COURS DE L'INSTITUT FOURIER

A. KANEKO

Introduction

Cours de l'institut Fourier, tome 12 (1977-1978), p. 3-8
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1977-1978__12__3_0>

I N T R O D U C T I O N

Ce cours a pour but de donner une introduction assez complète à la théorie des hyperfonctions. Il s'agit d'étendre la notion de fonctions pour leur libre dérivation. C'étai un grand et long rêve d'analystes et deux événements historiques a même poussé les mathématiciens à telles études. Un est le calcul opérationnel introduit par un technicien anglais qui contient la fonction discontinue portant son nom Heaviside:

$$Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{pour } x \leq 0, \\ 1, & \text{pour } x > 0. \end{cases}$$

L'autre est l'introduction d'une bizarre "fonction" dans la mécanique quantique par un physicien anglais portant aussi le nom d'inventeur Dirac:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{pour } x \neq 0, \\ +\infty & \text{pour } x = 0, \end{cases}$$

de sorte que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1,$$

et plus généralement, pour une fonction régulière φ,

$$(0.1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x)dx = \varphi(0).$$

Les deux "fonctions" satisfont à la curieuse relation

$$(0.2) \qquad Y'(x) = \delta(x).$$

C'était le mathématicien français L. Schwartz qui, après quelques pionniers, en a donné pour la première fois une interprétation systématique connue sous le nom de la théorie des distributions: On considère l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à supports compacts $D(R)$ avec une topologie convenable. Son dual topologique, désigné par $D'(R)$, est l'espace des distributions qui contient les fonctions usuelles (i.e. les fonctions localement sommables) et aussi $\delta(x)$. Autrement dit, $\delta(x)$ est considéré comme une fonctionnelle linéaire et continue sur D(R). On peut introduire les opérations d'addition, de dérivation comme le dual d'opérations correspondantes dans l'espace original. La formule (0.2) est alors justifiée comme un calcul d'intégration par parties:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x)dx = \varphi(0) = -\int_{0}^{\infty}\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty}Y(x)\varphi'(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}Y'(x)\varphi(x)dx.$$

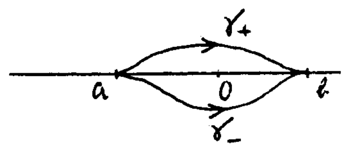
Remarquons que cette théorie est une extension naturelle de la théorie des intégrales. Alors que la fonction $\delta(x)$ est très importante dans les mathématiques modernes, la fonction au sens de Dirichlet:

$$(0.3)\qquad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{pour } x = 0, \\ 0, & \text{pour } x \neq 0, \end{cases}$$

n'a pas de signification propre; elle est identifiée avec la fonction constante 0. La théorie de la dualité est en effet une façon de moderniser la théorie des intégrales.

Un autre mathématicien japonais, nommé M. Sato, a rencontré dans sa jeunesse la théorie de Schwartz avec émotion. Mais il y a senti une étrangeté. Il a une conception particulière des mathématiques. Il croit que de bonnes mathématiques doivent être naturelles, alors que les fonctions dans D(R) lui ont semblé artificielles. A son avis les seules fonctions naturelles sont des fonctions holomorphes. Et à ce point de vue il a développe une autre interprétation, appelée la théorie des hyperfonctions. Considérons à nouveau la formule du début (0.1). Tout naturellement cela nous rappelle la formule de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\varphi(z)}{z}dz = \varphi(0),$$



où $\gamma = -\gamma_+ + \gamma_-$ est un chemin fermé et simple autour de l'origine dans le sens positif. En vertu du théorème de Cauchy, l'intégrale sur chaque partie $\gamma_\pm$ ne dépend que des extrémités a, b, de sorte que l'on peut la réécrire symboliquement comme suit:

$$= \int_{\gamma_+} -\frac{1}{2\pi i}\frac{\varphi(z)}{z}dz - \int_{\gamma_-} -\frac{1}{2\pi i}\frac{\varphi(z)}{z}dz$$
$$= \int_a^b -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right)\varphi(x)dx,$$

ou encore, comme les extrémités non plus n'ont pas de sens particulier, on peut la réécrire:

$$(0.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right)\varphi(x)dx = \varphi(0).$$

On a donc finalement la définition de la fonction δ:

$$(0.5) \quad \delta(x) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right),$$

avec la définition d'intégrale définie ci-dessus. Soit maintenant $F(z)$ une fonction holomorphe entière. La formule de Cauchy donne aussi

$$\oint_\gamma \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{z} + F(z)\right)\varphi(z)dz = \varphi(0).$$

On a donc aussi

$$\delta(x) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i0} + F(x+i0) - \frac{1}{x-i0} - F(x-i0)\right),$$

où les termes $F(x\pm i0)$ s'annulent entre eux, ce qui est naturel comme un calcul symbolique. On interprète de cette façon $\delta(x)$ comme un élément de l'espace vectoriel $\mathcal{O}(C\setminus R)/\mathcal{O}(C)$, où $\mathcal{O}$ désigne le faisceau des fonctions holomorphes. Dans cet espace $Y(x)$ est définie comme la classe de $F(z) = -\frac{1}{2\pi i}\log(-z)$, log désignant la détermination principale. Cette définition est plausible, car fa différence $F(x+i0) - F(x-i0)$ s'annule sur $x < 0$ tandisqu'elle donne la période 1 sur $x > 0$. La formule (0.2) est alors interprétée comme la dérivation ordinaire pour les représentants:

$$\left(-\frac{1}{2\pi i}\log(-z)\right)' = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}.$$

Avec un peu de connaissance sur la théorie cohomologique des faisceaux, on trouve que l'espace de quotient $\mathcal{O}(C\smallsetminus R)/\mathcal{O}(C)$ est isomorphe à $H^1_R(C,\mathcal{O})$, ou encore noté par $H^1(C,C\smallsetminus R,\mathcal{O})$, le groupe de cohomologie relative à support dans R ou de C mod $C\smallsetminus R$ à valeur dans $\mathcal{O}$. En effet la théorie de Sato a son fondement dans la théorie cohomologique des fonctions holomorphes. Notons que la théorie de la cohomologie est l'autre façon de moderniser la théorie des intégrales. (La fonction (0.3) est toujours identifiée avec 0 comme une hyperfonction.) Ce point de vue cohomologique distingue la théorie des hyperfonctions des autres essais de généraliser la théorie des distributions basés toujours sur la dualité. Néanmoins on trouve que l'espace des hyperfonctions $B(R)$ ainsi introduit est si grand qu'il contient $D'(R)$. Il satisfait à un principe de localisation. Un seul défaut apparent est qu'il n'a plus de topologie raisonable de sorte que l'on doit souvent le traiter de façon purement algébrique. Cela pose quelque ennui sur les analystes, mais il offre dans les applications d'autant plus de mérites en clarté comme en est le rôle de la série formelle.

Dans la suite nous allons d'abord exposer le cas d'une variable où la simple représentation $\mathcal{O}(C\smallsetminus R)/\mathcal{O}(C)$ supprime la nécessité de la théorie cohomologique des faisceaux. Mais nous introduirons les notations de faisceaux pour y habituer les auditeurs petit à petit. On expliquera ensuite la manœuvre intuitive des hyperfonctions de plusieurs variables. Les théorèmes fondamentaux supposés là seront démontrés après quelques préparations de la théorie cohomologique des faisceaux. Nous donnerons aussi des exposés introductoires de la théorie des fonctions de plusieurs variables. J'espère que ce cours servira aussi comme une introduction à ces deux objets. Nous parlerons de temps en temps de la distribution pour la comparaison, mais la connaissance de celle-ci n'est pas indispensable.

Nous supposerons connues la théorie des fonction d'une variable, la topologie générale et des connaissances communes d'analyse. Puisque nous ne pouvons pas donner toutes les démonstrations en détail, nous recommandons à ceux qui ne sont pas familiers d'étudier les sujets préparatoires, surtout le début d'algèbre homologique parallèlement au cours.

Ce cours a emprunté beaucoup de points aux littératures suivantes écrites en japonais:

-M. Kashiwara "Sur la structure des hyperfonctions", Progrès de mathématiques 15-1 (1970),9-72.

-M.Kashiwara "Fondement d'analyse algébrique", Rédigé de cours à l'Université de Nagoya, 1975.

-K. Kataoka "Sur la transformation de Radon d'hyperfonctions et ses applications", Thèse de maîtrise à l'Université de Tokyo, 1976.

-M. Morimoto "Introduction à la théorie des hyperfonctions de Sato", Kyôritsu, Tokyo, 1976.

Un principal caractère de ce cours est que nous avons donné des exposés détaillés pour la relation entre le calcul explicite basé sur l'expression valeurs au bord et la description cohomologique abstraite. Aussi, pour établir le fondement de faisceau de microfonctions nous avons utilisé la décomposition courbilinéaire de la fonction δ au lieu de la cohomologie relative généralisée ou la catégorie triangulée. Cela facilitera la comprehension pour analystes.

Pour terminer nous indiquons des littératures disponibles en français:

-P. Schapira "Théorie des hyperfonctions", Lecture Notes in Math. 126, Springer, Berlin, 1970.

-A.Cerezo, A.Piriou et J.Chazarain "Introduction aux hyperfonctions", Colloques hyperfonctions et physique théorique, Lecture Notes in Math. 449, Springer, 1975, pp 1-53.

-J.-M. Bony "Hyperfonctions et équations aux dérivées partielles" Rédigé de cours de 3^{e} cycle, Orsay, 1976.

La deuxième est un très bon résumé de loute la théorie et pourrait être considérée comme un résumé de ce cours même. Une indication plus détaillée sur la littérature sera donnée à la fin du cours.