors

$$\begin{aligned}(Xf)(tg) &= X_{tg}\, f \\ &= (L_t)_g\, X_g f \\ &= X_g(f \circ L_t)\end{aligned}$$

et $f \circ L_t$ étant différentiable, l'application qui à g associe $X_g(f \circ L_t)$ est différentiable puisque Xf est différentiable dans W et

$$g = L_{t^{-1}}(tg) \quad ,$$

donc, pour t fixe, ceci prouve que Xf est différentiable dans tW, et comme tout point de G s'écrit sous la forme tg où $g \in W$, Xf est différentiable sur G, pour toute $f \in C^{\infty}(G)$, donc X est un champ de vecteur différentiable ; il est invariant à gauche : en effet, pour tout g et tout $h \in G$, on a

$$\begin{aligned}(L_h X)_{hg}(f) &= X_g(f \circ L_h) \\ &= \big((L_g)_e\, u\big)\,(f \circ L_h) \\ &= u(f \circ L_h \circ L_g) \\ &= u(f \circ L_{hg}) \\ &= \big((L_{hg})_e\, u\big)\,(f) \\ &= X_{hg}(f) \quad .\end{aligned}$$

Le champ de vecteur X est donc un élément de $\mathfrak{G}$ tel que (d'après sa définition)

$$\alpha(X) = X_e = u \quad .$$

L'application α est donc surjective. C'est donc une application linéaire bijective de $\mathfrak{G}$ sur $T_e(G)$, donc la dimension de $\mathfrak{G}$ est égale à la dimension de $T_e(G)$, c'est-à-dire à la dimension de G.

§2. SOUS-GROUPES A UN PARAMETRE D'UN GROUPE DE LIE ET CHAMPS DE VECTEURS INVARIANTS.

Soit G un groupe de Lie. Par définition un sous-groupe à un paramètre de G est une courbe différentiable $a : \mathbb{R} \longrightarrow G$ telle que

$$a(t)\ a(s) = a(t+s) \qquad \text{pour tous } t, s \in \mathbb{R}\ .$$

Alors $R_{a(t)}$ et $L_{a(t)}$ sont des groupes de transformations à un paramètre de G.

Lemme 1 :

La transformation infinitésimale X de $R_{a(t)}$ est un champ de vecteurs invariant à gauche.

En effet, pour $h \in G$ et $F \in C^\infty(G)$, on a :

$$\begin{aligned} X_h F &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(F(R_{a(t)}h) - F(h) \right) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(F(ha(t)) - F(h) \right) \quad . \end{aligned}$$

Donc si $f \in C^\infty(G)$, on a

$$\begin{aligned} (L_s X)_g f &= X_{\bar{s}^1 g}(f \circ L_s) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[(f\circ L_s)(\bar{s}^1 ga(t)) - (f\circ L_s)(\bar{s}^1 g) \right] \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[f(ga(t)) - f(g) \right] \\ &= X_g f \quad . \end{aligned}$$

Donc
$$L_s X = X \qquad \text{pour tout } s \in G\ .$$

On va voir que réciproquement tout champ de vecteur $X \in \mathfrak{G}$ s'obtient de cette manière.

Lemme 2 :

Tout champ de vecteur $X \in \mathfrak{G}$ est complet et on a

$$L_g \circ (\mathrm{Exp}\ tX) = (\mathrm{Exp}\ tX) \circ L_g$$

pour tout $g \in G$ et tout $t \in \mathbb{R}$.

En effet, il existe un voisinage U de e et un nombre $\epsilon > 0$ et une transformation locale φ_t tels que

1) Si $|t| < \epsilon$, la source de φ_t contient U et l'application de $]-\epsilon, +\epsilon[\times U$, dans G qui à (t, x) associe $\varphi_t(x)$ est différentiable.

2) Pour tout $p \in U$, X_p est le vecteur à φ en p.

3) Si $|s|$, $|t|$ et $|s+t|$ sont inférieurs à ϵ, alors

$$\varphi_s\left(\varphi_t(x)\right) = \varphi_{s+t}(x) \qquad \text{pour tout } x \in U \quad .$$

(Ceci résulte de l'intégration d'un système d'équations différentielles).

Pour $h \in G$, soit alors $U_h = L_h U$ et $\varphi_t^h = L_h \circ \varphi_t \circ L_{h^{-1}}$.

La famille $\left\{U_h, \varphi_t^h, \epsilon\right\}_{h \in G}$ est alors un groupe local dont la transformation infinitésimale est X ; et comme ϵ ne dépend pas de h, ceci prouve que X est complet.

Pour tout difféomorphisme θ de G, on a

$$\theta \circ (\mathrm{Exp}\ tX) \circ \theta^{-1} = \mathrm{Exp}\ t(\theta_* X) \quad ;$$

en particulier pour $\theta = L_s$, on a

$$L_s \circ \mathrm{Exp}\ tX \circ L_{s^{-1}} = \mathrm{Exp}\ t(L_s X)$$
$$= \mathrm{Exp}\ tX \quad .$$

C'est-à-dire

$$L_s \circ \mathrm{Exp}\ tX = \mathrm{Exp}\ tX \circ L_s \quad .$$

<u>Lemme 3</u> :

<u>Soit</u> φ_t <u>un groupe de transformations à un paramètre de G tel que</u>

$$L_g \circ \varphi_t = \varphi_t \circ L_g$$

<u>pour tout</u> $g \in G$ <u>et tout</u> $t \in \mathbb{R}$. <u>Soit</u> $a(t) = \varphi_t(e)$. <u>Alors a est un sous-groupe à un paramètre de G et</u> $\varphi_t = R_{a(t)}$ <u>pour tout</u> $t \in \mathbb{R}$.

D'abord a est un sous-groupe à un paramètre car c'est une application différentiable de $\mathbb{R}$ dans G telle que :

$$a(s+t) = \varphi_{t+s}(e) = \varphi_t\left[\varphi_s(e)\right] = \varphi_t\left[a(s)\right] = \varphi_t \circ L_{a(s)}(e)$$
$$= L_{a(s)} \circ \varphi_t(e)$$
$$= a(s)\ a(t) \quad .$$

D'autre part si $t \in \mathbb{R}$ et $g \in G$,

$$\begin{aligned} \varphi_t(g) &= \varphi_t \circ L_g(e) \\ &= L_g \circ \varphi_t(e) \\ &= g\ a(t) \\ &= R_{a(t)}\ g \end{aligned}$$

donc

$$\varphi_t = R_{a(t)} \quad .$$

Proposition :

Soit X un champ de vecteurs invariant à gauche. Alors X est complet et l'orbite

$$a(t) = (\mathrm{Exp}\ tX)(e) \quad ,$$

$t \in \mathbb{R}$, est un sous-groupe à un paramètre de G, tel que

$$\mathrm{Exp}\ tX = R_{a(t)} \quad .$$

En effet, d'après le lemme 2, X est complet et Exp tX vérifie les hypothèses du lemme 3, qui donne la conclusion.

Définition :

On pose

$$\exp tX = (\mathrm{Exp}\ tX)(e) \quad ;$$

c'est un sous-groupe à un paramètre de G tel que le vecteur tangent en $t = 0$ est X_e .

<u>Proposition</u> :

<u>Pour tout a, sous-groupe à un paramètre de G, il existe un champ de vecteur X invariant à gauche et un seul tel que</u>

$$\exp tX = a(t)$$

<u>pour tout $t \in \mathbb{R}$</u> .

En effet, d'après le lemme 1, la transformation infinitésimale de $R_{a(t)}$ est un champ de vecteur invariant à gauche, soit X. Alors

$$\operatorname{Exp} tX = R_{a(t)}$$

donc

$$\exp tX = a(t) \quad .$$

Si Y est un autre champ de vecteur invariant à gauche tel que

$$\exp tY = \exp tX \ ,$$

alors

$$Y_e = X_e$$

et donc

$$Y = X \quad .$$

<u>Exemple</u> :

Soit

$$G = GL(n, K)$$

($K = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$) ensemble des matrices inversibles de degré n, à coefficients dans K. Soit $A(t)$ un sous-groupe à un paramètre de G ; $A(t)$ est une matrice $\left(a_{ij}(t)\right)$ où les a_{ij} sont des fonctions différentiables de t. Soit

$$C = \left(\frac{dA(t)}{dt}\right)_{t\,=\,0} \quad ,$$

c'est la matrice dont les coefficients sont

$$\frac{da_{ij}}{dt}(0) \quad .$$

Et la dérivée en un autre point t est

$$\frac{dA(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[A(t + h) - A(h)\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[A(h) - 1\right] A(t) = C\ A(t) \quad .$$

Or le sous-groupe à un paramètre $\exp tC$ est tel que

$$\frac{d}{dt}(\exp tC) = C \exp tC$$

et

$$\exp 0C = 1 \quad ,$$

donc d'après l'unicité de la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dA}{dt} = CA$$

(système d'équations linéaires sur les coefficients), on a

$$A(t) = \exp tC \quad .$$

Soit $\mathfrak{G}$ l'algèbre de Lie de $GL(n, k)$. Pour tout $X \in \mathfrak{G}$, il existe donc

$$C(X) \in g\ell(n, K)$$

tel que

$$\exp tX = \exp tC(X) \quad .$$

L'application de $\mathfrak{G}$ dans $g\ell(n, K)$ qui à X fait correspondre $C(X)$ est linéaire. Pour un champ de vecteur X, $C(X)$ est donné par

$$C(X) = \left[\frac{d}{dt} \exp tX\right]_{t=0} \quad .$$

Le vecteur tangent X_e a pour composantes les $X_e \cdot x_i^j$ par rapport à la base $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i^j}\right\}$ $\Big($où dans $g\ell(n, K)$ la fonction coordonnée x_i^j est celle qui à une matrice associe son coefficient de la ligne i et de la colonne j$\Big)$. On a

$$X_e \cdot x_i^j = \left[\frac{d \; x_i^j(\exp tX)}{dt}\right]_{t=0} = x_i^j\left[\left(\frac{d \exp tX}{dt}\right)_{t=0}\right] = x_i^j(C(X)).$$

Donc si on représente X_e par la matrice de ses composantes, on a

$$X_e = C(X) \quad .$$

Et inversement toute matrice $C \in g\ell(n, k)$ peut être considérée comme la matrice des coefficients d'un vecteur tangent X_e au point e. Ce vecteur X_e correspond biunivoquement à un champ de vecteur X invariant à gauche et tel que

$$\exp tX = \exp tC \quad .$$

On verra au paragraphe suivant que cette application linéaire est bijective de $\mathfrak{G}$ dans $g\ell(n, K)$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

§3. AUTOMORPHISMES ET REPRESENTATION ADJOINTE.

Un automorphisme θ du groupe de Lie G est un difféomorphisme de G tel que

$$\theta(xy) = \theta(x)\ \theta(y) \quad .$$

Si $g \in G$, soit

$$A_g(x) = gxg^{-1} \quad ,$$

alors

$$A_g = L_g \circ R_{g^{-1}} = R_{g^{-1}} \circ L_g$$

est un difféomorphisme de G et

$$\begin{aligned} A_g(x)\ A_g(y) &= gxg^{-1}\ gyg^{-1} \\ &= gxyg^{-1} \\ &= A_g(xy) \end{aligned}$$

c'est donc un automorphisme, que l'on appelle l'<u>automorphisme intérieur</u> de G par g.

Pour tout automorphisme θ de G, on a

$$\theta(gx) = \theta(g)\ \theta(x) \quad ,$$

ce qui s'écrit

$$\theta \circ L_g(x) = L_{\theta(g)} \circ \theta(x) \quad ,$$

donc

$$\theta \circ L_g = L_{\theta(g)} \circ \theta \quad ;$$

donc si X est invariant à gauche, $\theta_* X$ l'est aussi car

$$L_g(\theta_* X) = (L_g \circ \theta)_* X = \left(\theta \circ L_{\theta^{-1}(g)}\right)_* X = \theta_*\left(L_{\theta^{-1}(g)} X\right) = \theta_* X \quad .$$

Et l'application de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{G}$ qui à X fait correspondre $\theta_* X$ est linéaire, bijective et telle que

$$\theta_*\big([X, Y]\big) = [\theta_* X, \theta_* Y] \quad ,$$

c'est donc un automorphisme d'algèbre de Lie de $\mathfrak{G}$. Donc tout automorphisme de G induit de cette façon un automorphisme de $\mathfrak{G}$. En particulier l'automorphisme A_g induit sur $\mathfrak{G}$ un automorphisme que l'on note $Ad(g)$ (adjoint), il est défini par

$$Ad(g)X = (A_g)_* X = \big(R_{g^{-1}}\big)_* X \quad .$$

Et pour $g, h \in G$ on a

$$Ad(gh) = Ad(g) \circ Ad(h)$$

(car
$$A_{gh}(x) = ghxh^{-1}g^{-1}$$
$$= A_g\big(Ah(x)\big)$$

c'est-à-dire
$$A_{gh} = A_g \circ A_h$$

donc
$$(A_{gh})_* = (A_g)_* \circ (A_h)_* \quad).$$

Donc Ad est un homomorphisme de groupe de G dans $GL(\mathfrak{G})$.
Si $X \in \mathfrak{G}$, alors

$$Ad(\exp tX) \quad ,$$

$t \in \mathbb{R}$, est un sous-groupe à un paramètre de $GL(\mathfrak{G})$; il existe donc $C \in gl(\mathfrak{G})$ tel que

$$Ad(\exp tX) = \exp tC \quad .$$

On va montrer que C est l'endomorphisme de $\mathfrak{G}$, dit adjoint de X, noté $ad(X)$ et défini par

$$\big(ad(X)\big)(Y) = [X, Y] \quad ,$$

en effet :

$$C = \Big(\frac{d}{dt} Ad(\exp tX)\Big)_{t=0}$$

donc

$$C(Y) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\mathrm{Ad}(\exp tX)\, Y - \mathrm{Ad}(\exp 0X)\, Y \right]$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[(R_{\exp - tX})_* \; Y - Y \right]$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[(\mathrm{Exp} - tX)_* - Y \right]$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{-t} \left[Y - (\mathrm{Exp} - tX)_* \; Y \right]$$

$$= [X, Y] \quad .$$

On a donc

$$\boxed{\mathrm{Ad}(\exp tX) = \exp t \; \mathrm{ad}(X)} \qquad \text{pour} \quad X \in \mathfrak{G} \quad .$$

<u>Propriétés de la représentation adjointe</u> :

1) <u>Pour tout $X \in \mathfrak{G}$, $\mathrm{ad}(X)$ est une dérivation de l'algèbre $\mathfrak{G}$</u>. En effet, si $Y, Z \in \mathfrak{G}$, alors

$$\big(\mathrm{ad}(X)\big)[Y, Z] = \big[X, [Y, Z]\big]$$

$$= -\big[Y, [Z, X]\big] - \big[Z, [X, Y]\big] \quad \text{(d'après}$$

l'identité de Jacobi).

$$= +\big[Y, [X, Z]\big] + \big[[X, Y], Z\big]$$

$$= \big[Y, \mathrm{ad}(X) Z\big] + \big[\mathrm{ad}(X) Y, Z\big]$$

et d'autre part $\mathrm{ad}(X)$ est bien un endomorphisme de $\mathfrak{G}$.

2) <u>Pour tous $X, Y \in \mathfrak{G}$, on a</u> :

$$\mathrm{ad}\big([X, Y]\big) = \big[\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)\big] \quad .$$

En effet pour tout $Z \in \mathfrak{G}$,

$$\mathrm{ad}\left([X,\ Y]\right) Z = \left[[X,\ Y],\ Z\right]$$

$$= -\left[[Y,\ Z],\ X\right] - \left[[Z,\ X],\ Y\right] \quad \text{(d'après}$$

l'identité de Jacobi).

$$= \left[X,\ [Y,\ Z]\right] - \left[Y,\ [X,\ Z]\right]$$

$$= \left(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y) - \mathrm{ad}(Y) \circ \mathrm{ad}(X)\right) Z \quad .$$

Proposition :

Pour tout g, élément de G, et tout X, élément de $\mathfrak{G}$, on a

$$g(\exp tX)g^{-1} = \exp t\left(\mathrm{Ad}(g)X\right) \quad .$$

En effet, on a vu que pour tout difféomorphisme θ de G, on avait

$$\theta \circ (\mathrm{Exp}\ tX) \circ \theta^{-1} = \mathrm{Exp}\ t(\theta_* X) \quad .$$

Pour $\theta = A_g$, on a donc

$$A_g \circ \mathrm{Exp}\ tX \circ A_g^{-1} = \mathrm{Exp}\ t(A_{g*}X)$$

$$= \mathrm{Exp}\ t\left(\mathrm{Ad}(g)X\right) \quad .$$

Et en appliquant cet automorphisme à e, on obtient (puisque $A_g^{-1}(e) = e$)

$$A_g(\exp tX) = \exp t\left(\mathrm{Ad}(g)X\right) \quad ,$$

c'est-à-dire

$$g(\exp tX)g^{-1} = \exp t\left(\mathrm{Ad}(g)X\right) \quad .$$

Proposition :

Soit G un groupe de Lie et soient X et Y des éléments de son algèbre de Lie. La condition nécessaire et suffisante pour que le crochet $[X, Y]$ soit nul, est que $\exp tX$ et $\exp sY$ commutent pour tous s et t dans $\mathbb{R}$.

En effet, d'après la proposition précédente

$$(\exp tX)(\exp sY)(\exp tX)^{-1} = \exp s\left(\mathrm{Ad}(\exp tX)\,Y\right) .$$

Or
$$\mathrm{Ad}(\exp tX)\,Y = \left(\exp t\,\mathrm{ad}(X)\right) Y$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\mathrm{ad}(X)\right)^n Y$$

Donc $\exp tX$ eet $\exp sY$ commutent pour tous $t, s \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$(\exp tX)(\exp sY)(\exp tX)^{-1} = \exp sY \quad ,$$

si et seulement si

$$Y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\mathrm{ad}(X)\right)^n Y$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire si et seulement si

$$\left(\mathrm{ad}(X)\right)^n Y = 0$$

pour tout n ; or ceci entraîne

$$\mathrm{ad}(X)\,Y = 0 \quad ,$$

et $\mathrm{ad}(X)\,Y = 0$ entraîne

$$\left(\mathrm{ad}(X)\right)^n Y = 0 \quad .$$

Donc $\exp tX$ et $\exp sY$ commutent pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, si et seulement si $[X, Y] = 0$.

<u>Exemple</u> :

$$G = GL(n, K) \quad \text{où} \quad K = \mathbb{C} \text{ ou } \mathbb{R} .$$

On a vu au paragraphe précédent qu'il existait une application linéaire et bijective C de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{gl}(n, K)$ qui à X, associait $C(X)$ tel que

$$\exp tX = \exp t\, C(X) \quad ;$$

on va montrer maintenant que c'est un isomorphisme d'algèbre de Lie ; pour cela, il reste à montrer que, pour tous X, Y dans $\mathfrak{G}$,

$$C([X, Y]) = \left[C(X), C(Y)\right] \quad .$$

Puisque

$$\exp tY = \exp t\, C(Y) \quad ,$$

on a si $g \in G$:

$$g(\exp tY)g^{-1} = g\left(\exp t\, C(Y)\right)g^{-1}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\exp t\left(\mathrm{Ad}(g)Y\right) &= g\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(C(Y))^n\right)g^{-1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\left(g\, C(Y)g^{-1}\right)^n\\ &= \exp t\left(g\, C(Y)g^{-1}\right)\end{aligned}$$

(où $\mathrm{Ad}(g)Y$ est un élément de $\mathfrak{G}$ et $g\, C(Y)g^{-1}$ un élément de $\mathfrak{gl}(n, K)$, c'est-à-dire que

$$g\, C(Y)g^{-1} = C\left(\mathrm{Ad}(g)Y\right) \quad ;$$

en particulier si $g = \exp tX = \exp t\, C(X)$, on a

$$\begin{aligned}\left(\exp t\, C(X)\right) C(Y) \left(\exp -t\, C(X)\right) &= C\left(\mathrm{Ad}(\exp tX)Y\right)\\ &= C\left((\exp t\, \mathrm{ad}(X))Y\right)\end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\left[\frac{d}{dt}\left((\exp t\, C(X))\, C(Y)\, (\exp -t\, C(X))\right)\right]_{t=0} = \left[\frac{d}{dt}C\left((\exp t\, \mathrm{ad}(X))Y\right)\right]_{t=0}$$

Or le premier membre de cette égalité s'écrit :

$$\Big[\big(C(x)\exp tC(X)\big)\,C(Y)\big(\exp - tC(X)\big) + \big(\exp tC(X)\big)\,C(Y)\big(-C(X)\exp - tC(X)\big)\Big]_{t=0}$$

c'est-à-dire

$$C(X)\,C(Y) - C(Y)\,C(X) \quad ,$$

c'est-à-dire

$$\big[C(X),\ C(Y)\big] \quad .$$

Et le deuxième membre de l'égalité s'écrit, puisque C est linéaire :

$$C\left(\left[\frac{d}{dt}\exp t\ \mathrm{ad}(X)\right]_{t=0} Y\right)$$

c'est-à-dire

$$C\big(\mathrm{ad}(X)Y\big) \quad ,$$

c'est-à-dire

$$C([X,\ Y]) \quad .$$

L'application C est donc bien un isomorphisme et on peut identifier $\mathfrak{G}$ à $g\ell(n, K)$. Tout X, appartenant à $\mathfrak{G}$, est alors identifié à la matrice des composantes de X_e . Et $\exp tX$ est la fonction exponentielle de matrice. Et l'égalité

$$g\,C(Y)g^{-1} = C\big(\mathrm{Ad}(g)Y\big)$$

signifie que $\mathrm{Ad}(g)Y$ est égal au produit de matrices gYg^{-1} , pour tout $Y \in \mathfrak{G}$ et tout $g \in G$.

§4. APPLICATION EXPONENTIELLE ET COORDONNEES CANONIQUES

Soit toujours G un groupe de Lie et $\mathfrak{G}$ son algèbre de Lie. On considère l'application de $\mathfrak{G}$ dans G, qui à X fait correspondre

$$\exp 1X = \exp X \quad ,$$

c'est par définition l'application exponentielle de $\mathfrak{G}$ dans G.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$, en tant qu'espace vectoriel de dimension n, sur $\mathbb{R}$, est un groupe de Lie par l'addition. On considère l'application exponentielle comme application du groupe de Lie $\mathfrak{G}$ dans le groupe de Lie G.

Théorème :

L'application exponentielle de $\mathfrak{G}$ dans G est différentiable et son rang en 0 est maximum.

Démonstration :

Soit $\{X_1, \dots, X_n\}$ une base de $\mathfrak{G}$; soit $(x^1, \dots, x^n)$ un système de coordonnées locales dans un voisinage de e, tel que

$$x^1(e) = \dots = x^n(e) = 0 \quad ;$$

soit

$$(X_k)_x = \sum_{i=1}^{n} \xi_k^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

l'expression de $(X_k)_x$ par rapport à la base $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ de $T_x(G)$, pour x voisin de e, les fonctions ξ_k^i sont différentiables.

Soit

$$X = y^1 X_1 + \dots + y^n X_n$$

un élément de $\mathfrak{G}$, alors on a

$$X_x = \sum_{k=1}^{n} y^k \sum_{i=1}^{n} \xi_k^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad ,$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} y^k \xi_k^i(x) \Big) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad .$$

On considère alors le système d'équations différentielles

$$\left\{\frac{dx^i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} y^k \xi_k^i (x^1, \ldots, x^n) \quad , \qquad i = 1, \ldots, n \quad ,\right.$$

où les y^k sont considérés comme paramètres ; on sait qu'il existe ϵ et δ, réels positifs, et un système de solutions

$$x^1(t \ ; \ y), \ldots, x^n(t \ ; \ y)$$

définies et différentiables dans l'ensemble

$$]-\epsilon, +\epsilon[\times \{y = (y^1, \ldots, y^n) \ ; \ |y^i| < \delta \ \text{ pour tout } \ i \in [1, n]\}$$

et telles que

$$x^1(0 \ ; \ y) = x^2(0 \ ; \ y) = \ldots = x^n(0 \ ; \ y) = 0 \quad .$$

Alors l'application

$$t \longrightarrow \left(x^1(t \ ; \ y), \ldots, x^n(t \ ; \ y)\right)$$

est une courbe intégrale de X passant par e, car

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} y^k \xi_k^i(x)$$

est égal à Xx^i ; or la courbe intégrale de X passant par e est :

$$t \longrightarrow \exp tX \quad ;$$

donc pour $|t| < \epsilon$ et $|y^i| < \delta$, on a

$$x^i(\exp tX) = x^i(t \ ; \ y) \quad .$$

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $|t_0| < \epsilon$, alors pour $|y^i| < |t_0|\delta$, les composantes $\frac{y^i}{t_0}$ de $\frac{X}{t_0}$ vérifient

$$\left|\frac{y^i}{t_0}\right| < \delta \quad , \qquad i = 1, \ldots, n \quad ,$$

et $\exp X$, qui peut s'écrire $\exp t_0 \frac{X}{t_0}$ a pour coordonnées :

$$x^i(\exp X) = x^i \left(t_0 \ ; \ \frac{y^1}{t_0}, \ldots, \frac{y^n}{t_0}\right) \qquad i = 1, \ldots, n$$

qui sont des fonctions différentiables de $y^1, \ldots, y^n$ pour $|y^i| < |t_0|\delta$, ceci prouve que l'application exponentielle est différentiable dans un voisinage de 0. Soit V ce voisinage de 0 ; alors pour tout champ de vecteur X dans $\mathfrak{G}$, il existe un entier m tel que $\frac{X}{m}$ soit dans V, et un voisinage U de X tel que $\frac{U}{m}$ soit contenu dans V. L'application de U dans V qui à Y fait correspondre $\frac{Y}{m}$ est différentiable et

$$\exp Y = \left(\exp \frac{Y}{m}\right)^m \quad ,$$

ce qui prouve que l'application exponentielle est différentiable dans U. Donc l'application exponentielle est différentiable dans $\mathfrak{G}$.

Le rang de l'application exp en 0 est le rang de la matrice jacobienne

$$\left(\left[\frac{\partial x^i(t_0 \,;\, \frac{y^1}{t_0}, \ldots, \frac{y^n}{t_0})}{\partial y^j}\right]_{y\,=\,0}\right) \quad .$$

Or

$$\left[\frac{\partial x^i(t_0 \,;\, \frac{y^1}{t_0}, \ldots, \frac{y^n}{t_0})}{\partial y^j}\right]_{y=0} = \left[\frac{\partial x^i(t_0 \,;\, 0, \ldots, 0, \frac{y^j}{t_0}, 0, \ldots, 0)}{\partial y^j}\right]_{y^j=0}$$

$$= \frac{1}{t_0}\left[\frac{\partial x^i(t_0 \,;\, 0, \ldots, 0, s, 0, \ldots, 0)}{\partial s}\right]_{s=0}$$

et

$$x^i(t_0 \,;\, 0, \ldots, 0, s, 0, \ldots, 0) = x^i\left(\exp t_0\, s\, X^j\right)$$

$$= x^i\left(\exp s\, t_0\, X^j\right)$$

d'où

$$\left[\frac{\partial x^i(t_0 \,;\, 0, \ldots, s, \ldots, 0)}{\partial s}\right]_{s\,=0} = \left(t_0\, X^j\right) \cdot x^i$$

$$= t_0\, \xi^i_j(0)$$

et la matrice jacobienne de l'application exp , en 0, est la matrice $\left(\xi^i_j(0)\right)$ dont le déterminant n'est pas nul car les $X^1, \ldots, X^n$ sont linéairement indépendants. L'application exponentielle est donc de rang maximum en 0. c.q.f.d.

Conséquence :

Il existe un voisinage V de 0 dans $\mathfrak{G}$, et un voisinage U de e dans G, tels que l'application exp induit un difféomorphisme de V sur U.

Remarque :

Pour tout $g \in U$, il existe donc un $X \in V$ et un seul tel que

$$g = \exp X \quad ,$$

mais il est possible que g soit aussi égal à $\exp X'$ avec un autre X' non dans V. Par exemple si

$$G = G\ell(n, \mathbb{C}) \quad ,$$

on a

$$e = \exp 0 \quad ,$$

mais aussi $e = \exp X'$ pour

$$X' = \begin{pmatrix} 2\pi i m_1 & & & \\ & 2\pi i m_2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 2\pi i m_n \end{pmatrix}$$

où $m_n \in \mathbb{Z}$.

Coordonnées canoniques de première espèce :

Soit $\{X_1, \ldots, X_n\}$ une base de $\mathfrak{G}$. Pour ϵ assez petit, l'application exponentielle induit un difféomorphisme de

$$V = \left\{ X \in \mathfrak{G} \; ; \; X = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i , \; |a_i| < \varepsilon \right\}$$

sur un voisinage U de e. Tout élément g de U s'écrit donc

$$g = \exp \sum_{i=1}^{n} a_i X_i , \quad |a_i| < \varepsilon$$

d'une manière et d'une seule, et l'application qui à $(a_1, \ldots, a_n)$ fait correspondre

$$\exp \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

est un difféomorphisme du cube

$$Q = \left\{ (a_1, \ldots, a_n) \; ; \; a_i \in \mathbb{R}, \; |a_i| < \varepsilon, \; i = 1, \ldots, n \right\}$$

sur U. On peut donc définir des coordonnées locales $x^1, \ldots, x^n$ sur U par

$$x^i \left(\exp \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \right) = a_i \quad , \qquad i = 1, \ldots, n \quad ;$$

ces coordonnées sont appelées coordonnées canoniques (de première espèce) relatives à la base $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de $\mathfrak{G}$.

Propriétés :

- Le sous-groupe à un paramètre

$$\exp t \sum_i b_i X_i$$

est représenté dans les coordonnées canoniques, par la droite

$$t \longrightarrow (b_1 t, \ldots, b_n t) \quad ,$$

pour t suffisamment petit, car on peut trouver δ tel que, pour $|t| < \delta$,

$$t \sum_{i=1}^{n} b_i X_i$$

soit dans V et alors

$$x^i\Big(t\sum_{i=1}^{n} b_i X_i\Big) = t\, b_i \quad .$$

• Soit g un élément de G et soit W un voisinage de e tel que

$$W \subset U$$

et

$$gWg^{-1} \subset U$$

(où U désigne toujours un voisinage de e, difféomorphe à un voisinage V de 0 dans $\mathfrak{G}$, par l'application exponentielle).
On suppose que l'application linéaire $Ad(g)$ est exprimée par rapport à la base $\{X_1, \ldots, X_n\}$ par

$$Ad(g)\ X_i = \sum_{k=1}^{n} a_i^k(g)\ X_k \quad ,$$

c'est-à-dire que sa matrice est $\big(a_i^k(g)\big)$. Alors, si $\{x^i(p)\}$ sont les coordonnées canoniques d'un point p de W, les coordonnées canoniques du point gpg^{-1} sont données par

$$x^k(gpg^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} a_i^k(g)\ x^i(p) \quad ,$$

en effet si $p = \exp X$, alors

$$gpg^{-1} = g(\exp X)g^{-1} = \exp Ad(g)X \quad ,$$

et si

$$X = \sum_{i=1}^{n} x^i(p)\ X_i$$

alors

$$Ad(g)X = \sum_{i=1}^{n} x^i(p) \sum_{k=1}^{n} a_i^k(g)\ X_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^k(g)\ x^i(p)\Big) X_k$$

et

$$g p g^{-1} = \exp \sum_{k=1}^{n} b_k X_k$$

avec

$$b_k = \sum_{i=1}^{n} a_i^k(g) \, x^i(p) \quad .$$

<u>Coordonnées canoniques de deuxième espèce</u> :

Soit toujours

$$\{X_1, \ldots, X_n\}$$

une base de $\mathcal{G}$. On considère l'application $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow G$ qui à $(a_1, \ldots, a_n)$ fait correspondre

$$(\exp a_1 X_1)(\exp a_2 X_2) \ldots (\exp a_n X_n) \quad ,$$

c'est une application différentiable. On a

$$\Phi(0, \ldots, 0) = e \quad ,$$

donc par $|a_1|, \ldots, |a_n|$ assez petits, on peut considérer les coordonnées canoniques de 1ère espèce $x^i\big(\Phi(a_1, \ldots, a_n)\big)$, on pose :

$$\Phi^i = x^i \circ \Phi \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n \quad .$$

Alors

$$\Phi^i(0, \ldots, 0, a_j, 0, \ldots, 0) = x^i(\exp a_j X_j)$$
$$= \delta_i^j \, a^j$$

(δ_i^j symbole de Kronecker) donc

$$\frac{\partial \Phi^i}{\partial a^j} = \delta_i^j \quad ,$$

et l'application Φ est donc de rang maximum en 0, elle définit donc un difféomorphisme d'un voisinage V_1 de 0 dans $\mathcal{G}$, sur un voisinage U_1 de e dans G. On peut donc définir des coordonnées locales $y^1, \ldots, y^n$ sur U_1 par

$$y^i\left((\exp a_1 X_1)(\exp a_2 X_2)\ldots(\exp a_n X_n)\right) = a_i \quad ,$$

ces coordonnées sont appelées coordonnées canoniques de deuxième espèce, relatives à la base $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de $\mathfrak{G}$.

Théorème :

Soit G un groupe de Lie connexe, alors tout élément g de G s'écrit

$$g = (\exp X_1) \ldots (\exp X_k) \quad ,$$

où les X_i sont dans $\mathfrak{G}$.

En effet soit U un voisinage de e dans G tel que l'application exp soit un difféomorphisme d'un voisinage V de O dans $\mathfrak{G}$, sur U. Soit

$$W = U \cap U^{-1} \quad ,$$

alors

$$W = \bar{W}^1$$

et le groupe G est engendré par W, parce qu'il est connexe ; c'est-à-dire que tout $g \in G$ s'écrit comme produit $g_1 \ldots g_k$, où chaque g_i est dans W, donc dans U, et donc de la forme

$$g_i = \exp X_i$$

où $X_i \in V$; donc

$$g = (\exp X_1) \ldots (\exp X_k) \quad .$$

§5. STRUCTURE DES GROUPES DE LIE ABELIENS

Définition :

Une algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ est dite abélienne si $[X, Y] = 0$, pour tous X, Y dans $\mathfrak{G}$. (Elle est alors bien abélienne au sens

$$[X, Y] = +[Y, X]$$

pour tous X, Y dans $\mathfrak{G}$).

Proposition :

Soit G un groupe de Lie et soit $\mathfrak{G}$ son algèbre de Lie. Si G est abélien, alors $\mathfrak{G}$ est abélienne. Réciproquement, si $\mathfrak{G}$ est abélienne et si G est connexe, alors G est abélien.

En effet, si G est abélien, pour tout $g \in G$, l'application A_g est l'identité et $Ad(g)$ est aussi l'identité, donc

$$Y = Ad(\exp tX)Y = \left(\exp t\, ad(X)\right) Y$$

$$= Y + t\, ad(X)Y + \frac{t^2}{2!}\left(ad(X)\right)^2 Y + \ldots$$

donc $ad(X)Y$ est nul, pour tout X et tout Y dans $\mathfrak{G}$, c'est-à-dire que $\mathfrak{G}$ est abélienne.

Réciproquement, si $\mathfrak{G}$ est abélienne, alors pour tout X et tout Y dans $\mathfrak{G}$, on a

$$(\exp X)(\exp Y) = (\exp Y)(\exp X) \quad ;$$

si g et h sont des éléments de G, ils sont de la forme

$$g = \exp X_1 \ \exp X_2 \ldots \exp X_r$$

et

$$h = \exp Y_1 \ \exp Y_2 \ldots \exp Y_s$$

parce que G est connexe, donc

$$gh = hg$$

car tous les $\exp X_i$ et $\exp Y_i$ commutent, donc G est abélien.

Proposition :

Si G est abélien connexe, on a les deux propriétés suivantes :

1) $\exp X \exp Y = \exp(X+Y)$, pour tout X et tout Y dans $\mathfrak{G}$.

2) L'application $\exp : \mathfrak{G} \longrightarrow G$ est surjective.

L'application exponentielle est donc alors un homomorphisme de groupes de Lie de $\mathfrak{G}$ sur G.

Lemme (Formule de Leibnitz).

Soient a et b deux courbes différentiables d'un groupe de Lie et soit c la courbe définie par

$$c(t) = a(t)\, b(t) \quad .$$

Alors

$$\dot{c}(t) = R_{b(t)}\, \dot{a}(t) + L_{a(t)}\, \dot{b}(t) \quad .$$

En effet, la fonction g définie par

$$g(u, v) = f\big(a(u)\, b(v)\big)$$

où $f \in C^{\infty}(G)$ est différentiable, on a

$$g'_u = \frac{\partial}{\partial u} f\big(a(u)\, b(v)\big)$$

et

$$g'_v = \frac{\partial}{\partial v} f\big(a(u)\, b(v)\big)$$

et

$$\frac{dg}{dt} = g'_u \frac{du}{dt} + g'_v \frac{dv}{dt} \quad ,$$

donc en particulier pour $u = v = t$, on a

$$\left[\frac{d}{dt} f\big(a(t)b(t)\big)\right]_{t=t_0} = \left[\frac{\partial}{\partial u} f\big(a(u)b(v)\big)\right]_{u=v=t_0} + \left[\frac{\partial}{\partial v} f\big(a(u)b(v)\big)\right]_{u=v=t_0}$$

c'est-à-dire

$$\dot{c}(t_0)f = \left(R_{b(t_0)}\ \dot{a}(t_0)\right)f + \left(L_{a(t_0)}\ \dot{b}(t_0)\right)f \quad ,$$

ceci pour tout $f \in C^\infty(G)$, d'où le lemme.

Alors en prenant $a(t) = \exp tX$ et $b(t) = \exp tY$, on a

$$c(t) = \exp tX \exp tY$$

et

$$\begin{aligned} c(t)\ c(s) &= \exp tX \exp tY \exp sX \exp sY \\ &= \exp(t+s)X \exp(t+s)Y \end{aligned}$$

si G est supposé abélien, c'est-à-dire que $c(t)$ est un sous-groupe à un paramètre de G (car c est différentiable) ; donc il existe $W \in \mathfrak{G}$ tel que

$$c(t) = \exp tW \quad .$$

Comme $a(0) = b(0) = e$, le lemme montre que

$$\dot{c}(0) = \dot{a}(0) + \dot{b}(0) \quad ,$$

c'est-à-dire

$$W_e = X_e + Y_e \quad ,$$

donc

$$W = X + Y \quad .$$

On a donc

$$\boxed{\exp tX \,.\, \exp tY = \exp t(X+Y)}$$

et en particulier l'assertion 1) de la proposition.

Si, de plus, G est connexe, tout $g \in G$ est de la forme

$$g = \exp Y_1 \ldots \exp Y_k \quad , \qquad Y_i \in \mathfrak{G} \quad ,$$

donc

$$g = \exp(Y_1 + \ldots + Y_k)$$

d'après ce qui précède, c'est-à-dire que l'application exponentielle de $\mathfrak{G}$ dans G est surjective.

L'application exp est donc alors un homomorphisme de groupe de $\mathfrak{G}$ sur G, elle est différentiable, c'est donc un homomorphisme de groupes de Lie de $\mathfrak{G}$ sur G.

Cette application exp n'est en général pas injective, soit Γ son noyau, c'est-à-dire

$$\Gamma = \left\{X \in \mathfrak{G} \ ; \ \exp X = e\right\} \quad .$$

L'application exponentielle induit une application

$$\varphi : \mathfrak{G}/\Gamma \longrightarrow G$$

qui est isomorphisme de groupes localement compacts. On sait qu'il existe un voisinage V de 0 dans $\mathfrak{G}$ tel que la restriction de l'application exp à V soit un difféomorphisme entre V et un ouvert de G, donc en particulier

$$V \cap \Gamma = \{0\} \quad .$$

Définition :

Un sous-groupe Γ d'un groupe de Lie est appelé un sous-groupe discret si Γ est fermé et s'il existe un voisinage V de e tel que

$$V \cap \Gamma = \{e\} \quad .$$

Le noyau Γ de exp est donc un sous-groupe discret de $\mathfrak{G}$ (groupe de Lie par l'addition).

Rappel d'un théorème :

Soit Γ un sous-groupe discret de l'espace vectoriel réel V. Alors il existe des éléments $u_1, \dots, u_d$ de v qui sont linéairement indépendants et tels que tout $\gamma \in \Gamma$ s'exprime sous la forme

$$\gamma = \sum_{i=1}^{d} m_i \, u_i$$

avec $m_i \in Z_i$. Et le nombre d de ces éléments est fixe, c'est le rang de Γ.

Soit V_1 le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{G}$ engendré par $u_1, \dots, u_d$, soit V_2 un sous-espace supplémentaire de V_1 , alors

$$\mathfrak{G} = V_1 \times V_2$$

et

$$\mathfrak{G}/\Gamma = V_1/\Gamma \times V_2$$

puisque $\Gamma \subset V_1$, c'est-à-dire

$$\mathfrak{G} = T^d \times V_2$$

(On note T^d le tore V_1/Γ) et l'application

$$\varphi : T^d \times V_2 \longrightarrow G \quad ,$$

induite par l'application exp , est un isomorphisme de groupes localement compacts, différentiable. Alors son inverse φ^{-1} est aussi différentiable, d'après le théorème suivant, que l'on démontrera au §6. :

> Si G et G' sont des groupes de Lie et φ un isomorphisme de groupes localement compacts de G sur G'. Alors φ et φ^{-1} sont différentiables.

Donc,

<u>Théorème</u> :

<u>Si le groupe de Lie G est abélien et connexe, il est isomorphe, comme groupe de Lie, à</u> $T^d \times V_1$.

En particulier, si G est abélien, connexe et compact, il est donc isomorphe à un tore.

§6. DIFFERENTIABILITE D'UN SOUS-GROUPE A UN PARAMETRE CONTINU.

Définition :

Un sous-groupe à un paramètre continu d'un groupe de Lie G est une courbe continue $a : \mathbb{R} \longrightarrow G$ telle que

$$a(t + s) = a(t)\ a(s)$$

pour tous $s, t \in \mathbb{R}$.

(On rappelle que par "sous-groupe à un paramètre", on entend une telle application a, différentiable).

On va montrer, qu'en fait, tout sous-groupe à un paramètre continu est un "sous-groupe à un paramètre" du groupe de Lie, c'est-à-dire qu'il est différentiable.

Lemme :

Soit $\{X_1, \ldots, X_n\}$ une base de $\mathfrak{G}$, et $x^1, \ldots, x^n$ les coordonnées canoniques relatives à cette base. Soit

$$U_c = \{g \in G \ ; \ |x^i(g)| < c, \ i = 1, \ldots, n\}$$

et soit

$$V_c = \{X \in \mathfrak{G} \ ; \ X = \sum_i a^i X_i, \ |a^i| < c, \ i = 1, \ldots, n\} \quad .$$

Soit $c \in \mathbb{R}^+$ assez petit pour que exp induise un difféomorphisme de V_{2c} sur U_{2c} , et soit $g \in U_c$ tel que

$$g^2, g^3, \ldots, g^m$$

soient aussi dans U_c ; alors $g \in U_{c/m}$ et

$$x^k(g^\ell) = \ell\, x^k(g)$$

pour $k = 1, \ldots, n$ et $\ell = 1, \ldots, m$.

En effet, soit $g = \exp X$ avec

$$X = \sum_{k=1}^{n} x^k(g) X_k \quad .$$

Si $X \neq 0$, on considère $\mathrm{Max}_k |x^k(g)|$ qui est égal à $|x^i(g)|$ pour un certain i, on pose

$$t_0 = \frac{2c}{|x^i(g)|} \quad ,$$

on a $t_0 > 2$ car

$$|x^i(g)| < c \quad .$$

Soit m_0 l'entier tel que

$$m_0 < t_0 \leq m_0 + 1 \quad ,$$

alors pour tout k, on a

$$m_0 |x^k(g)| < 2c$$

car $|x^i(g)|$ est le maximum des $|x^k(g)|$. Donc $m_0 X$ appartient à V_{2c} et donc

$$\exp m_0 X \in U_{2c} \quad ,$$

or

$$\exp m_0 X = (\exp X)^{m_0} = g^{m_0} \quad ,$$

donc

$$g^{m_0} \in U_{2c}$$

et

$$x^k \left(g^{m_0}\right) = m_0 \, x^k(g)$$

pour $k = 1, \ldots, n$. D'après la définition de m_0, on a

$$(m_0 + 1) |x^i(g)| \geq t_0 |x^i(g)|$$

c'est-à-dire

$$(m_0 + 1) |x^i(g)| \geq 2c \quad ,$$

donc

$$m_0 |x^i(g)| \geq 2c - |x^i| > c \quad ,$$

la coordonnée x^i de g^{m_0} est en valeur absolue supérieure à c, donc g^{m_0} n'appartient pas à U_c . Or $\exp \ell X \in U_c$ pour $\ell = 1, \dots, m$, donc $m < m_0$, et donc pour $\ell = 1, \dots, m$ le champ de vecteur ℓX appartient à V_{2c} puisque

$$m_0 X \in V_{2c} \quad .$$

Si $X = 0$, on a évidemment aussi

$$\ell X \in V_{2c} \quad .$$

C'est-à-dire que pour $\ell = 1, \dots, m$, on a

$$g^{\ell} = \exp \ell X$$

où ℓX appartient au voisinage V_{2c} de 0, difféomorphe (par exp.) au voisinage U_{2c} de e, c'est-à-dire que les coordonnées canoniques de g^{ℓ} sont les composantes de ℓX par rapport à $X_1, \dots, X_n$, c'est-à-dire

$$x^k(g^{\ell}) = \ell\, x^k(g)$$

pour $k = 1, \dots, n$ et $\ell = 1, \dots, m$. Et, puisque $g^m \in U_c$, on a $m|x^k(g)| < c$, pour tout k, donc

$$|x^k(g)| < \frac{c}{m} \quad ,$$

donc

$$g \in U_{c/m} \quad .$$

<u>Théorème</u> :

<u>Soit $a : \mathbb{R} \longrightarrow G$, un sous-groupe à un paramètre continu, du groupe de Lie G. Alors a est différentiable.</u>

Comme dans le lemme, on note

$$U_i = \{g \in G \ ; \ |x^i(g)| < c, \ i = 1, \dots, n\}$$

et

$$V_c = \{X = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \ ; \ |a_i| < c, \ i = 1, \dots, n\}$$

et on suppose c assez petit pour que exp induise un difféomorphisme de V_{2c} sur U_{2c}. Puisque $a(0) = e$ et que a est continu, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour $|t| < \epsilon$, $a(t) \in U_c$. Soit ϵ_0 tel que

$$\epsilon > \epsilon_0 > 0 \quad .$$

On pose

$$x^k\big(a(t)\big) = a^k(t) \quad ,$$

alors montrer que a est différentiable revient à montrer que les fonctions a^k $(k = 1, \dots, n)$ sont différentiables.
On suppose t rationnel positif : $t = \frac{s}{m}$, $s, m \leq \mathbb{Z}$ et $m \geq s > 0$ si $|t|$ est inférieur à 1. Soit

$$g = a\left(\frac{\epsilon_0}{m}\right) \quad ,$$

on a

$$g^{\ell} = a\left(\frac{\ell}{m}\,\epsilon_0\right)$$

et pour $\ell = 1, \dots, m$, $|\frac{\ell}{m}\,\epsilon_0|$ est inférieur à ϵ, c'est-à-dire que g^{ℓ} est dans U_c, on peut donc appliquer le lemme à g et donc

$$x^k(g^s) = s\; x^k(g)$$

et

$$x^k(g^m) = m\; x^k(g) \quad .$$

Or

$$x^k(g^s) = a^k\left(\frac{s}{m}\,\epsilon_0\right)$$

$$x^k(g^m) = a^k(\epsilon_0)$$

et

$$x^k(g) = a^k\left(\frac{\epsilon_0}{m}\right)$$

Donc a^k vérifie les relations

$$a^k\left(\frac{s}{m}\,\epsilon_0\right) = s\; a^k\left(\frac{\epsilon_0}{m}\right)$$

et

$$a^k(\epsilon_0) = m\; a^k\left(\frac{\epsilon_0}{m}\right)$$

qui entraînent

$$a^k\left(\frac{s}{m}\,\epsilon_0\right) = \frac{s}{m}\,a^k(\epsilon_0) \quad ,$$

c'est-à-dire

$$a^k(t\epsilon_0) = t\,a^k(\epsilon_0)$$

pour t rationnel positif. Or $a^k(t\epsilon_0)$ et $t\,a^k(\epsilon_0)$ sont des fonctions continues de t et impaires (on a

$$a^k(-t\epsilon_0) = -\,a^k(t\epsilon_0)$$

car

$$\begin{aligned} a^k(-t\epsilon_0) &= x^k\big(a(-t\epsilon_0)\big) \\ &= x^k\big(a(t\epsilon_0)^{-1}\big) \\ &= -\,x^k\big(a(t\epsilon_0)\big) \end{aligned} \qquad \Big),$$

donc

$$a^k(t\epsilon_0) = t\,a^k(\epsilon_0)$$

pour tout t tel que $|t| < 1$. Ce qui montre que a^k est différentiable pour $|t| < \epsilon$, car alors $t = \frac{t}{\epsilon_0}\,\epsilon_0$ où $\left|\frac{t}{\epsilon_0}\right|$ est inférieur à 1.

Pour $t_0 \in \mathbb{R}$, pas forcément voisin de 0, on a

$$\begin{aligned} a(t) &= a(t_0)\ a(t - t_0) \\ &= L_{a(t_0)}\ a(t - t_0) \end{aligned}$$

donc a est différentiable au voisinage de t_0 , car les applications $L_{a(t_0)}$ et $t \longrightarrow t - t_0$ sont différentiables.

Donc a est différentiable sur tout $\mathbb{R}$. C'est donc un "sous-groupe à un paramètre" de G.

§7. HOMOMORPHISMES DE GROUPES DE LIE - REPRESENTATIONS

Définitions :

Soient G et G' deux groupes de Lie. Une application φ de G dans G' est un homomorphisme de groupes de Lie si c'est un homomorphisme de groupe qui, de plus, est différentiable ; c'est un isomorphisme de groupes de Lie de G sur G', si c'est un homomorphisme de groupe qui est un difféomorphisme de G sur G'.

Théorème :

Soient G et G' deux groupes de Lie et φ un homomorphisme de groupes topologiques de G dans G'. Alors φ est un homomorphisme de groupes de Lie.

En effet, soit $\{X_1, \ldots, X_n\}$ une base de $\mathfrak{G}$, algèbre de Lie de G ; au voisinage de l'élément neutre e de G, on considère les coordonnées canoniques de deuxième espèce relatives à cette base. Pour tout $X \in \mathfrak{G}$, $\exp tX$ est un sous-groupe à un paramètre de G, donc $\varphi(\exp tX)$ est un sous-groupe à un paramètre continu de G' puisque φ est un homomorphisme de groupe ; ce sous-groupe à un paramètre continu, est différentiable, donc il existe $Y \in \mathfrak{G}'$, algèbre de Lie de G', tel que

$$\varphi(\exp tX) = \exp tY \quad .$$

En particulier, il existe donc $Y_i \in \mathfrak{G}'$ tel que

$$\varphi(\exp tX_i) = \exp tY_i \quad ,$$

pour $i = 1, \ldots, n$, et si $p = (\exp a_1 X_1)(\exp a_2 X_2) \cdots (\exp a_n X_n)$ alors

$$\varphi(p) = (\exp a_1 Y_1) \cdots (\exp a_n Y_n)$$

qui est une fonction différentiable de $(a_1, \ldots, a_n)$, car chaque sous-groupe à un paramètre $\exp tY_i$ est différentiable ;

or $a_1, \dots, a_n$ sont les coordonnées canoniques de seconde espèce de p. Donc φ est différentiable dans un voisinage de e ; ce qui entraîne qu'elle est différentiable sur tout G, car pour x voisin de g,

$$f(x) = f(g)\ f(g^{-1}x)$$

qui est différentiable parce que $g^{-1}x$ est alors voisin de e.

Corollaire 1 :

Soient G et G' deux groupes de Lie et φ un homomorphisme de groupes topologiques de G sur G', bijectif. Alors φ est un isomorphisme de groupes de Lie de G sur G'.

En effet, d'après le théorème, φ est différentiable. D'autre part, G et G' étant des groupes topologiques localement compacts à base dénombrable, φ est un homomorphisme ouvert, donc φ^{-1} est continue et donc différentiable d'après le théorème.

Remarque :

Ce corollaire, montre que, pour un groupe topologique donné, la structure de groupe de Lie est unique.

Définition :

Soit G un groupe et V un espace vectoriel sur K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une représentation de G dans l'espace vectoriel V est un homomorphisme φ de G dans $G\ell(V)$. Si G est un groupe de Lie et si φ est différentiable, c'est une représentation de groupe de Lie.

Corollaire 2 :

Toute représentation continue d'un groupe de Lie est différentiable.

Ceci découle immédiatement du théorème.

Exemple :

La représentation adjointe d'un groupe de Lie G est une représentation de groupe de Lie de G dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ de G, car l'application $s \longrightarrow Ad(s)$ est continue.

On considère deux groupes de Lie G et G' et leurs algèbres de Lie respectives $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{G}'$. Soit φ un homomorphisme de G dans G'.

Soit $X \in \mathfrak{G}$, alors

$$t \longrightarrow \varphi(\exp tX)$$

est un sous-groupe à un paramètre de G', il existe donc X' dans $\mathfrak{G}'$ tel que

$$\varphi(\exp tX) = \exp tX' \quad .$$

On a

$$X'_{e'} = (\varphi_*)_e X_e$$

car $f \in C^\infty(G')$,

$$X'_{e'} f = \left[\frac{d}{dt} f(\exp tX')\right]_{t=0}$$

$$= \left[\frac{d}{dt} f \circ \varphi(\exp tX)\right]_{t=0}$$

$$= (\varphi_*)_e X_e \cdot f \quad .$$

Et pour $g \in G$, on a

$$X'_{\varphi(g)} = \left(L_{\varphi(g)*}\right)_{e'} X'_{e'}$$

$$= \left(L_{\varphi(g)*}\right)_{e'} (\varphi_*)_e X_e \quad .$$

Or $\varphi(gx) = \varphi(g)\,\varphi(x)$, pour tout $x \in G$, c'est-à-dire

$$\varphi \circ L_g = L_{\varphi(g)} \circ \varphi \quad ,$$

donc

$$X'_{\varphi(g)} = (\varphi \circ L_g)_* X_e$$

$$= \varphi_* L_{g*} X_e$$

$$= (\varphi_*)_g X_g \quad .$$

Pour tout $g \in G$, on a donc

$$X'_{\varphi(g)} = (\varphi_*)_g X_g \quad ,$$

c'est-à-dire que le couple de champs de vecteurs (X, X') est compatible avec φ.

On définit l'application φ_* de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{G}'$ par

$$\varphi(\exp tX) = \exp t(\varphi_* X) \quad .$$

Cette application coïncide avec celle définie par

$$(\varphi_* X)_{\varphi(g)} = (\varphi_*)_g X_g$$

dans le cas où φ est un automorphisme de G. On avait vu dans ce cas que φ_* était compatible avec le crochet, cette propriété reste vraie dans le cas général, l'application φ_* est donc un homomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{G}'$. <u>On appelle φ_* la différentielle de l'homomorphisme φ.</u>

On peut énoncer :

<u>Théorème</u> :

<u>Un homomorphisme φ de G dans G' induit un homomorphisme φ_* de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{G}'$ tel que</u>

$$(\varphi_* X)_{e'} = (\varphi_*)_e X_e \quad .$$

(où e et e' sont les éléments neutres de G et G' respectivement).

<u>De plus, si G est connexe et si deux homomorphismes φ et ψ de G sur G' sont tels que $\varphi_* = \psi_*$, alors</u>

$$\varphi = \psi \quad .$$

Car

$$\varphi(\exp tX) = \psi(\exp tX)$$

et tout $g \in G$ s'exprime comme produit $\exp X_1 \ldots \exp X_k$.

<u>Remarque</u> :

On verra plus loin que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont des groupes de Lie.

§8. SOUS-GROUPES DE LIE D'UN GROUPE DE LIE.

Définition :

Soient G et H des groupes de Lie. On dit que H est un sous-groupe de Lie de G si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1) Le groupe H est un sous-groupe de G.

2) La variété différentiable H est une sous-variété de G.

Remarque :

La topologie de H n'est pas forcément celle induite par G. Un sous-groupe de Lie n'est pas un sous-groupe topologique.

On dit que H est distingué si c'est un sous-groupe distingué de G (en tant que groupe simplement). On dit que H est fermé si c'est une sous-variété fermée de G.

Rappels sur les algèbres :

Un sous-ensemble $\mathfrak{H}$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{G}$ si :

1) C'est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{G}$.

2) Pour tous X, Y de $\mathfrak{H}$, $[X, Y]$ appartient à $\mathfrak{H}$.

Un sous-ensemble $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{G}$ est un idéal de $\mathfrak{G}$ si :

1) C'est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{G}$.

2) Pour tout $X \in \mathfrak{H}$ et tout $Y \in \mathfrak{G}$, $[X, Y]$ appartient à $\mathfrak{H}$.

Remarque :

L'anticommutativité du crochet entraîne qu'il n'y a pas à distinguer "idéal à gauche" et "idéal à droite". Dans une algèbre de Lie, tout idéal est bilatère.

Soient G un groupe de Lie et H un sous-groupe de Lie de G. On désigne toujours par $\mathfrak{G}$ l'algèbre de Lie de G et soit $\mathfrak{H}$ l'algèbre de Lie de H.

L'application identique $i : H \longrightarrow G$ est un homomorphisme de groupes de Lie. On peut considérer sa différentielle i_* qui applique $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{G}$, elle est injective car si $i_*X = 0$ alors $(i_*X)_e = 0$, c'est-à-dire

$$(i_*)_e \, X_e = 0 \quad ,$$

ce qui entraîne

$$X_e = 0$$

car i est un plongement, donc $(i_*)_e$ est injective. Et $X_e = 0$ équivaut à $X = 0$. L'image $i_*(\mathfrak{H})$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{G}$, à laquelle on identifie $\mathfrak{H}$: c'est l'ensemble de X de $\mathfrak{G}$ tels que X_e soit tangent à H. Car si X_e est l'image par $(i_*)_e$ d'un vecteur tangent Y_e à H,

$$X_e = (i_*)_e \, Y_e$$

alors

$$X_g = (L_{g*})_e \, X_e = (L_{g*})_e \, (i_*)_e \, Y_e = \left[(L_g \circ i)_*\right]_e$$

$$= \left[(i \circ L_g)_*\right]_e \, Y_e = (i_*)_g \left[(L_{g*})_e \, Y_e\right]$$

c'est-à-dire que pour tout g, X_g est image par $(i_*)_g$ d'un vecteur tangent à H.

Inversement, étant donnée une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{G}$, on va voir qu'on peut trouver un sous-groupe de Lie de G dont elle est l'algèbre de Lie.

Soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{G}$ son algèbre de Lie et soit $\mathfrak{H}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{G}$. Pour $p \in G$, soit $\mathfrak{H}_p$ le sous-ensemble de $T_p(G)$ des vecteurs tangents X_p où $X \in \mathfrak{H}$. Soit r la dimension de $\mathfrak{H}$, et soit $\{X_1, \ldots, X_r\}$ une base de $\mathfrak{H}$, alors pour tout $p \in G$, $(X_1)_p, \ldots, (X_r)_p$ engendrent $\mathfrak{H}_p$. D'autre part, puisque $\mathfrak{H}$ est une sous-algèbre,

$$\left[X_i, X_j\right] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k X_k \qquad \text{si} \quad i, j \in [1, r] \quad .$$

Donc, <u>$\mathfrak{H}$ définit un système différentiel complètement intégrable sur G</u> (on le notera $\mathfrak{H}$).

<u>Proposition 1</u> :

<u>Soit H_0 la feuille du système différentiel $\mathfrak{H}$ passant par e. Alors H_0 est un sous-groupe de Lie connexe de G dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{H}$.</u>

En effet, les translations à gauche laissent invariant $\mathfrak{H}$, donc (d'après une proposition vue sur les systèmes différentiels complètement intégrables) l'image de H_0 par L_g , $g \in G$, est une feuille de $\mathfrak{H}$. En particulier si $h \in H_0$, $L_h H_0$ est une feuille de $\mathfrak{H}$; cette feuille passe par $L_h(e) = h$, donc c'est H_0 , car par tout point il passe une seule feuille de $\mathfrak{H}$. Donc si h et h' appartiennent à H_0 , alors

$$hh' = L_h(h')$$

appartient à H_0 . D'autre part si $h \in H_0$, $L_{h^{-1}} H_0$ est aussi une feuille de $\mathfrak{H}$, qui passe par $L_{h^{-1}}(h) = e$, c'est donc H_0 . Donc si $h \in H_0$, alors

$$h^{-1} = L_{h^{-1}}(e)$$

appartient à H_0 . Ce qui montre que H_0 est un sous-groupe de G.

D'autre part H_0 est une sous-variété différentiable de G puisque c'est une feuille d'un système différentielle complètement intégrable.

Pour montrer que H_0 est un groupe de Lie, il faut montrer que les applications $\varphi_0 : H_0 \times H_0 \longrightarrow H_0$, définie par

$\varphi_0(a, b) = ab$, et $\psi_0 : H_0 \longrightarrow H_0$, définie par $\psi_0(a) = a^{-1}$, sont différentiables. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\varphi"] & G \\ H_0 \times H_0 \arrow[u, "{(i, i)}"] \arrow[ur, "\varphi_0"'] & \end{tikzcd}$$

(où φ est la multiplication dans G) qui montre que φ_0 est une application différentiable de $H_0 \times H_0$ dans G. Or l'image $\varphi_0(H_0, H_0)$ est contenue dans la feuille H_0 et G est une variété différentiable à base dénombrable, donc (d'après le théorème du §10 ch. II) φ_0 est une application différentiable de $H_0 \times H_0$ dans H_0 ; de même pour ψ_0 . Donc H_0 est un groupe de Lie ; c'est un sous-groupe de G et une sous-variété de G, c'est donc un sous-groupe de Lie de G ; et son algèbre de Lie est $\mathfrak{h}$ puisque c'est une variété intégrale du système différentiel $\mathfrak{h}$. De plus, H_0 est connexe puisque c'est une feuille.

<u>Proposition 2</u> :

<u>Soient H et H' deux sous-groupes de Lie connexes d'un groupe de Lie G. Si H et H' ont même algèbre de Lie, alors</u>

$$H = H' \quad .$$

Ceci résulte du fait que tout élément d'un groupe de Lie connexe s'exprime comme produit $(\exp X_1) \ldots (\exp X_p)$ où X_i appartient à l'algèbre de Lie du groupe.

<u>Théorème 1</u> :

<u>Soit $\mathfrak{H}$ une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ d'un groupe de Lie G. Il existe un sous-groupe de Lie connexe de G et un seul dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{H}$.</u>

En effet, ce sous-groupe de Lie existe d'après la proposition 1 (c'est H_0) et il est unique d'après la proposition 2.

Si H est un sous-groupe de Lie de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{H}$, soit H'_0 sa composante connexe neutre et soit H_0 la feuille de $\mathfrak{H}$ passant par e. Alors

$$H_0 = H'_0 \quad ,$$

d'après la proposition 2. De plus, une autre composante connexe de H est de la forme

$$hH'_0 = hH_0 \quad ,$$

c'est donc une feuille de $\mathfrak{H}$.

Soit maintenant H un sous-groupe abstrait de G. On peut identifier $\mathfrak{G}$ à l'espace tangent $T_e(G)$ par l'isomorphisme d'algèbre de Lie qui à $X \in \mathfrak{G}$ associe $X_e \in T_e(G)$.

<u>Proposition 3</u> :

<u>Soit H un sous-groupe abstrait de G et soit $\mathfrak{H}$ le sous-ensemble de</u> $T_e(G)$ <u>des éléments u vérifiant la propriété suivante : il existe une courbe idfférentiable a de G telle que</u>

$$a(0) = e \quad ,$$

<u>$a(t) \in H$ pour $|t|$ assez petit, et</u>

$$\mathring{a}(0) = u \quad .$$

<u>Alors $\mathfrak{H}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{G}$.</u>

En effet, soient $u, v \in \mathfrak{H}$, il existe des courbes a et b telles que $a(t), b(t) \in H$ pour $|t| < \varepsilon$,

$$a(0) = b(0) = e$$

et

$$\dot{a}(0) = u \quad \text{et} \quad \dot{b}(0) = v \quad .$$

Soit c la courbe définie par $c(t) = a(t)\, b(t)$, on a $c(0) = e$ et $c(t) \in H$ pour $|t| < \varepsilon$ puisque H est un sous-groupe, donc $\dot{c}(0)$ appartient à $\mathfrak{H}$, or d'après la formule de Leibnitz

$$\dot{c}(0) = \dot{a}(0) + \dot{b}(0) = u + v \quad .$$

D'autre part, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, soit a_λ la courbe définie par $a_\lambda(t) = a(\lambda t)$, alors $a_\lambda(0) = e$ et $a_\lambda(t) \in H$ pour $|t|$ assez petit, donc

$$\dot{a}_\lambda(0) = \lambda\, \dot{a}(0) = \lambda u$$

appartient à $\mathfrak{H}$. Donc $\mathfrak{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{G}$ (moyennant l'identification de $T_e(G)$ à $\mathfrak{G}$).

Il reste à montrer que $\mathfrak{H}$ est stable pour le crochet.

<u>Lemme</u> :

<u>Soient a et b deux courbes différentiables de G telles que</u>

$$a(0) = b(0) \quad .$$

<u>On pose</u>

$$\begin{cases} c(t) = a(\sqrt{t})^{-1}\, b(\sqrt{t})^{-1}\, a(\sqrt{t})\, b(\sqrt{t}) & \underline{\text{pour} \quad t \geq 0} \\ c(t) = c(-t)^{-1} & \underline{\text{pour} \quad t < 0} \end{cases} \quad .$$

<u>Alors c est une courbe différentiable de G et</u> $\dot{c}(0) = [\dot{a}(0), \dot{b}(0)]$.

En admettant ce lemme, si a et b sont les courbes précédemment considérées, alors $c(t) \in H$ pour t assez petit car H est un groupe, $c(0) = e$ donc

$$\dot{c}(0) = \left[\dot{a}(0), \dot{b}(0)\right] = [u, v]$$

appartient à $\mathfrak{H}$. Donc $\mathfrak{H}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{G}$.

Toujours avec les mêmes hypothèses (H sous-groupe abstrait) soit H_c l'ensemble des éléments h de H ayant la propriété suivante : il existe une courbe différentiable a de G telle que

$$a(0) = e \,, \quad a(1) = h \quad \text{et} \quad a(t) \in H \quad \forall\, t \in [0, 1] \,.$$

<u>On appelle</u> H_c <u>la composante connexe par arcs différentiables de H contenant e</u>. On voit facilement que H_c est un sous-groupe de H. De plus, c'est un sous-groupe distingué de H, car

$$t \longrightarrow g a(t) g^{-1}$$

est une courbe différentiable de H et si g et $a(t)$ appartiennent à H, alors $g a(t) g^{-1}$ appartient à H.

On va voir que H_c est le sous-groupe de Lie connexe H_0 d'algèbre de Lie $\mathfrak{H}$, (où $\mathfrak{H}$ est la sous-algèbre de $\mathfrak{G}$ définie ci-dessus à partir de H).

Soit donc H_0 le sous-groupe de Lie connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{H}$. Si a est une courbe différentiable : $I \longrightarrow G$ telle que

$$a(0) = e \quad \text{et} \quad a(I) \subset H \,,$$

c'est une courbe intégrale du système différentiel défini par $\mathfrak{H}$: en effet soit

$$b(t) = L_{a(t_0)^{-1}}\, a(t) \,,$$

on a

$$b(t_0) = e$$

et

$$\dot{b}(t_0) = \left(L_{a(t_0)^{-1}}\right)_* \dot{a}(t_0) \,,$$

$b(t) \in H$ puisque H est un sous-groupe, donc $\dot{b}(t_0) \in \mathfrak{H}$,

donc $\dot{a}(t_0)$ appartient à $(L_{a(t_0)})_* \mathfrak{H}_e$, c'est-à-dire à $\mathfrak{H}_{a(t_0)}$.
Or l'image de toute courbe intégrale d'un système différentiel complètement intégrable est contenue dans une feuille, donc $a(I)$ est contenu dans la feuille passant par e, c'est-à-dire dans H_0 . Tout point de H_c est par définition de la forme $a(t)$, donc

$$H_c \subset H_0 \quad .$$

Soit $(X^1, \ldots, X^r)$ une base de $\mathfrak{H}$. Soient $a_1, \ldots, a_r$ des courbes différentiables de G telles que

$$a_i(t) \in H \qquad\qquad \text{pour} \quad |t| < \epsilon$$

et

$$\dot{a}_i(0) = X_i$$

(de telles a_i existent d'après la définition de $\mathfrak{H}$). Soit φ l'application du cube Q de $\mathbb{R}^r$ (ensemble des $|t^1, \ldots, t^r|$ vérifiant $|t^i| < \epsilon$) dans G définie par

$$\varphi(t^1, \ldots, t^r) = a_1(t^1) \ldots a_r(t^r) \quad .$$

Pour $|t| < \epsilon$, $a_i(t) \in H_c$ pour $i = 1, \ldots, r$ donc

$$\varphi(t^1, \ldots, t^r) \in H_c$$

puisque H_c est un sous-groupe. L'application φ est une application différentiable de Q dans G, l'image $\varphi(Q)$ est contenue dans H_c , donc dans la feuille H_0 , donc (d'après le théorème du ch. II, §10) φ est une application différentiable de Q dans H_0 . D'autre part, φ est de rang maximum en 0 car $X_1, \ldots, X_r$ sont linéairement indépendants, donc φ définit un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^r$ sur un voisinage de e dans H_0 . Ce voisinage de e est contenu dans H_c puisque $\varphi(Q) \subset H_c$, donc H_c contient un voisinage de e dans H_0 . Or H_0 est un sous-groupe connexe, il est donc engendré par des éléments de ce voisinage de e, et puisque H_c est un sous-groupe, $H_0 \subset H_c$. Donc $H_0 = H_c$, donc H_c est un sous-groupe de Lie connexe de G.

Théorème 2 :

Soit H un sous-groupe abstrait d'un groupe de Lie G, soit H_c la composante connexe par arcs différentiables de H contenant e. Alors H_c est un sous-groupe distingué de H et H_c est un sous-groupe de Lie connexe de G.

Si H/H_c est dénombrable, alors H est un sous-groupe de Lie de G.

La dernière assertion résulte du fait que les classes de de H suivant H_c (sous-groupe distingué) sont les feuilles hH_c , $h \in H$ de $\mathfrak{H}$, et donc qu'on peut définir sur H une structure différentiable à partir des structures différentiables des feuilles hH_c qui sont disjointes. Alors H est une sous-variété de G et si H/H_c est dénombrable, alors H est à base dénombrable et c'est un groupe de Lie, sous-groupe de Lie de G.

Proposition 4 :

Soit H un sous-groupe de Lie de G et soit X un élément de son algèbre de Lie $\mathfrak{G}$. Soit $\mathfrak{H}$ l'algèbre de Lie de H. Alors pour que $X \in \mathfrak{H}$, il faut et il suffit que

$$\exp tX \in H$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

La condition nécessaire est évidente. Réciproquement si $\exp tX \in H$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit $\varphi(t) = \exp tX$, on a

$$\dot{\varphi}(0) = X_e \quad .$$

Donc X_e est dans l'algèbre de Lie de $H_c = H_0$, cette algèbre de Lie est contenue dans celle de H donc $X \in \mathfrak{H}$.

Si H est un sous-groupe de Lie de G. Soit H_0 sa composante connexe neutre et H_c la composante connexe par arc différentiable contenant e, alors

$$H_0 = H_c \quad .$$

Ceci résulte du théorème 2 et du fait que l'algèbre de Lie de H est bien l'algèbre $\mathfrak{h}$ associée au sous-groupe H dans le théorème 2.

Proposition 5 :

Soit H un sous-groupe de Lie de G et soit φ une application différentiable d'une variété différentiable M dans G, telle que

$$\varphi(M) \subset H \quad .$$

Alors φ est une application différentiable de M dans H.

En effet, soit $p \in M$ et soit U un voisinage de p difféomorphe à un cube $Q \subset \mathbb{R}^m$. Soit φ_p l'application définie par

$$\varphi_p(x) = \varphi(p)^{-1}\,\varphi(x) \qquad \text{pour } x \in U ,$$

on a

$$\varphi_p(p) = e \quad .$$

Puisque U est connexe par arcs différentiables, son image $\varphi(U)$ est connexe par arcs différentiables de G. Donc $\varphi_p(U)$ est contenu dans H_c , c'est-à-dire dans la feuille H_0 . Donc (d'après le théorème du ch. II, §10) φ_p est une application différentiable de U dans H_0 . D'autre part $L_{\varphi(p)}$ est un difféomorphisme de H puisque $\varphi(p) \in H$, donc φ est une application différentiable de M dans H.

Théorème 3 :

Soit H un sous-groupe de Lie du groupe de Lie G. Si H est un sous-groupe distingué, alors son algèbre de Lie $\mathfrak{H}$ est un idéal de $\mathfrak{G}$.

En effet, soit H_0 le sous-groupe de Lie connexe d'algèbre $\mathfrak{H}$, c'est un sous-groupe distingué, car si $g \in G$, soit $\varphi_g = A_g \circ i$, l'application composée de $i : H \longrightarrow G$ (identité) et de $A_g : G \longrightarrow G$; alors φ_g est une application différentiable de H dans G, et puisque H est distingué, l'image $\varphi_g(H)$ est contenue dans H, donc d'après la proposition 5, φ_g est une application différentiable de H dans H, en particulier elle est donc une application continue de H dans H ; donc gH_0g^{-1} est, dans H, l'image continue d'un connexe, donc un connexe qui d'autre part contient e, donc $gH_0g^{-1} \subset H_0$ pour tout $g \in G$, donc H_0 est un sous-groupe distingué. Soit X un élément de la sous-algèbre $\mathfrak{H}$, exp tX est une courbe intégrale du système différentiel $\mathfrak{H}$, donc exp tX est dans H et l'image du connexe $[0, t]$ de $\mathbb{R}$ est un connexe de H donc est contenue dans H_0 , donc

$$\exp tX \in H_0$$

et pour tout $g \in G$,

$$g(\exp tX)g^{-1} \in H_0$$

puisque H_0 est distingué. L'application $t \longrightarrow g(\exp tX)g^{-1}$ est une application différentiable de $\mathbb{R}$ dans G, l'image de $\mathbb{R}$ est contenue dans H_0 , donc (d'après le théorème ch. II §10) c'est une application différentiable de $\mathbb{R}$ dans H_0 , c'est donc un sous-groupe à un paramètre de H_0 , donc il existe $Z \in \mathfrak{H}$ tel que

$$\exp tZ = g(\exp tX)g^{-1}$$
$$= \exp t\,\mathrm{Ad}(g)X$$

c'est-à-dire

$$Z = \mathrm{Ad}(g)X \quad ,$$

ceci montre que pour tout $X \in \mathfrak{H}$, et tout $g \in G$, $\mathrm{Ad}(g)X$ est encore dans $\mathfrak{H}$. En particulier pour $g = \exp tY$ où $Y \in \mathfrak{G}$, on a $\mathrm{Ad}(\exp tY)X \in \mathfrak{H}$, or

$$\mathrm{Ad}(\exp tY)X = \exp t\, \mathrm{ad}(Y)X$$

et d'après le développement de la fonction exp ,

$$[Y, X] = \mathrm{ad}(Y)X = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[\exp t\, \mathrm{ad}(Y)X - X\right]$$

donc, si $X \in \mathfrak{H}$ et $Y \in \mathfrak{G}$, alors $[Y, X] \in \mathfrak{H}$. Donc $\mathfrak{H}$ est bien un idéal de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$.

Réciproquement :

Théorème 3' :

Si H est un sous-groupe de Lie connexe d'un groupe de Lie connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$. Si $\mathfrak{H}$ est un idéal de $\mathfrak{G}$, alors H est un sous-groupe distingué de G.

En effet, si $X \in \mathfrak{G}$ et $X \in \mathfrak{H}$, alors $\exp \mathrm{ad}(Y) \in \mathfrak{H}$, c'est-à-dire $\mathrm{Ad}(\exp Y)X \in \mathfrak{H}$. Or

$$(\exp Y)(\exp X)(\exp Y)^{-1} = \exp\big(\mathrm{Ad}(\exp Y)X\big)$$

donc

$$(\exp Y)(\exp X)(\exp Y)^{-1} \in H \quad .$$

Puisque H est connexe, tout $h \in H$ est de la forme $h = \exp X_1 \ldots \exp X_k$, $X_i \in \mathfrak{H}$, et donc

$$(\exp Y)h\,(\exp Y)^{-1} \in H$$

pour tout $Y \in \mathfrak{G}$. Or si G est lui-même connexe, tout $g \in G$ est de la forme $g = \exp Y_1 \ldots \exp Y_\ell$, donc $ghg^{-1} \in H$ pour tout $g \in G$ et tout $h \in H$, donc H est un sous-groupe distingué de G.

Soit maintenant un sous-groupe abstrait H de G qui est un sous-ensemble fermé de G. Pour la topologie induite par G, H est un sous-groupe localement compact à base dénombrable. Soit H_0 la composante connexe de H contenant e, elle est localement compacte. Soit H_c la composante connexe par arcs différentiables, de H contenant e. Alors H_c est contenu dans H_0 car si a est une courbe différentiable telle que

$$a(0) = e \quad \text{et} \quad a(t) \in H \quad ,$$

l'image par a du connexe $[0, t]$ est connexe et donc

$$a(t) \in H_0 \quad .$$

Pour montrer que H_0 est contenu dans H_c , on va montrer que H_c contient un voisinage de e dans H_0 : soit $\mathfrak{H}$ l'algèbre de Lie de H_c (sous-groupe de Lie d'après le théorème 2) et soit $\mathfrak{M}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{G}$ supplémentaire de $\mathfrak{H}$,

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{M} + \mathfrak{H}$$

(somme directe). Soient V_1 un voisinage de 0 dans $\mathfrak{M}$ et V_2 un voisinage de 0 dans $\mathfrak{H}$. Soit $\varphi : V_1 \times V_2 \longrightarrow G$ l'application qui à x, y associe exp X exp Y , c'est un difféomorphisme de $V_1 \times V_2$ sur un voisinage U de e dans G ; de plus, φ définit un difféomorphisme de $\{0\} \times V_2$ sur un voisinage U_2 de e dans H_c. Alors U_2 contient un voisinage de e dans H_0 : en effet, si cela n'était pas vrai, il existerait une suite $\{g_n\}$, $g_n \in H$, mais $g_n \notin U_2$, telle que

$$g_n \longrightarrow e$$

quand $n \longrightarrow \infty$. On peut supposer g_n dans U (toujours vrai pour n suffisamment grand), alors il existe des suites $X_n \in V_1$ et $Y_n \in V_2$ telles que

$$X_n \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad Y_n \longrightarrow 0$$

quand $n \longrightarrow \infty$, et telles que

$$g_n = \exp X_n \exp Y_n = \varphi(X_n + Y_n) \quad ,$$

et puisque g_n n'est pas dans U_2 , X_n est différent de 0.

Soit

$$a_n = \exp X_n = g_n(\exp Y_n)^{-1} \quad ,$$

a_n appartient à H car $g_n \in H$ et $(\exp Y_n) \in H_c$ puisque $Y_n \in \mathfrak{H}$ et quand $n \longrightarrow +\infty$, $a_n \longrightarrow e$. On considère une norme dans l'espace vectoriel réel $\mathfrak{G}$. Soit ϵ un nombre positif assez petit, et soit

$$Z_n = \epsilon \frac{X_n}{|X_n|} \quad ,$$

la suite $|Z_n|$ converge dans le compact $\{Z \in \mathfrak{G} \; ; \; |Z| \leq \epsilon\}$ vers un vecteur Z qui est $\neq 0$ car sa norme est ϵ. Le vecteur Z est dans V_1. Pour $t \in \mathbb{R}$, soit r_n l'entier défini par $r_n < \frac{t\epsilon}{|X_n|} \leq r_n + 1$ et soit

$$s_n = \frac{t\epsilon}{|X_n|} - r_n \quad .$$

Alors

$$t\, Z_n = \frac{t\epsilon}{|X_n|} X_n = r_n X_n + s_n X_n \quad ,$$

et quand $n \longrightarrow +\infty$, $t\, Z_n \longrightarrow tZ$, et $s_n X_n \longrightarrow 0$ car s_n reste inférieur à 1, donc

$$r_n X_n \longrightarrow tZ \quad ,$$

donc

$$\exp r_n X_n \longrightarrow \exp tZ \quad ,$$

or

$$\exp r_n X_n = (\exp X_n)^{r_n}$$

est dans H, donc $\exp tZ$ est dans H puisque H est fermé par hypothèse, donc $\exp Z$ est dans H_c et donc $Z \in \mathfrak{H}$, or $Z \in \mathfrak{M}$ et $Z \neq 0$, donc ceci est absurde et donc il existe un voisinage de e dans H_0, contenu dans U_2, c'est-à-dire contenu dans H_c. Alors H_0 qui est connexe est engendré par des éléments de ce voisinage de e et donc $H_0 \subset H_c$. Donc

$$H_0 = H_c$$

en tant qu'ensembles.

Soit $i : H_c \longrightarrow H_0$ l'application identique, où H_c est le groupe de Lie défini dans le théorème 2 et H_0 le sous-groupe de H avec la topologie induite. L'application i est un homomorphisme bijectif et continu, c'est donc un isomorphisme de groupes topologiques, donc

$$H_c = H_0$$

en tant que groupes topologiques. D'autre part, H est à base dénombrable, car H/H_0 est dénombrable, donc H est un sous-groupe de Lie fermé de G. Donc :

Théorème 4 :

Soit H un sous-groupe abstrait, groupe de Lie de G. On suppose que H est un sous-ensemble fermé de G. Alors H est un sous-groupe de Lie fermé de G.

Théorème 5 :

Soit H un sous-groupe de Lie d'un groupe de Lie G. Si H est une sous-variété régulière de G, alors H est fermé.

Lemme 1 :

Soit M une variété différentiable et N une sous-variété régulière de M. Si la dimension de N est strictement inférieure à celle de M, alors l'adhérence de N est différente de M.

En effet, pour tout point p de N, il existe un voisinage U de p dans M et r fonctions $f_1, \dots, f_r$ différentiables dans U telles que

$$df_1, \dots, df_r$$

soient linéairement indépendantes et telles que

$$N \cap U = \{q \in U \; ; \; f_1(q) = \dots = f_r(q) = 0\} \quad .$$

Si N était partout dense dans M, on aurait

$$f_1(q) = \dots = f_r(q) = 0$$

pour tout $q \in U$, ce qui est impossible si les df_i sont linéairement indépendants. Donc

$$\overline{N} \neq M \quad .$$

Lemme 2 :

Si H et H' sont des sous-groupes de Lie connexes de G tels que

$$H' \subset H$$

Alors H' est un sous-groupe de Lie de H.

Car l'application identique $i : H' \longrightarrow G$ est différentiable et l'image $i(H')$ est contenue dans H, donc (d'après le théorème du ch. II, §10) i est une application différentiable de H' dans H.

Alors si H est un sous-groupe de Lie de G, soit H_0 sa composante connexe neutre, alors $\overline{H}_0$ est un sous-groupe fermé de G donc un sous-groupe de Lie fermé de G d'après le théorème 4. Si la topologie de H est celle induite par G, c'est celle induite par $\overline{H}$ et H_0 est une sous-variété régulière de $\overline{H}_0$, d'après le lemme 2. Alors, d'après le lemme 1, la dimension de H_0 ne peut pas être inférieure à celle de $\overline{H}_0$ car $\overline{H}_0 \neq \overline{H}_0$ est absurde. Si H_0 et $\overline{H}_0$ ont la même dimension, alors ils ont la même algèbre de Lie, donc la composante connexe neutre H_0 de H est telle que

$$\overline{H}_0 = H_0 \quad ,$$

ce qui entraîne $H = \overline{H}$ car un groupe et son adhérence ne peuvent pas différer d'une composante connexe. Donc H est un sous-groupe de Lie fermé de G.

Exemple d'un sous-groupe non fermé :

Soit G l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} e^{2i\pi t} & 0 \\ 0 & e^{2i\pi s} \end{pmatrix}$$

$t, s \in \mathbb{R}$. G est isomorphe à T^2 . C'est un groupe de Lie.

Soit H l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} e^{2i\pi t} & 0 \\ 0 & e^{2i\pi at} \end{pmatrix}$$

où a est un nombre irrationnel, c'est un sous-groupe à un paramètre de G.

(Théorème de Kronecker :

Si a est un nombre irrationnel et t_0 et s_0 des nombres réels donnés, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $t \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que

$$|t_0 - t - m| < \epsilon \quad \text{et} \quad |s_0 - at - n| < \epsilon \quad).$$

Le sous-groupe H est partout dense de G. Mais il est différent de G.

Exemples de groupes de Lie et de sous-groupes de Lie :

Les sous-groupes $SL(n, K)$, $O(n)$ et $U(n)$ sont des sous-groupes fermés de $GL(n, K)$, donc des sous-groupes de Lie fermés de $GL(n, K)$. Soit $\mathfrak{gl}(n, K)$ l'algèbre de Lie de $GL(n, K)$. L'algèbre de Lie de $SL(n, K)$ est

$$\mathfrak{sl}(n, K) = \{x \in \mathfrak{gl}(n, K) \ ; \ \text{trace de } x = 0\} \quad .$$

L'algèbre de Lie de $O(n)$ est

$$\sigma(n) = \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \ ; \ {}^t x + x = 0\} \quad .$$

Un sous-groupe H de $GL(n, K)$ est algébrique si il existe un nombre fini de polynômes P_α , $\alpha = 1, \ldots, r$ des variables x_{ij} tel que

$$(a_{ij}) \in H$$

si et seulement si

$$P_\alpha(a_{ij}) = 0 \quad .$$

C'est donc un sous-groupe de Lie car c'est un sous-groupe fermé de G.

Par exemple, $SL(n, K)$ est un sous-groupe algébrique de $GL(n, K)$ car ses éléments sont ceux qui annulent le polynôme

$$P(\ldots x_{ij} \ldots) = \text{déterminant de } (x_{ij}) - 1 \quad .$$

§9. ESPACES QUOTIENTS ET GROUPES QUOTIENTS.

Soit G un groupe de Lie et H un sous-groupe fermé de G. Si on considère les structures de groupes topologiques de G et H, on sait que le quotient G/H est un espace topologique, tel que la projection canonique $\pi : G \longrightarrow G/H$ est une application continue et ouverte.

Proposition :

Soit G un groupe de Lie et H un sous-groupe fermé de G. Alors G/H est une variété différentiable vérifiant les trois propriétés suivantes :

1) La projection canonique $\pi : G \longrightarrow G/H$ est différentiable.

2) L'application de $G \times G/H$ dans G/H qui à (s, tH) fait correspondre stH est différentiable.

3) <u>Pour tout $x \in G/H$, il existe un voisinage W_x de x et une application différentiable</u> $\sigma_x : W_x \longrightarrow G$ <u>vérifiant</u>

$$\pi \circ \sigma_x(y) = y \quad \forall\, y \in W_x \quad .$$

En effet, soit $(X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}, \ldots, X_n)$ une base de $\mathfrak{G}$ (algèbre de Lie de G) telle que

$$(X_{m+1}, \ldots, X_n)$$

soit une base de $\mathfrak{H}$, algèbre de Lie de H. Soient $x^1, \ldots, x^n$ les coordonnées canoniques de 2ème espèce relatives à cette base, dans un voisinage U_ε de e, c'est-à-dire que tout $g \in U_\varepsilon$ s'écrit

$$g = \left(\exp x^1(g)X_1\right) \ldots \left(\exp x^n(g)X_n\right)$$

et

$$|x^i(g)| < \varepsilon \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, n \quad .$$

Soit

$$U'_\varepsilon = \{g \in U_\varepsilon \; ; \; x^{m+1}(g) = \ldots = x^n(g) = 0\}$$

et

$$U''_\varepsilon = \{g \in U_\varepsilon \; ; \; x^1(g) = \ldots = x^m(g) = 0\} \quad ,$$

on a

$$U_\varepsilon = U'_\varepsilon\, U''_\varepsilon \quad \text{et} \quad U'_\varepsilon \cap U''_\varepsilon = \{e\} \quad ,$$

et d'autre part U''_ε est contenu dans H, car si $X_i \in \mathfrak{H}$ alors $\exp tX_j$ est contenu dans H pour t assez petit. Si ε est assez petit,

$$U''_\varepsilon = U_\varepsilon \cap H$$

et c'est un voisinage de e dans H. Soient δ_i, $i = 1, \ldots, n$ des nombres positifs inférieurs à ε, soit

$$V = \left\{g \in U_\varepsilon \; ; \; |x^i(g)| < \delta_i,\ i = 1, \ldots, n\right\} \quad ;$$

on peut choisir un tel V vérifiant $V^{-1}V \subset U_\varepsilon$. On a $V = V'V''$ où $V' = V \cap U'_\varepsilon$ et $V'' = V \cap U''_\varepsilon$. Soit $W = \pi(V)$, c'est un voisinage de l'élément neutre dans G/H car π est ouverte.

Tout élément y de W se met de façon unique sous la forme $y = gH$ avec $g \in V'$, car si $y = \pi(g) = \pi(g_1)$ où g et g_1 appartiennent à V', alors $g^{-1}g_1 \in H$ et d'autre part

$$g^{-1}g_1 \in V'^{-1}V' \subset U_\varepsilon \quad ,$$

donc

$$g^{-1}g_1 \in U_\varepsilon \cap H = U''_\varepsilon \quad ,$$

or si $g_1 = gh$ où $h \in U''_\varepsilon$ et $g \in V'$, les coordonnées de g_1 sont

$$x^1(g), \ldots, x^m(g), x^{m+1}(h), \ldots, x^n(h)$$

donc $h = e$ puisque $g_1 \in V'$, donc

$$g = g_1 \quad .$$

Soit $\sigma : W \longrightarrow G$ l'application qui à y, associe l'élément g de V' tel que

$$y = gH \quad .$$

Alors σ est un homéomorphisme de W sur V' vérifiant $\pi \circ \sigma(y) = y$ pour tout $y \in W$.

Soit maintenant x un point quelconque de G/H (pas forcément voisin de e), soit $s \in G$ tel que

$$x = \pi(s) \quad ,$$

soit $T_s : G/H \longrightarrow G/H$ l'homéomorphisme défini par $T_s(tH) = stH$. Alors x est le transformé par T_s de l'élément neutre de G/H et $W_x = T_s(W)$ est un voisinage de x. Soit $\sigma_x = L_s \circ \sigma \circ T_{s^{-1}}$, alors σ_x vérifie $\pi \circ \sigma_x(y) = y$ pour tout $y \in W_x$ et σ_x est un homéomorphisme de W_x sur le sous-espace $L_s(V')$ de G. Or $L_s(V')$ est homéomorphe à V', lequel est homéomorphe au pavé de $\mathbb{R}^n$

$$\left\{(u^1, \ldots, u^m) \; ; \; |u^i| < \delta^i, \; i = 1, \ldots, m\right\} \quad .$$

Donc tout point x de G/H possède un voisinage W_x homéomorphe à un pavé de $\mathbb{R}^m$. Donc G/H est une variété topologique de dimension m. On vérifie sans difficulté que c'est une variété différentiable et que l'on a les 3 propriétés annoncées.

Avec les notations précédentes, on a

$$\pi^{-1}(W_x) = \left(\sigma_x(W_x)\right) \cdot H = L_s(V)H \quad .$$

L'application de $W_x \times H$ dans $\pi^{-1}(W_x)$ qui à (y, h) associe $\sigma_x(y)h$, est un difféomorphisme. G est un espace fibré principal de base G/H et de groupe structural H.

On suppose H distingué, alors G/H est muni d'une structure de groupe. C'est d'autre part, une variété différentiable. On va montrer que c'est un groupe de Lie : G/H est à base dénombrable car G l'est. On considère l'application $\bar{\varphi} : G/H \times G/H \longrightarrow G/H$ qui à x, y associe xy . Soit $\varphi : G \times G/H \longrightarrow G/H$ l'application qui à, (s, tH) associe stH, elle est différentiable d'après la proposition précédente et la restriction de φ à $W_x \times G/H$ est l'application composée :

$$W_x \times G/H \xrightarrow{(\sigma_x,\ \text{identité})} G \times G/H \xrightarrow{\varphi} G/H \quad ,$$

or σ est différentiable, donc φ est différentiable sur $W_x \times G/H$. Ceci est vrai pour tout $x \in G/H$, donc φ est différentiable. On montre aussi, par l'intermédiaire de W_x, que l'application $\bar{\Psi} : G/H \longrightarrow G/H$ qui à x associe x^{-1} est différentiable. Donc :

<u>Théorème</u> :

<u>Si H est un sous-groupe fermé distingué d'un groupe de Lie G, alors G/H est un groupe de Lie</u>.

Soient maintenant G et G' deux groupes de Lie et φ un homomorphisme de G sur G'. Soit N le noyau de φ, c'est l'image réciproque du point e', c'est donc un sous-ensemble fermé de G et donc un sous-groupe de Lie fermé de G. On considère le quotient G/N . Alors φ induit un isomorphisme continue $\bar{\varphi} : G/N \longrightarrow G'$. Si N est distingué, alors G/N est un groupe de Lie et $\bar{\varphi}$ est un isomorphisme de groupes de Lie entre G/N et G'.

Soit $\mathfrak{N}$ l'algèbre de Lie de N, si N est distingué, c'est un idéal de $\mathfrak{G}$. On considère l'homomorphisme φ_* de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{G}'$; il est défini par $\varphi(\exp tX) = \exp t\varphi_* X$. On a $\varphi_* X = 0$ si et seulement si $\varphi(\exp tX) = \{e\}$, c'est-à-dire

$$\exp tX \in N ,$$

c'est-à-dire $X \in \mathfrak{N}$, donc $\mathfrak{N}$ est le noyau de φ_*, donc $\mathfrak{G}'$ est isomorphe à l'algèbre de Lie quotient $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. En considérant le cas particulier où φ est la projection canonique de G sur G/N , on obtient le résultat suivant :

Théorème :

Soit N un sous-groupe distingué fermé, du groupe de Lie G. Soit $\mathfrak{N}$ son algèbre de Lie. Alors l'algèbre de Lie du quotient G/N est isomorphe à $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$.

§10. GROUPES DE TRANSFORMATIONS DE LIE

Définition :

Soit G un groupe de Lie et M une variété différentiable. On dit que G opère différentiablement sur M (ou que G est un groupe de transformations de Lie de M) s'il existe une application différentiable : $G \times M \longrightarrow M$ qui à (s, x) associe sx de telle manière que :

1) Pour tous $s, t \in G$ et $x \in M$,

$$st(x) = s(tx)$$

2) Pour tout $x \in M$,

$$ex = x .$$

Pour $s \in G$, soit $T_s : M \longrightarrow M$ l'application qui à x associe sx. C'est un difféomorphisme de M.

Soit H le groupe d'isotropie de G au point x de M,

$$H = \{ s \in G \; ; \; sx = x \} \quad ,$$

c'est un sous-groupe fermé de G, donc un sous-groupe de Lie fermé de G. Soit $s \in H$, T_s laisse fixe x et $(T_s)_*$ est un endomorphisme inversible de $T_x(M)$. L'application $s \longrightarrow (T_s)_*$ est une représentation linéaire de H, <u>c'est par définition la représentation isotropique de H.</u>

Soit $\tilde{H}$ l'ensemble des $(T_s)_*$ où $s \in H$, c'est un sous-groupe de $GL\left(T_x(M)\right)$ appelé <u>groupe d'isotropie linéaire</u> de G en x.

Soit $\mathfrak{G}$ l'algèbre de Lie de G. Soit $X \in \mathfrak{G}$, alors

$$a_t = T_{\exp -tX}$$

est un groupe de transformation à un paramètre de M ; soit X^* sa transformation infinitésimale, défini par $a_t = \exp tX^*$.

<u>Proposition</u> :

<u>L'application de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{X}(M)$ (ensemble de tous les champs de vecteurs sur M) qui à X fait correspondre X^* est un homomorphisme d'algèbre de Lie.</u>

En effet, pour $x \in M$, soit S_x l'application de G dans M qui à t associe $S_x(t) = tx$. Alors

$$S_x(\exp - tX) = a_t(x) = (\operatorname{Exp} tX^*)(x) \quad ,$$

donc les vecteurs tangents aux courbes $t \longrightarrow \exp - tX$ et $t \longrightarrow (\operatorname{Exp} tX^*)(x)$ se correspondent par $(S_x)_*$, c'est-à-dire que l'on a

$$(S_x)_* \, (-X_e) = (X^*)_x \quad . \tag{1}$$

Donc

$$(X + Y)^*_x = -(S_x)_*(X + Y)_e = -(S_x)_* X_e - (S_x)_* Y_e = X^*_x + Y^*_x$$

pour tout $x \in M$, et

$$(\lambda X)^*_x = -(S_x)_*(\lambda X)_e = -\lambda (S_x)_* X_e = \lambda X^*_x \quad ,$$

ce qui prouve que l'application est linéaire. D'autre part, on a :

$$[X^*, Y^*]_x = \lim_{t \to 0} \left[Y^*_x - ((a_t)_* Y^*)_x \right]$$

et

$$((a_t)_* Y^*)_x = -(a_t)_* \left(S_{a_{-t}(x)}\right)_* Y_e \quad \left(\text{car } \left(S_{a_{-t}(x)}\right)_* (-Y_e) = Y^*_{a_{-t}(x)}\right)$$

$$= -\left(a_t S_{a_{-t}(x)}\right)_* Y_e \qquad \text{d'après (1)} .$$

Or

$$a_t S_{a_{-t}(x)}(s) = a_t \left(s \, a_t^{-1} (x)\right) = \left(s_t^{-1} \, s \, s_t\right)(x) = S_x \left(s_t^{-1} \, s \, s_t\right)$$

où s_t désigne le sous-groupe à 1 paramètre $\exp tX$, c'est-à-dire $a_t S_{a_{-t}(x)} = S_x A_{s_{-t}}$, donc

$$((a_t)_* Y^*)_x = -(S_x)_* \left(A_{s_{-t}}\right)_* Y_e$$

$$= -(S_x)_* \left(R_{s_t}\right)_* Y_e \qquad \text{car } Y \text{ est invariant à gauche et } A_g = L_g R_{g^{-1}} .$$

D'autre part $Y^*_x = -(S_x)_* Y_e$, d'après (1), donc

$$[X^*, Y^*]_x = -(S_x)_* \left(\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[Y_e - ((R_{s_t})_* Y)_e \right] \right)$$

$$= -(S_x)_* [X, Y]_e$$

$$= [X, Y]^*_x \qquad \text{d'après (1), ceci } \forall x \in M ,$$

donc

$$[X^*, Y^*] = [X, Y]^* \quad .$$

c.q.f.d.

Définition :

On dit que G opère effectivement sur M si $sx = x$ pour tout $x \in M$ entraîne
$$s = e \quad .$$

Si G opère effectivement sur M, l'application qui à X associe X^* est un isomorphisme de $\mathfrak{G}$ sur une sous-algèbre de $\mathfrak{X}(M)$. Car si $X^* = 0$, alors $\mathrm{Exp}\, tX^*$ est l'identité pour tout t, donc
$$T_{\exp tX}(x) = x$$
ce qui entraîne
$$\exp tX = e \qquad \text{pour tout } t,$$
donc
$$X = 0 \quad .$$
Soit $\mathfrak{G}^*$ l'image de $\mathfrak{G}$ par cette application. C'est une sous-algèbre de $\mathfrak{X}(M)$ appelée algèbre de Lie des transformations infinitésimales de G. Si G opère effectivement sur M, alors $\mathfrak{G}$ est isomorphe à $\mathfrak{G}^*$.

Si G opère transitivement sur M, on dit que M est un espace homogène du groupe de Lie G.

Si H est un sous-groupe fermé de G, alors G/H est un espace homogène de G.

Soit M un espace homogène de G. Soit H le groupe d'isotropie de G en un point x_0. Soit $\alpha : G/H \longrightarrow M$ l'application qui à sH associe sx_0 ; on sait que α est un homéomorphisme. Si on considère maintenant les structures différentiables, α est un difféomorphisme.

Exemple :

La variété grasmannienne $G_{N,n}$ est homéomorphe à $GL(n, \mathbb{R})/N$. On peut définir sur $G_{N,n}$ une structure différentiable de telle sorte que $G_{N,n}$ soit difféomorphe à $GL(n, \mathbb{R})/N$.