CIF

Erratum remplaçant la page 16 et la proposition 6.2 de la page 17

Cours de l'institut Fourier, tome 7 (1972), p. 1-2

<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1972__7__0_0>

E R R A T U M remplaçant la page 16 et la Proposition 6.2 de la page 17.

6. GROUPES DES CLASSES D'UN CORPS QUADRATIQUE REEL.

L'étude du cas des corps quadratiques réels est plus délicate que celle du cas imaginaire. La caractérisation des idéaux réduits sans facteur rationnel et entiers se fait grâce aux énoncés suivants :

Lemme 6.1.

Soit $\mathfrak{a}$ *un idéal entier réduit d'un corps quadratique réel* k . *Cet idéal admet une racine dans l'intervalle* $]\bar{\theta},\theta[$.

Démonstration : Soit c la plus grande racine de $\mathfrak{a}$ inférieure à $\bar{\theta}$. On a

$$\varphi(\theta-c) = \max\{|\theta-c|,|\bar{\theta}-c|\} = \theta-c \geq N\mathfrak{a} .$$

Par conséquent, on a $\bar{\theta} < c+N\mathfrak{a} \leq \theta$. Puisque θ est irrationnel, la racine $c+N\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{a}$ appartient à $]\bar{\theta},\theta[$.

Proposition 6.2.

Soit $\mathfrak{a}$ *un idéal entier sans facteur rationnel d'un corps quadratique réel* k . *Les deux assertions suivantes sont équivalentes* :

1) *L'idéal* $\mathfrak{a}$ *est réduit* ;
2) *L'idéal* $\mathfrak{a}$ *admet deux racines dans l'intervalle* $]\bar{\theta},\theta[$.

Démonstration :

■ Si $\mathfrak{a}$ est réduit et si c est la plus grande racine de $\mathfrak{a}$ inférieure à $\bar{\theta}$ on a d'une part

$$\bar{\theta} < c+n\mathfrak{a} < \theta$$

et d'autre part

$$\varphi(\theta-c-N\mathfrak{a}) = \max\{\theta-c-N\mathfrak{a} , c+N\mathfrak{a}-\bar{\theta}\} > N\mathfrak{a}$$

c'est-à-dire

$$\varphi(\theta-c-N\mathfrak{a}) = \theta-c-N\mathfrak{a} > N\mathfrak{a} \quad \text{et} \quad c+2N\mathfrak{a} \in]\bar{\theta},\theta[.$$

Ceci prouve l'implication 1) $\Rightarrow$ 2).

■ Si $\mathfrak{a}$ possède deux racines dans l'intervalle $]\bar{\theta},\theta[$ soit c la plus grande des racines de $\mathfrak{a}$ appartenant à $]\bar{\theta},\theta[$. On a

$$0 < \theta - c < N\mathfrak{a} \quad \text{et} \quad c - N\mathfrak{a} > \bar{\theta} .$$

Soit $\alpha = uN\mathfrak{a} + v(\theta - c)$ un élément de $\mathfrak{a}$ tel que $\varphi(\alpha) < N\mathfrak{a}$. On a les deux systèmes d'inégalités

$$- N\mathfrak{a} < uN\mathfrak{a} + v(\theta - c) < N\mathfrak{a}$$

$$- N\mathfrak{a} < uN\mathfrak{a} + v(\bar{\theta} - c) < N\mathfrak{a} .$$

Il résulte de ces inégalités que $|v|(\theta - \bar{\theta}) < 2N\mathfrak{a}$. Si $\theta - \bar{\theta} > 2N\mathfrak{a}$, alors $v = u = 0$ et on conclut que $\mathfrak{a}$ est réduit. Si $\theta - \bar{\theta} \in \,]N\mathfrak{a}, 2N\mathfrak{a}[$, on peut supposer en remplaçant α par $-\alpha$ qu'on a $v \in \{0,1\}$. L'hypothèse $v = 1$ est contradictoire car elle implique

$$0 < -1 - \frac{\bar{\theta} - c}{N\mathfrak{a}} < u < 1 - \frac{\theta - c}{N\mathfrak{a}} < 1 .$$

Par conséquent, on a $v = u = 0$ et on conclut que l'idéal $\mathfrak{a}$ est réduit.