A. KANEKO

Chapitre V. Propriétés cohomologiques des faisceaux O et B

Cours de l'institut Fourier, tome 13 (1977-1978), p. 1-30
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1977-1978__13__A2_0>

CHAPITRE V. PROPRIETES COHOMOLOGIQUES DES FAISCEAUX $\mathcal{O}$ ET B.

1. Théorème d'Oka-Cartan.

Dans ce paragraphe nous démontrons la nullité des groupes de cohomologie d'un ouvert de Stein à valeurs dans $\mathcal{O}$. C'est le théorème clef pour résoudre des problèmes du type Cousin, i.e. pour le problème de recollement d'une construction locale à une globale qui n'est pas nécessairement unique.

Lemme 5.1.1 (Cousin) Soient $U_0, U_1 \subset C$ des domaines bornés. Soit $\overline{W} \subset C^m$ un ~~ouvert~~ compact. Soit $F(z,w)$ une fonction holomorphe définie sur $(\overline{U}_0 \cap \overline{U}_1) \times \overline{W}$. Il existe alors des fonctions $F_j(z,w)$, $j=0, 1$, holomorphes respectivement sur $\overline{U}_j \times \overline{W}$ telles que $F(z,w) = F_1(z,w) - F_0(z,w)$ sur $(\overline{U}_0 \cap \overline{U}_1) \times \overline{W}$.

Démonstration sera faite comme dans celle du Lemme 1.5.1. En effet, choisissons des ouverts $V_j \supset \overline{U}_j$ bornés et à frontière régulière par morceaux tels que $F_j(z,w)$ soient holomorphes dans $(\overline{V}_0 \cap \overline{V}_1) \times \overline{W}$. Soient γ_j la partie de ∂V_j contenue dans $\overline{V}_{1-j}$, $j=0, 1$. Alors

$$F_j(z,w) = \frac{(-1)^{1-j}}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{F(\zeta,w)}{\zeta - z} d\zeta, \quad j = 0, 1,$$

est une solution voulue.

Lemme 5.1.2. Soit $\Delta = \Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$ un polydisque fermé. Alors on a $H^k(\Delta, \mathcal{O}) = 0$ pour $k \geq 1$.

Démonstration Avançons par la récurrence sur la dimension n. Pour cela démontrons une proposition un peu plus générale: "Soit $\overline{W} \subset C^m$ un polydisque fermé et $f: \Delta \times \overline{W} \to \Delta$ la projection. Soit $\mathcal{O}$ le faisceau de fonctions holomorphes sur $\Delta \times \overline{W}$. On a alors $H^k(\Delta, f_*\mathcal{O}) = 0$ pour $k \geq 1$."

Considérons d'abord le cas $n = 1$, où l'on suppose plus généralement que Δ est un domaine borné fermé à frontière régulière par morceaux. Il suffit de calculer la cohomologie de Čech. Le cas $k = 1$ est donc une simple modification du Lemme 1.5.2 en tenant compte du Lemme 5.5.1. Soit donc $k > 1$. Soit $\mathcal{U} = \{\overline{U}_1, \dots, \overline{U}_N\}$ un recouvrement de Δ formé de domaines fermés à frontière régulière par morceaux. Nous allons démontrer $H^k(\mathcal{U}, f_*\mathcal{O}) = 0$ par récurrence sur k et N. (On a employé ici un recouvrement fermé pour échapper de l'ennui de prendre un raffinement. La signification sera claire. Notons aussi qu'il suffit de faire la récurrence sur k pour une seule étape $k = 2$. En effet on peut toujours prendre un raffinement $\mathcal{V}$ tel que $C^k(\mathcal{V}, f_*\mathcal{O}) = 0$ pour $k \geq 3$.) Soit $\varphi \in C^k(\mathcal{U}, f_*\mathcal{O})$ et écrivons $\varphi = \overline{U}_N \wedge \varphi^N + \varphi'$ où φ^N et φ' ne contiennent pas le facteur $\overline{U}_N$. Plus précisément, si on pose $\mathcal{U}' = \{\overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_{N-1}\}$, un recouvrement de $\Delta' = \bigcup_{j=1}^{N-1} \overline{U}_j$, on a $\varphi' \in C^k(\mathcal{U}', f_*\mathcal{O})$ et $\varphi^N \in C^{k-1}(\mathcal{U}'|_{\overline{U}_N}, f_*\mathcal{O})$ au sens évident. En désignant par δ' l'opérateur de cobord pour $\mathcal{U}'$, on a alors

$$\delta\varphi = \overline{U}_N \wedge (-\delta'\varphi^N) + \overline{U}_N \wedge \varphi' + \delta'\varphi' = 0,$$

d'où $\delta'\varphi' = 0$. D'après l'hypothèse de la récurrence il existe $\psi' \in C^{k-1}(\mathcal{U}', f_*\mathcal{O})$ tel que $\delta'\psi' = \varphi'$. On a donc

$$\overline{U}_N \wedge (\delta'(-\varphi^N + \psi')) = 0, \quad \text{i.e.} \quad \delta'(-\varphi^N + \psi'|_{\overline{U}_N}) = 0.$$

Appliquant encore l'hypothèse de la récurrence au recouvrement $\mathcal{U}'|_{\overline{U}_N}$ de $\overline{U}_N$, On obtient $\psi^N \in C^{k-2}(\mathcal{U}'|_{\overline{U}_N}, f_*\mathcal{O})$ tel que $\delta'\psi^N = -\varphi^N + \psi'|_{\overline{U}_N}$. Considérons $\overline{U}_N \wedge \psi^N$ comme un élément de $C^{k-1}(\mathcal{U}, f_*\mathcal{O})$ de façon évidente et posons maintenant $\psi = \overline{U}_N \wedge \psi^N + \psi'$. On a alors

$$\delta\psi = \overline{U}_N \wedge (-\delta'\psi^N) + \overline{U}_N \wedge \psi' + \delta'\psi' = \overline{U}_N \wedge \varphi^N + \varphi' = \varphi.$$

Supposons maintenant que notre proposition récurrente est vraie pour la dimension $n-1$. Soit $\pi_n : \Delta_1 \times \ldots \times \Delta_n \to \Delta_n$ la projection. Fixons $z_n \in \Delta_n$. On a $\pi_n^{-1}(z_n) = \Delta_1 \times \ldots \times \Delta_{n-1} \times \{z_n\}$. Soit $\overline{V} \ni z_n$ un voisinage compact. Soit $\varpi_{\overline{V}} : \Delta_1 \times \ldots \times \Delta_{n-1} \times \overline{V} \to \Delta_1 \times \ldots \times \Delta_{n-1} \times \{z_n\}$ la projection. L'hypothèse de la récurrence implique que

$$H^k(\Delta_1 \times \ldots \times \Delta_{n-1} \times \{z_n\}, \varpi_{\overline{V}*} f_*\mathcal{O}) = 0, \quad \text{pour } k \geq 1.$$

Notons que pour $z = (z', z_n)$ on a

$$\varinjlim_{\overline{V} \ni z_n} (\varpi_{\overline{V}*} f_*\mathcal{O})_z = \varinjlim_{\overline{V} \ni z_n} \varinjlim_{\overline{U}' \ni z'} f_*\mathcal{O}(\overline{U}' \times \overline{V}) = (f_*\mathcal{O})_z,$$

i.e. que $\varinjlim_{\overline{V} \ni z_n} \varpi_{\overline{V}*} f_*\mathcal{O} = f_*\mathcal{O}|_{\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_{n-1} \times \{z_n\}}$. Donc d'après le Lemme 4.2.5 en passant à la limite inductive on obtient

Il est clair par la démonstration que le Lemme 5.1.2 ainsi que son corollaire sont valable pour un domaine compact cylindrique $K_1 \times \dots \times K_n$ au lieu d'un polydisque.

$$H^k(\Delta_1 \times \dots \times \Delta_{n-1} \times \{z_n\}, f_* \mathcal{O}|_{\Delta_1 \times \dots \times \Delta_{n-1} \times \{z_n\}}) = 0 \quad \text{pour} \quad k \geq 1.$$

En vertu du ~~Corollaire~~ Théorème 4.6.7 cela signifie que π_n est pur de dimension 0 par rapport à $f_*\mathcal{O}$. On obtient donc d'après le Théorème 4.6.3

$$H^k(\Delta, f_*\mathcal{O}) = H^k(\Delta_n, \pi_{n*} f_* \mathcal{O}).$$

Ce dernier s'annule pour $k \geq 1$ d'après la première partie de la récurrence.

C.Q.F.D.

En combinaison avec le Corollaire 4.3.7 et le Théorème 4.3.3 on obtient le

<u>Corollaire 5.1.3</u> Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur un polydisque fermé Δ ayant une résolution réciproque du type suivant:

$$0 \longleftarrow \mathcal{F} \longleftarrow \mathcal{O}^{l_0} \longleftarrow \dots \longleftarrow \mathcal{O}^{l_m} \longleftarrow 0.$$

Alors on a $H^k(\Delta, \mathcal{F}) = 0$ pour $k \geq 1$. De plus, on a la suite exacte suivante:

$$0 \longleftarrow \mathcal{F}(\Delta) \longleftarrow \mathcal{O}(\Delta)^{l_0} \longleftarrow \dots \longleftarrow \mathcal{O}(\Delta)^{l_m} \longleftarrow 0.$$

(Bien entendu, $\mathcal{O}^l$ est le faisceau défini par $U \mapsto \mathcal{O}^l(U) = \mathcal{O}(U)^l$.)

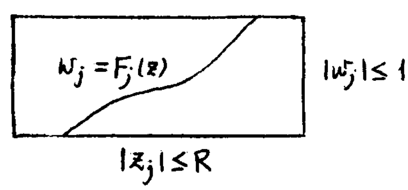
Considérons ensuite un polyèdre analytique fermé D dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$. Supposons que

$$D = \text{une composante connexe de } \{z \in U; |F_j(z)| \leq 1,\ j=1,\dots,d\},$$

avec $F_j(z) \in \mathcal{O}(U)$. Supposons que D est contenu dans $D_R = \{|z_j| \leq R,\ j=1,\dots,n\}$. Considérons l'application suivante:

$$(5.1) \qquad \begin{array}{rcl} F: D & \longrightarrow & \Delta = \{(z,w) \in \mathbb{C}^{n+d};\ |z_j| \leq R,\ 1 \leq j \leq n,\ |w_j| \leq 1,\ 1 \leq j \leq d\}. \\ \Psi & & \Psi \\ z & \longmapsto & (z, F_1(z), \dots, F_d(z)) \end{array}$$

F est évidemment injectif et son image est une sous variété lisse, donc un plongement. Distinguons par $\mathcal{O}_D$ resp. $\mathcal{O}_\Delta$ le faisceau de fonctions holomorphes sur D resp. Δ.



<u>Théorème 5.1.4</u> Il existe une résolution réciproque pour le faisceau $F_*\mathcal{O}_D$ du type suivant:

$$(5.2) \qquad 0 \longleftarrow F_*(\mathcal{O}_D) \xleftarrow{\rho} \mathcal{O}_\Delta^{l_0} \xleftarrow{\lambda_0} \dots \longleftarrow \mathcal{O}_\Delta^{l_d} \longleftarrow 0.$$

On peut même en choisir une telle que $l_0 = 1$ et ρ est la restriction naturelle sur $F(D)$.

<u>Démonstration</u> Supposons d'abord que $F_j(z)$ soient définis sur D_R. Alors $w_j - F_j(z) \mapsto w_j$, $1 \leq j \leq d$, est un changement de coordonnées global

sur le domaine $D_R \times C^d$ qui contient Δ. L'image de D par ces nouvelles coordonnées est égale à $\{w_j = 0,\ 1 \leq j \leq d\}$. $F_* \mathcal{O}_D$ s'identifie avec le faisceau de fonctions holomorphes sur D_R en variables z qui sera noté $\mathcal{O}_z$. Désignons donc par $\mathcal{O}_{z,w}$ le faisceau de fonctions holomorphes sur $D_R \times C^d$. Il suffit alors de fabriquer une résolution de la forme

$$(5.3) \qquad 0 \longleftarrow \mathcal{O}_z \xleftarrow{\partial_0} \mathcal{O}_{z,w} \xleftarrow{\partial_1} \mathcal{O}_{z,w}^{\binom{d}{1}} \xleftarrow{\partial_2} \cdots \xleftarrow{\partial_d} \mathcal{O}_{z,w}^{\binom{d}{d}} \longleftarrow 0,$$

(résolùtion de Koszul) dont les homomorphismes ∂_k seront précisés ci-dessous. On pose d'abord pour $f(z,w) \in \mathcal{O}_{z,w}(U)$ $\partial_0 f(z,w) = f(z,0) \in \mathcal{O}_z(U \cap D_R \times \{0\})$ (et $\partial_0 f(z,w) = 0$ si U n'intersecte pas $D_R \times \{0\}$). Par la suite pour simplifier l'écriture nous introduisons la notation d'algèbre extérieure. On désigne un élément de $\mathcal{O}_{z,w}^{\binom{d}{k}}(U)$ à la forme suivante:

$$f = \sum_{(j_1,\ldots,j_k)} f_{j_1,\ldots,j_k}(z,w) e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k},$$

où $e_1,\ldots,e_d$ sont une base formelle et les coefficients sont des fonctions holomorphes dans U dépendant alternativement des indices $j_1,\ldots,j_k$ qui parcourent les arrangements de k nombres parmi $\{1,\ldots,d\}$. ∂_k est alors défini par

$$\partial_k\Big(\sum_{(j_1,\cdots,j_k)} f_{j_1,\cdots,j_k}(z,w) e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}\Big) = \sum_{(j_2,\cdots,j_k)} \Big(\sum_{j_1=1}^{d} f_{j_1,\cdots,j_k}(z,w) w_{j_1}\Big) e_{j_2} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}.$$

Le coefficients du résultat étant encore alternatifs en $j_2,\ldots,j_k$, il est clair que pour $k \geq 2$,

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k\Big(\sum_{(j_1,\cdots,j_k)} f_{j_1,\cdots,j_k}(z,w) e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}\Big) = \sum_{(j_3,\cdots,j_k)} \Big(\sum_{j_1,j_2} f_{j_1,\cdots,j_k}(z,w) w_{j_1} w_{j_2}\Big) e_{j_3} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}$$
$$= 0$$

D'autre part $\partial_0 \circ \partial_1 = 0$ se vérifie directement. Montrons maintenant $\operatorname{Ker} \partial_{k-1} \subset \operatorname{Im} \partial_k$. Le cas $k = 1$ se vérifie aussitôt en vertu du développement de Taylor. Démontrons le cas $k \geq 2$ par la récurrence sur d. Le cas $d = 1$ est clair, car ∂_1 est alors injectif. Supposons que l'assertion est vraie jusqu'à $d-1$. Prenons $f \in \mathcal{O}_{z,w}$ tel que $\partial_k f = 0$, i.e. que

$$\sum_{j=1}^{d} f_{j,j_2,\cdots,j_k}(z,w) w_j = 0 \quad \text{pour tout } (j_2,\ldots,j_k).$$

Posons $w = (w', w_d)$ avec $w' = (w_1, \dots, w_{d-1})$. De là en posant $w_d = 0$ on obtient alors la relation

$$\sum_{j=1}^{d-1} f_{jj_2,\dots,j_k}(z,w',0)w_j = 0$$

ce qui implique $\partial_k' f' = 0$, où $f' = \sum f_{j_1,\dots,j_k}(z,w',0)e_{j_1}\wedge\dots\wedge e_{j_k}$ et ∂_k' est l'opérateur de bord pour $d-1$ variables. Donc par l'hypothèse de récurrence il existe $g' = \sum g'_{j_0,j_1,\dots,j_k}(z,w')e_{j_0}\wedge e_{j_1}\wedge\dots\wedge e_{j_k}$ tel que $\partial'_{k+1}g' = f'$, i.e.

$$\sum_{j=1}^{d-1} g'_{jj_1,\dots,j_k}(z,w')w_j = f_{j_1,\dots,j_k}(z,w',0).$$

Posons

$$g_{j_0,j_1,\dots,j_k}(z,w) = g'_{j_0,j_1,\dots,j_k}(z,w') \quad \text{pour } 1 \leq j_0 \leq d-1,$$
$$g_{dj_1,\dots,j_k}(z,w) = \frac{1}{w_d}\{f_{j_1,\dots,j_k}(z,w) - f_{j_1,\dots,j_k}(z,w',0)\}.$$

Alors $g = \sum g_{j_0,\dots,j_k}(z,w)e_{j_0}\wedge\dots\wedge e_{j_k}$ est évidemment une solution de $\partial_{k+1}g = f$.

Considérons maintenant le cas général. Prenons un recouvrement de D_R par des domaines ~~poly~~cylindriques fermés $K_1\times\dots\times K_n$ tels que, soit que $F_j(z)$ sont holomorphes sur $K_1\times\dots\times K_n$, soit que $K_1\times\dots\times K_n \cap D = \emptyset$. Si c'est le premier cas on prend la résolution construite ci-dessus. Si c'est le second, on prend la résolution banale: $0 \leftarrow 0 \leftarrow \dots \leftarrow 0$, car $F_*\mathcal{O}_D = 0$ là. Il reste donc à recoller ces résolutions par les lemmes suivants;

<u>Lemme 5.1.5</u> (Cartan) Soient $K' = K_1'\times K_2\times\dots\times K_n$ et $K'' = K_1''\times K_2\times\dots\times K_n$ deux domaines compacts cylindriques tels que $K_1'\cap K_1''$ et K_j soient contractiles. Soit $F(z)$ une matrice non-singulière à coefficients holomorphes définis sur $K'\cap K''$. Il existe alors des matrices non-singulières $F'(z)$, $F''(z)$ à coefficients holomorphes définis sur K' resp. K'' telles que $F(z) = F'(z)F''(z)$ sur $K'\cap K''$.

L'idée de la démonstration de ce lemme est claire: On décompose $\log F(z)$ comme dans le Lemme 5.1.1. Puisque l'application $F(z)\mapsto \log F(z)$ n'est pas globalement définie et qu'elle n'est un homomorphisme entre le groupe multiplicatif $GL(\ell,\mathcal{O}(K'\cap K''))$ et le groupe additif $\mathfrak{gl}(\ell,\mathcal{O}(K'\cap K''))$ qu'au sens infinitésimal, il faut faire une construction approximative dont le détail est assez long. Nous l'omettons donc.

<u>Lemme 5.1.6</u> Soit

$$(5.4)\qquad \begin{tikzcd} 0 & \mathcal{F} \arrow[l] \arrow[d, "\varphi\,\wr"'] & \mathcal{O}^{\ell_0} \arrow[l] \arrow[d, "h_0"] & \mathcal{O}^{\ell_1} \arrow[l, "\lambda_0"'] \arrow[d, "h_1"] & \dots \arrow[l, "\lambda_1"'] & \mathcal{O}^{\ell_d} \arrow[l] \arrow[d, "h_d"] & 0 \arrow[l] \\ 0 & \mathcal{G} \arrow[l] & \mathcal{O}^{m_0} \arrow[l] & \mathcal{O}^{m_1} \arrow[l, "\mu_0"'] & \dots \arrow[l, "\mu_1"'] & \mathcal{O}^{m_d} \arrow[l] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

un morphisme de complexes entre les résolutions réciproques des faisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur un domaine compact cylindrique $\overbrace{K_1 \times \dots \times K_n}^{K=}$. Supposons que φ est un isomorphisme de faisceaux et que λ_j, μ_j, h_j sont des homomorphismes définis par une matrice à coefficients holomorphes sur $K_1 \times \dots \times K_n$. Alors en exerçant un nombre fini de modifications par la somme directe avec $\dots \to 0 \leftarrow \mathcal{O}^p \xleftarrow{id} \mathcal{O}^p \leftarrow 0 \leftarrow \dots$, on peut obtenir de nouvelles résolutions

$$(5.5)\qquad \begin{tikzcd} 0 & \mathcal{F} \arrow[l] \arrow[d, "\varphi\,\wr"'] & \mathcal{O}^{p_0} \arrow[l] \arrow[d, dashed, "\varphi_0"] & \mathcal{O}^{p_1} \arrow[l, "\Lambda_0"'] \arrow[d, dashed, "\varphi_1"] & \dots \arrow[l, "\Lambda_1"'] & \mathcal{O}^{p_d} \arrow[l] \arrow[d, dashed, "\varphi_d"] & 0 \arrow[l] \\ 0 & \mathcal{G} \arrow[l] & \mathcal{O}^{p_0} \arrow[l] & \mathcal{O}^{p_1} \arrow[l, "M_0"'] & \dots \arrow[l, "M_1"'] & \mathcal{O}^{p_d} \arrow[l] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

qui admettent entre eux un morphisme de complexes $\{\varphi_j\}$ formé de matrices holomorphes non singulières sur K.

<u>Démonstration</u> sera faite par la récurrence sur la longueur d. Le cas $d = 0$ est banal: Dans ce cas h_0 sera lui-même un isomorphisme, Donc on aura nécessairement $\ell_0 = m_0 = p_0$ et $\varphi_0 = h_0$. Supposons que l'assertion est vraie pour $d-1$. Regardons la première partie du diagramme (5.4). On construira un nouveau diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 & \mathcal{F} \arrow[l] \arrow[d, "\varphi\,\wr"'] & \mathcal{O}^{\ell_0} \oplus \mathcal{O}^{m_0} \arrow[l] \arrow[d, "H_0"] & \mathcal{O}^{\ell_1} \oplus \mathcal{O}^{m_0} \arrow[l, "{(\lambda_0, id)}"'] \arrow[d, "H_1"] & \mathcal{O}^{\ell_2} \arrow[l, "{(\lambda_1, 0)}"'] \arrow[d, "h_2"] & \dots \arrow[l] \\ 0 & \mathcal{G} \arrow[l] & \mathcal{O}^{m_0} \oplus \mathcal{O}^{\ell_0} \arrow[l] & \mathcal{O}^{m_1} \oplus \mathcal{O}^{\ell_0} \arrow[l, "{(\mu_0, id)}"'] & \mathcal{O}^{m_2} \arrow[l, "{(\mu_1, 0)}"'] & \dots \arrow[l] \end{tikzcd}$$

tel que H_0 soit un isomorphisme (défini par un élément de $GL(\ell_0 + m_0, \mathcal{O}(K))$). S'il en est ainsi, on aura $Im(\lambda_0, id) \simeq Im(\mu_0, id)$ d'après le lemme des cinq, donc on pourra appliquer l'hypothèse de la récurrence au diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 & Im(\lambda_0, id) \arrow[l] \arrow[d, "\wr"'] & \mathcal{O}^{\ell_1} \oplus \mathcal{O}^{m_0} \arrow[l] \arrow[d, "H_1"] & \mathcal{O}^{\ell_2} \arrow[l] \arrow[d, "h_2"] & \dots \arrow[l] & \mathcal{O}^{\ell_d} \arrow[l] \arrow[d, "h_d"] & 0 \arrow[l] \\ 0 & Im(\mu_0, id) \arrow[l] & \mathcal{O}^{m_1} \oplus \mathcal{O}^{\ell_0} \arrow[l] & \mathcal{O}^{m_2} \arrow[l] & \dots \arrow[l] & \mathcal{O}^{m_d} \arrow[l] & 0, \arrow[l] \end{tikzcd}$$

d'où la conclusion.

Considérons donc le diagramme pour les espaces des sections globales:

$$(5.6)\qquad \begin{array}{ccccccc} 0 \leftarrow & \mathcal{F}(K) & \leftarrow & \mathcal{O}(K)^{\ell_0} & \xleftarrow{\lambda_0} & \mathcal{O}(K)^{\ell_1} & \leftarrow \cdots \\ & \varphi \wr\downarrow & & h_0\downarrow & & h_1\downarrow & \\ 0 \leftarrow & \mathcal{G}(K) & \leftarrow & \mathcal{O}(K)^{m_0} & \xleftarrow{\mu_0} & \mathcal{O}(K)^{m_1} & \leftarrow \cdots, \end{array}$$

ce qui est aussi exact d'après le Corollaire 5.1.3 (et la remarque après cela). Puisque h_0 induit un $\mathcal{O}(K)$-isomorphisme entre $\mathcal{O}(K)^{\ell_0}/\mathrm{Im}\,\lambda_0$ et $\mathcal{O}(K)^{m_0}/\mathrm{Im}\,\mu_0$, il existe des éléments $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m \in \mathcal{O}(K)^{m_1}$ tels que $\mathrm{Im}\,h_0$ et $\mu_0(\varepsilon_1),\ldots,\mu_0(\varepsilon_{m_0})$ engendrent $\mathcal{O}(K)^{m_0}$ sur $\mathcal{O}(K)$. (En effet soient $e_j = (0,..,0,1,0,..,0)$ les éléments de la base de $\mathcal{O}(K)^{m_0}$. Il suffit de prendre ε_j tel que $e_j \in \mu_0(\varepsilon_j)+\mathrm{Im}\,h_0$.) Soit $g\colon \mathcal{O}(K)^{m_0} \to \mathcal{O}(K)^{m_1}$ l'homomorphisme défini par $e_j \mapsto \varepsilon_j$. Puisque la matrice $(h_0+\mu_0\circ g\colon \mathcal{O}(K)^{\ell_0}\oplus\mathcal{O}(K)^{m_0} \to \mathcal{O}(K)^{m_0}$ est surjective, il existe des matrices $\sigma\colon \mathcal{O}(K)^{m_0} \to \mathcal{O}(K)^{\ell_0}$ et $\tau\colon \mathcal{O}(K)^{\ell_0} \to \mathcal{O}(K)^{\ell_0}$ telles que

$$\begin{pmatrix} h_0 & \mu_0\circ g \\ \tau & \sigma \end{pmatrix} : \begin{array}{c}\mathcal{O}(K)^{\ell_0}\\ \oplus \\ \mathcal{O}(K)^{m_0}\end{array} \to \begin{array}{c}\mathcal{O}(K)^{m_0}\\ \oplus \\ \mathcal{O}(K)^{\ell_0}\end{array}$$

soit surjectif donc inversible.[注] Ainsi on obtient le diagramme voulu:

$$\begin{array}{ccccc} 0 \leftarrow \mathcal{F}(K) & \leftarrow & \mathcal{O}(K)^{\ell_0}\oplus\mathcal{O}(K)^{m_0} & \xleftarrow{(\lambda_0,\mathrm{id})} & \mathcal{O}(K)^{\ell_1}\oplus\mathcal{O}(K)^{m_0} \\ \varphi\wr\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle(h_0\oplus\mu_0 g,\,\tau\oplus\sigma)} & & \downarrow{\scriptstyle(h_1\oplus g,\,\tau\circ\lambda_0\oplus\sigma)} \\ 0 \leftarrow \mathcal{G}(K) & \leftarrow & \mathcal{O}(K)^{m_0}\oplus\mathcal{O}(K)^{\ell_0} & \xleftarrow{(\mu_0,\mathrm{id})} & \mathcal{O}(K)^{m_1}\oplus\mathcal{O}(K)^{\ell_0} \end{array}$$

Le passage au diagramme de faisceaux est évident. C.Q.F.D.

Remarquons que dans le lemme ci-dessus la donnée de $\{h_j\}$ est superflue. En effet dans le diagramme (5.6) on peut construire les matrices h_j une à une à partir de $j = 0$ en regardant l'image de la base de $\mathcal{O}(K)^{\ell_j}$. Bien entendu le choix n'est pas unique.

Terminons la démonstration du Théorème 5.1.4. On modifie deux résolutions locales définies respectivement sur K', K" suivant le Lemme 5.1.6 de sorte qu'elles se relient par des isomorphismes par matrices holomorphes non singulières φ_j sur $K'\cap K''$ (voir (5.5)). Puis on factorise les matrices suivant le Lemme 5.1.5: $\varphi_j = \varphi_j''\cdot\varphi_j'$, où φ_j' resp. φ_j'' sont une matrice holomorphe non singulière sur K' resp. K". Dans le diagramme (5.5) on remplace Λ_j resp. M_j par $\varphi_j'\Lambda_j\varphi_{j+1}'^{-1}$ resp. $\varphi_j''M_j\varphi_{j+1}''^{-1}$ et φ_j par id. Ainsi on obtient de nouvelles résolutions sur K' resp. K" qui se recollent bien sur $K'\cap K''$.

注) Plus précisément, on peut utiliser la forme explicite de la matrice $\mu_0\circ g$ pour fabriquer par ex. $\begin{pmatrix} h_0 & \mu_0\circ g \\ E & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & E \\ E & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & * \\ 0 & E \end{pmatrix}$.

Notons finalement qu'on peut faire cet argument pour le faisceau $\mathcal{J} = \mathrm{Ker}\{\rho : \mathcal{O}_\Delta \to F_* \mathcal{O}_D\}$ au lieu de $F_* \mathcal{O}_D$. Puisqu'on peut lier la résolution pour $\mathcal{J}$ ainsi obtenue avec la suite $0 \leftarrow F_* \mathcal{O}_D \leftarrow \mathcal{O}_\Delta \leftarrow \mathcal{J} \leftarrow 0$ globalement définie, on peut toujours supposer dans (5.2) que $\ell_0 = 1$ et ρ est la restriction naturelle.

En choisissant un recouvrement du type produit de Δ, on peut répéter ce procéder avec un ordre bien choisi pour obtenir finalement une résolution définie globalement sur Δ. C.Q.F.D.

Le théorème suivant est une généralisation du théorème d'approximation de Runge:

Théorème 5.1.7 (Weil-Oka) Soit $K \subset U$ un compact tel que $\hat{K} = K$ dans U. Alors toute fonction $G(z)$ holomorphe au voisinage de K peut être approchée par une suite d'éléments de $\mathcal{O}(U)$ uniformément sur K.

Démonstration Par la définition de l'enveloppe holomorphe (2.8), on voit que K peut être approché de l'extérieur par des polyèdres analytiques. Sans perdre la généralité on peut donc supposer que $K = D$ est un polyèdre analytique fermé. Reprenons le plongement (5.1). D'après le Théorème 5.1.4 et le Corollaire 5.1.3 $0 \leftarrow F_* \mathcal{O}_D(\Delta) \xleftarrow{\rho} \mathcal{O}(\Delta)$ est exact, i.e. il existe une fonction holomorphe $H(z,w) \in \mathcal{O}(\Delta)$ telle que $H(z,w)|_{F(D)} = G(z)$. Grâce au développement de Taylor, $H(z,w)$ peut être approché uniformément sur Δ par une suite de polynômes en z, w. Donc $G(z)$ peut être approché par une suite de polynômes en $z, F_1(z), \ldots, F_d(z)$. C.Q.F.D.

Maintenant nous pouvons démontrer le théorème principal de ce paragraphe:

Théorème 5.1.8 (Oka-Cartan) Soit $U \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert de Stein. On a alors

(5.7) $\qquad H^p(U, \mathcal{O}) = 0 \quad$ pour $p \geq 1$.

Démonstration Sans perdre la généralité on peut supposer que U est connexe. Considérons d'abord un polyèdre analytique fermé D dans U. Par le plongement (5.1) on obtient un faisceau $F_* \mathcal{O}_D$ sur Δ dont les groupes de cohomologie s'annulent en vertu du Corollaire 5.1.4 et du Théorème 5.1.4. D'autre part l'application F est pure de dimension 0 en vertu du Corollaire 4.6.7. Donc d'après le Théorème 4.6.3 on obtient

$$H^p(D, \mathcal{O}_D) = H^p(\Delta, F_* \mathcal{O}_D) = 0 \quad \text{pour } p \geq 1.$$

Soit donc $\mathfrak{U} = \{\bar{U}_\lambda\}$ un recouvrement localement fini de U par des polydisques fermés. Nous démontrerons $H^p(\mathcal{U},\mathcal{O}) = 0$ pour $p \geq 1$ ci-dessous. Puisque les recouvrements comme cela constituent un système cofinal, on en tirera la conclusion (5.7). Soit $\varphi \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{O})$ tel que $\delta\varphi = 0$. Prenons une suite croissante de polyèdres analytiques D_k de U approchant celui-ci de l'intérieur. Sans perdre la généralité on peut supposer que $\overline{U}_\lambda \cap \partial D_k \neq \emptyset$ implique $\overline{U}_\lambda \cap \partial D_{k\pm 1} = \emptyset$. Pour k fixé, $\mathcal{U}|D_k$ est un recouvrement de D_k par des polyèdres analytiques fermés. Il est évident que le théorème de Leray est vrai pour un tel recouvrement. Donc en vertu de la première partie on obtient

$$H^p(\mathcal{U}|D_k,\mathcal{O}) = H^p(D_k,\mathcal{O}) = 0 \quad \text{pour } p \geq 1.$$

Il existe donc $\psi_k \in C^{p-1}(\mathcal{U}|D_k,\mathcal{O})$ tel que $\delta\psi_k = \varphi|_{D_k}$. Soit $\tilde{\psi}_k$ un élément de $C^{p-1}(\mathcal{U},\mathcal{O})$ dont les coefficients pour $\overline{U}_{\lambda_0},\ldots,\overline{U}_{\lambda_p} \subset D_k$ sont égaux à ceux de ψ_k correspondants et pour les autres $\overline{U}_{\lambda_0},\ldots,\overline{U}_{\lambda_p}$ sont égaux à zéro. On a $\delta\tilde{\psi}_k|_{D_{k-1}} = \varphi|_{D_{k-1}}$ de sorte que

$$(5.8) \qquad \delta(\tilde{\psi}_{k+1}-\tilde{\psi}_k)|_{D_{k-1}} = 0.$$

Supposons d'abord que $p = 1$. (5.8) alors signifie que $\tilde{\psi}_{k+1}-\tilde{\psi}_k$ définit une fonction holomorphe sur D_{k-1}. Donc d'après le Théorème 5.1.7 il existe $\tilde{\chi}_k(z) \in \mathcal{O}(U)$ tel que

$$|\tilde{\psi}_{k+1}-\tilde{\psi}_k-\tilde{\chi}_k| \leq \frac{1}{2^k} \quad \text{sur } D_{k-1}.$$

Posons

$$(5.9) \qquad \psi = \tilde{\psi}_1 + \sum_{k=1}^{\infty}(\tilde{\psi}_{k+1}-\tilde{\psi}_k-\delta\tilde{\chi}_k).$$

La somme converge uniformément pour chaque $\overline{U}_\lambda$ et définit donc un élément de $C^0(\mathcal{U},\mathcal{O})$. La modification usuelle montre que

$$\delta\psi|_{D_{N-1}} = \delta(\tilde{\psi}_N + \sum_{k=N}^{\infty}(\tilde{\psi}_{k+1}-\tilde{\psi}_k-\delta\chi_k))|_{D_{N-1}} = \varphi|_{D_{N-1}}$$

pour chaque N. Donc ψ est une solution cherchée.

Soit maintenant $p > 1$. D'après (5.8) on obtient $\chi_k \in C^{p-2}(\mathcal{U}|D_{k-1},\mathcal{O})$ tel que $\delta\chi_k = (\tilde{\psi}_{k+1}-\tilde{\psi}_k)|_{D_{k-1}}$, d'où, en modifiant par zéro, un élément $\tilde{\chi}_k \in C^{p-2}(\mathcal{U},\mathcal{O})$. tel que

$$\delta\tilde{\chi}_k|_{D_{k-2}} = (\tilde{\psi}_{k+1}-\tilde{\psi}_k)|_{D_{k-2}}.$$

Posons encore (5.9). Cette fois-ci, la somme devient finie sur chaque D_N. Il est clair que ψ est une solution de $\delta\psi = \varphi$. C.Q.F.D.

2. Solution du problème de Levi 注)

Démontrons d'abord la réciproque du Théorème d'Oka-Cartan.

Théorème 5.2.1 Soit $U \subset C^n$ un ouvert. Supposons que $H^p(U,\mathcal{O})$ sont de dimension finie pour $1 \leq p \leq n-1$. Alors U est un ouvert de Stein.

Démonstration Avançons par la récurrence sur n. C'est vrai pour $n = 1$ sans aucune hypothèse. Supposons que ceci est vrai jusqu'à $n-1$. Soit $a \in \partial U$. On va chercer un élément $F(z) \in \mathcal{O}(U)$ qui ne se prolonge pas au voisinage de a. Soit H un hyperplan tel que $U' = U \cap H$ soit un ouvert non vide de C^{n-1} ayant donc le point a sur sa frontière. Sans perdre la généralité on peut supposer que $H = \{z_n=0\}$. Soit $\mathcal{O}'$ le faisceau de fonctions holomorphes sur $U' \subset C^{n-1}$ et soit $\iota: U' \to U$ l'inclusion canonique. On a alors la suite exacte:

$$0 \leftarrow \iota_*\mathcal{O}' \xleftarrow{\rho} \mathcal{O} \xleftarrow{z_n\cdot} \mathcal{O} \leftarrow 0,$$

où ρ désigne la réstriction sur $z_n = 0$. Donc en vertu de la suite exacte

$$(5.10) \qquad \cdots \longrightarrow H^p(U,\mathcal{O}) \longrightarrow H^p(U,\mathcal{O}) \longrightarrow H^p(U,\iota_*\mathcal{O}') \longrightarrow H^{p+1}(U,\mathcal{O}) \longrightarrow \cdots,$$

on conclut que $H^p(U,\iota_*\mathcal{O}')$ sont de dimension finie pour $1 \leq p \leq n-2$. Notons que $H^p(U,\iota_*\mathcal{O}') = H^p(U',\mathcal{O}')$. Donc par l'hypothèse de la récurrence U' est un ouvert de Stein de C^{n-1} et il existe une fonction $G(z') \in \mathcal{O}'(U')$ qui ne se prolonge nulle part au dela de $\partial U'$. Reprenons maintenant le début de la suite exacte (5.10):

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{O}(U) \xrightarrow{\rho} \mathcal{O}'(U') \longrightarrow H^1(U,\mathcal{O}) \longrightarrow \cdots.$$

Par hypothèse $H^1(U,\mathcal{O})$, donc Coker ρ sont de dimension finie. Puisque $z_1^k G(z')$, $k = 0,1,\ldots$ sont linéairement indépendants dans $\mathcal{O}'(U')$, il existe donc une combinaison linéaire $g(z_1)G(z')$ parmi eux qui est dans l'image de ρ. Il est clair que cette fonction $g(z_1)G(z')$ ne se prolonge toujours pas au dela de $\partial U'$. Donc la fonction $F(z) \in \mathcal{O}(U)$ telle que $\rho(F(z)) = g(z_1)G(z')$

注) Ce paragraphe n'est pas nécessaire pour la suite, car on donnera ultérieurement une démonstration du théorème de Grauert n'utilisant pas la notion de pseudoconvexité. Néanmoins il vaut étudier.

est une fonction cherchée. C.Q.F.D.

Remarque On démontrera ultérieurement qu'en effet on a $H^p(U,\mathcal{O}) = 0$ pour $p \geq n$ pour n'importe quel ouvert $U \subset C^n$.

Ajoutons une propriété sur la stabilité des ouverts de Stein.

Proposition 5.2.2 Soit U_k une suite croissante d'ouverts de Stein. Alors $\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ est aussi un ouvert de Stein.

Démonstration Sans perdre la généralité on peut supposer que U_k, donc U sont connexes. Soit $K_k \subset U_k$ un compact qui est holomorphiquement convexe dans U_{k+1}, i.e. $\hat{K}_{kU_{k+1}} = K_k$. On peut le choisir pour chaque k de façon que $K_k \subset \mathrm{Int}(K_{k+1})$ et $\bigcup_k K_k = U$. Prenons un point $a \in \partial U$. et choisissons une suite $a^k \in K_k \setminus K_{k+1}$ telle que $a^k \to a$. On va construire par récurrence $f_k \in \mathcal{O}(U_k)$ ayant les propriétés suivantes:

$$|f_k(a_k)| \geq 2^k, \qquad |f_{k+1}(z)-f_k(z)| \leq \frac{1}{2^k} \quad \text{pour} \quad z \in K_k.$$

Choisissons $f_1(z)$ ainsi. Supposons qu'on a déjà choisi $f_1,\dots,f_k$. D'après le Théorème 5.1.7 il existe $g_{k+1} \in \mathcal{O}(U_{k+1})$ tel que

$$|g_{k+1}(z)-f_k(z)| \leq \frac{1}{2^{k+1}} \quad \text{pour} \quad z \in K_k.$$

Soit d'autre part $h_{k+1}(z) \in \mathcal{O}(U_{k+1})$ tel que

$$|h_{k+1}(a^{k+1})| > \sup\{|h_{k+1}(z)|;\ z \in K_k\}.$$

En ajustant par un facteur et en prenant une puissance appropriée,on peut supposer que

$$|h_{k+1}(a^{k+1})| \geq 2^k + |g_{k+1}(a^{k+1})|,$$

$$|h_{k+1}(z)| \geq \frac{1}{2^{k+1}} \quad \text{pour} \quad z \in K_k.$$

Alors $f_{k+1}(z) = g_{k+1}(z) + h_{k+1}(z)$ sera un élément voulu.

Posons maintenant

$$f(z) = f_1(z) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{k+1}(z)-f_k(z)).$$

La déformation habituelle montre que $f(z)$ est holomorphe dans U et que $|f(a^k)| \geq 2^k-1$. Donc $f(z)$ ne se prolonge pas au voisinage de a. C.Q.F.D.

Démontrons maintenant le

De plus on peut supposer en même temps que toute boule de rayon $\leq r$ intersecte U en un ouvert de Stein.

Théorème 5.2.3. Un ouvert pseudoconvexe est un ouvert de Stein.

Démonstration Sans perdre la généralité on peut supposer que l'ouvert U est connexe. De plus, en vertu de la Proposition 5.2.2 on peut supposer que U est fortement pseudoconvexe. Soit donc $\varphi(z)$ une fonction s-psh telle que $U = \{\varphi(z) < 0\}$. Nous allons montrer la finitude de $\dim_C H^p(U, \mathcal{O})$ pour $p \geq 1$.

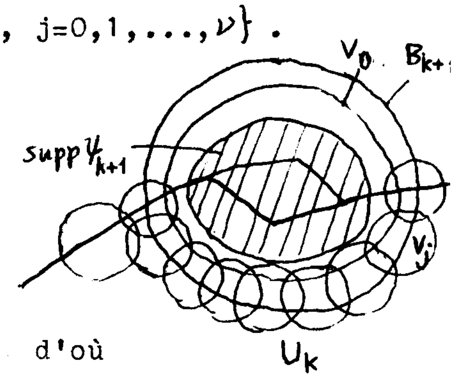
D'après le Théorème 2.4.5 il existe un nombre fini de boules $B_1, \ldots, B_N$ de rayon r telles qu'elles recouvrent ∂U et que $B_k \cap U$ soit un ouvert de Stein pour tout k. Construisons d'abord des ouverts fortement pseudoconvexes $U_0 = U$, $U_1, \ldots, U_N = V$ tels que

(5.11) $\quad U_k \subset U_{k+1} \subset U_k \cup B_{k+1}, \quad$ pour $k = 0, \ldots, N-1$,

et que $V \supset\supset U$. Choisissons $\psi_k(z) \in C_0^\infty(B_k)$ à valeurs non négatives tels que $\sum_{j=1}^{N} \psi_j(z) > 0$ au voisinage de ∂U. Si les dérivées secondes de $\psi_j(z)$ sont suffisamment petites vis-à-vis de la constante M dans la démonstration du Théorème 2.4.5, alors $\varphi_k(z) = \varphi(z) - \sum_{j=1}^{k} \psi_j(z)$, $k=1,\ldots,N$ sont aussi s-psh au voisinage $\cup B_j$ de ∂U. Posons $U_k = \{\varphi_k(z) < 0\}$. Alors (5.11) est évidemment satisfait. De plus, par la même raison on peut supposer que toute boule de rayon $\leq r$ intersecte aussi chaque U_k en un ouvert de Stein.

Montrons que la restriction $H^p(U_{k+1}, \mathcal{O}) \to H^p(U_k, \mathcal{O})$ est surjective pour $p \geq 1$ $(k=0,\ldots,N-1)$. Fixons k et soit V_0 une boule telle que $\operatorname{supp}\psi_{k+1} \subset V_0 \subset \overline{V}_0 \subset B_{k+1}$. Choisissons les boules V_j, $j=1,\ldots,\nu$ de rayon $\leq r$ de façon que $V_j \cap \operatorname{supp} \psi_{k+1} = \emptyset$ et que $\{V_j\}_{j=1}^{\nu}$ recouvre $\overline{U}_k \setminus V_0$. Posons

$$\mathfrak{U}_k = \{V_j \cap U_k,\ j=0,1,\ldots,\nu\}, \quad \mathfrak{U}_{k+1} = \{V_j \cap U_{k+1},\ j=0,1,\ldots,\nu\}.$$



Ils sont un recouvrement de Stein de U_k resp. U_{k+1}.

En vertu du théorème de Leray on a donc

$$H^p(\mathfrak{U}_k, \mathcal{O}) = H^p(U_k, \mathcal{O}),$$
$$H^p(\mathfrak{U}_{k+1}, \mathcal{O}) = H^p(U_{k+1}, \mathcal{O}).$$

Or on a $V_j \cap U_k = V_j \cap U_{k+1}$ pour $j \geq 1$ par hypothèse, d'où

$$C^p(\mathfrak{U}_k, \mathcal{O}) = C^p(\mathfrak{U}_{k+1}, \mathcal{O}) \quad \text{pour } p \geq 1,$$

car le domaine de définition des coefficients de cochaînes est commun. Ainsi $H^p(\mathcal{U}_{k+1},\mathcal{O}) \to H^p(\mathcal{U}_k,\mathcal{O})$ est surjectif (et même bijectif pour $p \geq 2$). En combinant pour tout k, on conclut que la restriction $H^p(V,\mathcal{O}) \to H^p(U,\mathcal{O})$ est surjective pour $p \geq 1$.

Soient maintenant $\mathfrak{X} = \{X_j\}$ resp. $\mathcal{Y} = \{Y_j\}$ un recouvrement de Stein fini de U resp. V tels que $X_j \Subset Y_j$ pour chaque j. Puisque $V \Supset U$, on peut en fabriquer utilisant des boules de rayon $\leq r$ comme ci-dessus. On a alors $H^p(U,\mathcal{O}) = H^p(\mathfrak{X},\mathcal{O})$, $H^p(V,\mathcal{O}) = H^p(\mathcal{Y},\mathcal{O})$. L'application de la restriction $H^p(V,\mathcal{O}) \to H^p(U,\mathcal{O})$ est représentée par celle $H^p(\mathcal{Y},\mathcal{O}) \to H^p(\mathfrak{X},O)$ induite par la restriction $\mathcal{O}(Y_j) \to \mathcal{O}(X_j)$. Munissons chaque $\mathcal{O}(Y_j)$ resp. $\mathcal{O}(X_j)$ de la topologie de convergence localement uniforme. Alors $C^p(\mathcal{Y},\mathcal{O})$ resp. $C^p(\mathfrak{X},\mathcal{O})$ sont des espaces de Fréchet. En plus, d'après le théorème de Montel la restriction $\mathcal{O}(Y_j) \to \mathcal{O}(X_j)$, donc $C^p(\mathcal{Y},\mathcal{O}) \to C^p(\mathfrak{X},\mathcal{O})$ est une application compacte, i.e. elle envoie un voisinage de zéro du premier espace à un sous ensemble relativement compact dans le second. Donc la finitude de $\dim_C H^p(\mathfrak{X},\mathcal{O})$ s'ensuit du lemme suivant:

<u>Lemme 5.2.4</u> (Schwartz) Soit

$$\begin{array}{ccccc} E' & \xrightarrow{\lambda'} & E & \xrightarrow{\lambda} & E'' \\ {\scriptstyle k'}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h''} \\ F' & \xrightarrow{\mu'} & F & \xrightarrow{\mu} & F'' \end{array}$$

un diagramme commutatif d'espaces de Fréchet localement convexes (i.e. la topologie est définie par une suite de semi-normes). Supposons que

a) $\operatorname{Ker}\lambda/\operatorname{Im}\lambda' \to \operatorname{Ker}\mu/\operatorname{Im}\mu'$ est surjectif.

b) h est une application compacte.

Alors $\operatorname{Ker}\mu/\operatorname{Im}\mu'$ est de dimension finie.

<u>Démonstration</u> La restriction de h: $\operatorname{Ker}\lambda \to \operatorname{Ker}\mu$ étant évidemment encore compacte, on peut supposer que $E = \operatorname{Ker}\lambda$, $F = \operatorname{Ker}\mu$. L'application $h \oplus \mu'$: $E \oplus F' \to F$ est alors surjective par hypothèse. Donc d'après le théorème en graphe fermé $\overline{h \oplus \mu'}$: $E \oplus F'/\operatorname{Ker} h\oplus\mu' \to F$ est un isomorphisme topologique.

L'application $\overline{h\oplus 0}$: $E \oplus F'/\mathrm{Ker}\ h+\mu' \to F$ étant compacte, on obtient ainsi une application compacte $f = \overline{h\oplus 0}\circ\overline{h+\mu'}^{-1} : F \to F$ telle que Coker $(1-f) = F/\mathrm{Im}\ \mu'$. Mais la finitude de $\dim_{\mathbb{C}}$ Coker $(1-f)$ est bien connue. (En effet, il existe une semi-norme $\|\cdot\|$ de F telle que l'image de sa boule unitée par f soit relativement compacte. La démonstration alors se fera parallèlement au cas d'espaces de Banach.) C.Q.F.D.

Remarque 1 La démonstration ci-dessus montre en même temps que la propriété de Stein est une propriété locale au vöisinage de la frontière.

Remarque 2 On peut démontrer par le même raisonnement que les groupes de cohomologie d'une variété analytique complexe compacte à valeurs dans le faisceau structural $\mathcal{O}$ sont de dimension finie.

3. Pureté de codimension de R^n dans C^n par rapport à $\mathcal{O}$.

Dans le chapitre IV, §7, nous avons montré que R^n est pur de codimension n dans C^n par rapport au faisceau constant C. Notre but est de démontrer le même résultat pour le faisceau $\mathcal{O}$. Compte tenu d'applications, nous considérons une situation un peu plus générale.

Proposition 5.3.1 Soit $U \subset C^n$ un ouvert et soit S sa partie fermée. Supposons que quel que soit un ouvert V d'un espace euclidien complexe, on a

(5.12) $\qquad H^k_{V\times S}(V\times U, \mathcal{O}_{V\times U}) = 0 \quad$ pour $k < r$.

Alors quels que soient un ouvert V et un compact $K \subset C$, on a

$$H^k_{V\times K\times S}(V\times C\times U, \mathcal{O}_{V\times C\times U}) = 0 \quad \text{pour } k < r+1.$$

(Ici on désigne par $\mathcal{O}_{V\times U}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur $V\times U$ etc.)

Démonstration Notons que pour V fixé le couple $(V\times U, V\times S)$ considéré au lieu de (U,S) satisfait aussi à la condition (5.12). Donc il suffit de démontrer $H^k_{K\times S}(C\times U, \mathcal{O}_{C\times U}) = 0$ pour $k < r+1$ sous la condition (5.12).

Considérons la suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H^{k-1}_{C\times S}(C\times U,\mathcal{O}) \longrightarrow H^{k-1}_{(C\setminus K)\times S}((C\setminus K)\times U,\mathcal{O})$$
$$\longrightarrow H^{k}_{K\times S}(C\times U,\mathcal{O}) \longrightarrow H^{k}_{C\times S}(C\times U,\mathcal{O}) \longrightarrow \cdots,$$

où on a abrégé $\mathcal{O}_{C\times S}$ par $\mathcal{O}$. Donc pour $k < r$ on a aussitôt $H^k_{K\times S}(C\times U,\mathcal{O}) = 0$. (Notons que le "paramètre" V est utilisé pour avancer la récurrence.) Le cas $k = r$ est plus délicat. Soit $P^1 = C \cup \{\infty\}$ la sphère de Riemann. Considérons sur $P^1 \times U$ le faisceau $\mathcal{J}$ des germes de fonctions holomorphes $F(\tau,z)$ satisfaisant à $F(\infty,z) = 0$. On a $\mathcal{J}|_{C\times U} = \mathcal{O}_{C\times U}$. Notons aussi que $\mathcal{J}|_{(P^1\setminus K)\times U}$ est isomorphe à $\mathcal{O}|_{(P^1\setminus K)\times U}$ par le morphisme $F(\tau,z) \mapsto \tau F(\tau,z)$. (A l'aide de l'inversion $\tau \mapsto 1/\tau$, on peut considérer $P^1 \setminus K$ comme un ouvert de C.) On a donc d'après le théorème d'excision

$$H^{r-1}_{(P^1\setminus K)\times S}(P^1\times U,\mathcal{J}) = H^{r-1}_{(P^1\setminus K)\times S}((P^1\setminus K)\times U,\mathcal{O}_{(P^1\setminus K)\times U}) = 0,$$

$$H^{r}_{K\times S}(C\times U,\mathcal{O}_{C\times U}) = H^{r}_{K\times S}(C\times U,\mathcal{J}|_{C\times U}) = H^{r}_{K\times S}(P^1\times U,\mathcal{J}).$$

Donc en tenant compte de la suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H^{r-1}_{(P^1\setminus K)\times S}(P^1\times U,\mathcal{J}) \longrightarrow H^{r}_{K\times S}(P^1\times U,\mathcal{J}) \longrightarrow H^{r}_{P^1\times S}(P^1\times U,\mathcal{J}) \longrightarrow \cdots,$$

il suffit maintenant de démontrer $H^r_{P^1\times S}(P^1\times U,\mathcal{J}) = 0$. Soit $\pi : P^1\times U \longrightarrow U$ la projection. On montrera dans le lemme ci-dessous que $R^k\pi_*\mathcal{J} = 0$ pour tout k. En appliquant donc le Théorème 4.6.3, on obtiendra

$$H^r_{P^1\times S}(P^1\times U,\mathcal{J}) = H^r_S(U,\pi_*\mathcal{J}) = 0. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

<u>Lemme 5.3.2</u> $R^k\pi_*\mathcal{J} = 0$ pour tout k.

<u>Démonstration</u> Il suffit de démontrer

$$(R^k\pi_*\mathcal{J})_z = \varinjlim_{V\ni z} H^k(P^1\times V,\mathcal{J}) = 0 \quad \text{pour tout } z \in U.$$

Donc on peut supposer que U lui-même est un voisinage de Stein de z. Posons

$$U_0 = (P^1\setminus\{\infty\})\times U, \quad U_1 = (P^1\setminus\{0\})\times U.$$

$\mathfrak{U} = \{U_0,U_1\}$ est alors un recouvrement par les ouverts de Stein. (On l'appelle simplement un"recouvrement de Stein".) Donc d'après le théorème d'Oka-Cartan (Théorème 5.1.8) et le théorème de Leray (Théorème 4.5.6) (et le fait que $\mathcal{J}|_{(P^1\setminus\{0\})\times U} \cong \mathcal{O}|_{(P^1\setminus\{0\})\times U}$), on peut calculer $H^k(P^1\times U,\mathcal{J})$ par ce recouvrement. Or on a

$$C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{J}) = \Gamma(U_0,\mathcal{J})U_0 + \Gamma(U_1,\mathcal{J})U_1,$$

$$C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{J}) = \Gamma(U_0 \cap U_1,\mathcal{J})U_0 \wedge U_1, \quad C^k(\mathfrak{U}, \mathcal{J}) = 0 \text{ pour } k \geq 2.$$

D'où aussitôt $H^k(P^1 \times U, \mathcal{J}) = 0$ pour $k \geq 2$. Montrons ensuite $H^0(P^1 \times U,\mathcal{J}) = \Gamma(P^1 \times U,\mathcal{J}) = 0$. Prenons $F(\tau,z) \in \Gamma(P^1 \times U,\mathcal{J})$. Pour chaque $z \in U$ fixé, $F(\tau,z)$ est une fonction holomorphe globale sur P^1, s'annulant à l'∞, d'où $F(\tau,z) \equiv 0$. Considérons enfin un cocycle $F(\tau,z)U_0 \wedge U_1$. Pour z fixé, $F(\tau,z)$ est holomorphe en τ dans la couronne $0 < |\tau| < \infty$, donc admet le développement de Laurent:

$$F(\tau,z) = F_\infty(\tau,z) - F_0(\tau,z),$$

où F_0 resp. F_∞ désignent la partie holomorphe en 0 resp. en ∞. On peut choisir cette décomposition de façon unique en se posant la condition $F_\infty(\infty,z) = 0$. Puisqu'elles peuvent alors se calculer par la formule de Cauchy, on constate qu'elles sont holomorphes en τ, z. On a donc

$$F(\tau,z)U_0 \wedge U_1 = \delta(F_0(\tau,z)U_0 + F_\infty(\tau,z)U_1),$$

d'où $H^1(P^1 \times U,\mathcal{J}) = 0$. C.Q.F.D.

<u>Corollaire 5.3.3</u> Soit U un domaine de C et soit S sa partie fermée. Soient $K_j \subset C$, $j=1,\ldots,n-1$ des compacts. Alors quel que soit un ouvert V, on a $H^k_{V \times K_1 \times \cdots \times K_{n-1} \times S}(V \times C^{n-1} \times U, \mathcal{O}_{V \times C^n}) = 0$ pour $k < n$.

<u>Démonstration</u> Puisque U est connexe l'unicité du prolongement a lieu, i.e. la restriction $H^0(U,\mathcal{O}) \longrightarrow H^0(U \setminus S,\mathcal{O})$ est injective. En appliquant ce fait à une fonction holomorphe $F(w,z)$ dans $V \times U$ pour w fixé, on conclut que $H^0(V \times U,\mathcal{O}) \longrightarrow H^0(V \times (U \setminus S),\mathcal{O})$ est aussi injective. On obtient donc $H^0_{V \times S}(V \times U,\mathcal{O}_{V \times U}) = 0$. En vertu de la Proposition 5.3.1 on obtient donc $H^k_{V \times K_1 \times S}(V \times C \times U,\mathcal{O}_{V \times C \times U}) = 0$ pour $k < 2$. En répétant ainsi l'emploi de la proposition, on aboutit à la conclusion. C.Q.F.D.

<u>Théorème 5.3.4</u> Soient K_1, K_2 des polyèdres analytiques fermés dans C^n. On a alors, quel que soit un ouvert V,

$$H^k_{V \times (K_1 \setminus K_2)}(V \times C^n,\mathcal{O}_{V \times C^n}) = 0 \text{ pour } k < n.$$

<u>Démonstration</u> Omettons pour simplifier le facteur V. Sans perdre la généralité on peut supposer que $K_1 \supset K_2$, donc

$$K_1 = \{z \in C^n;\ |F_j(z)| \leq 1 \quad \text{pour } j = 1,\ldots,N_1\},$$

$$K_2 = \{z \in C^n;\ |F_j(z)| \leq 1 \quad \text{pour } j = 1,\ldots,N_1, N_1+1,\ldots,N_1+N_2\}.$$

Si on pose

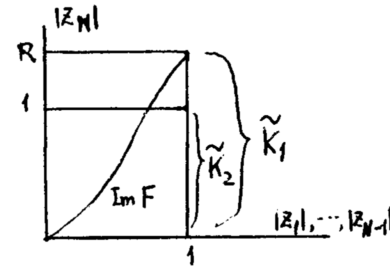
$$K'_k = \{z \in C^n;\ |F_j(z)| \leq 1 \quad \text{pour } j = 1,\ldots,N_1, N_1+1,\ldots,N_1+k\}, \quad 1 \leq k \leq N_2,$$

avec la convention $K'_{N_2} = K_2$, on a la suite exacte

$$\ldots \longrightarrow H^k_{K'_j \setminus K'_{j+1}}(C^n, \mathcal{O}) \longrightarrow H^k_{K_1 \setminus K'_{j+1}}(C^n, \mathcal{O}) \longrightarrow H^k_{K_1 \setminus K'_j}(C^n, \mathcal{O}) \longrightarrow \ldots.$$

Donc si on démontre notre assertion pour le cas special $N_2 = 1$, on pourra la démontrer par récurrence. Posons donc $N_1 = N-1$ et $N_2 = N$. Puisque K_1 est compact, on peut supposer sans perdre la généralité que $F_j(z) = z_j$ pour $1 \leq j \leq n$ et que $n \leq N-1$. Considérons le plongement $F\colon C^n \to C^N$ défini par

$$F(z) = (z_1,\ldots,z_n, F_{n+1}(z),\ldots,F_N(z)).$$



Choisissons $R \geq \max(\sup_{z \in K_1} |F_N(z)|, 1)$ et posons

$$\widetilde{K}_1 = \{(z_1,\ldots,z_N) \in C^N;\ |z_j| \leq 1,\ 1 \leq j \leq N-1,\ |z_N| \leq R\},$$

$$\widetilde{K}_2 = \{(z_1,\ldots,z_N) \in C^N;\ |z_j| \leq 1,\ 1 \leq j \leq N\}.$$

Ils sont des compacts de C^N et on a $F^{-1}(\widetilde{K}_1) = K_1$, $F^{-1}(\widetilde{K}_2) = K_2$. Or on a d'après le Théorème 4.6.7

$$(R^k F_* \mathcal{O})_{(z_1,\ldots,z_N)} = H^k(F^{-1}(z_1,\ldots,z_N), \mathcal{O})$$

$$= \begin{cases} \mathcal{O}_{(z_1,\ldots,z_n)} & \text{si } k = 0 \text{ et } (z_1,\ldots,z_N) \in \operatorname{Im} F, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc d'après le Théorème 4.6.3 on obtient

$$H^k_{K_1 \setminus K_2}(C^n, \mathcal{O}) = H^k_{\widetilde{K}_1 \setminus \widetilde{K}_2}(C^N, F_* \mathcal{O}). \tag{5.13}$$

Posons

$$U = \{z_N \in C;\ |z_N| > 1\}, \quad S = \{z_N \in C;\ 1 < |z_N| \leq R\},$$

$$L_j = \{z_j \in C;\ |z_j| \leq 1\}, \quad 1 \leq j \leq N-1.$$

On a $\widetilde{K}_1 \setminus \widetilde{K}_2 = L_1 \times \ldots \times L_{N-1} \times S$. Donc en appliquant le Corollaire 5.3.3 au couple (U,S), on obtient

$$H^k_{\tilde{K}_1 \setminus \tilde{K}_2}(C^{N-1}\times U, \mathcal{O}_C N) = 0 \quad \text{pour} \quad k < N.$$

Or on a d'après le Théorème 5.1.4 une suite exacte de la forme

$$0 \longleftarrow F_* \mathcal{O}_C n \longleftarrow \mathcal{O}_C^{\ell_0} N \longleftarrow \dots \longleftarrow \mathcal{O}_C^{\ell_{N-n}} N \longleftarrow 0.$$

(Puisque on peut fabriquer maintenant la résolution globalement comme la résolution de Koszul, le facteur implicite V ne produit aucune difficulté.) Donc d'après le Corollaire 4.3.7 on conclut que

$$H^k_{\tilde{K}_1 \setminus \tilde{K}_2}(C^{N-1}\times U, F_* \mathcal{O}_C n) = 0 \quad \text{pour} \quad k < n.$$

Puisque $C^{N-1}\times U$ est un voisinage de $\tilde{K}_1 \setminus \tilde{K}_2$ dans C^N, compte tenu de (5.13) on achève la démonstration.

<u>Corollaire 5.3.5</u> $\underline{H}^k_{R^n}(\mathcal{O}_{C^n}) = 0$ pour $k < n$.

<u>Démonstration</u> Notons que $R = \{z \in C;\ |e^{iz}| \leq 1,\ |e^{-iz}| \leq 1\}$. Donc

$K_1 = R^n \cap \{z \in C^n;\ |z_1| \leq 1, \dots, |z_n| \leq 1\}$,

$K_2 = K_1 \cap \{\mathrm{Re}\ f(z) \leq 0\}$, où $f(z) = 1 - (z_1^2 + \dots + z_n^2)$,

sont des polyèdres analytiques fermés. Posons

$$U = \{z \in C^n;\ |z_1| < 1, \dots, |z_n| < 1,\ \mathrm{Re}\ f(z) > 0\}.$$

C'est un voisinage de l'origine et on a

$$K_1 \setminus K_2 = R^n \cap U.$$

En effet, l'inclusion $\supset$ est clair. D'autre part, si $z \in R^n$ et $\mathrm{Re}\ f(z) > 0$, on a $1 - (z_1^2 + \dots + z_n^2) > 0$, donc $|z_j| < 1$, d'où l'inclusion réciproque. Donc d'après le Théorème 5.3.4 on a $H^k_{R^n \cap U}(U, \mathcal{O}) = H^k_{K_1 \setminus K_2}(C^n, \mathcal{O}) = 0$ pour $k < n$. Puisque $\{rU;\ r > 0\}$ sont des voisinages fondamentaux de l'origine, on conclut que $\underline{H}^k_{R^n}(\mathcal{O})_0 = 0$ pour $k < n$. C.Q.F.D.

<u>Remarque</u> D'après le Lemme 4.3.5 on obtient donc $H^k_{\Omega}(C^n, \mathcal{O}) = 0$ pour $k < n$ pour tout ouvert $\Omega \subset R^n$. Donc en vertu de la suite exacte de Théorème 4.3.6 c), il en est ainsi pour tout $S \subset R^n$ localement fermé.

<u>Corollaire 5.3.6</u> Soit $S = \{z \in C^n;\ \mathrm{Im}\ z_j \geq 0,\ j = 1, \dots, n\}$. On a $\underline{H}^k_S(\mathcal{O}_{C^n})|_{R^n} = 0$ pour $k < n$.

<u>Démonstration</u> Posons cette fois-ci

$K_1 = S \cap \{z \in C^n;\ |z_j| \leq 1,\ j = 1, \dots, n\}$,

$$K_2 = K_1 \cap \{z\in C^n;\ \mathrm{Re}\, f(z) \leq 0\},$$
$$U = \{z\in C^n;\ |z_j| < 1,\ j = 1,\ldots,n,\ \ \mathrm{Re}\, f(z) > 0\},$$
où
$$f(z) = 2i(z_1+\ldots+z_n) + 1 - (z_1^2+\ldots+z_n^2).$$
On a $K_1 \setminus K_2 = S \cap U$. En effet, l'inclusion $\supset$ étant claire, soit $z = x+iy \in K_1 \setminus K_2$. Pour montrer $z \in S \cap U$, il suffit de vérifier $|z_j| < 1$ pour $j = 1,\ldots,n$. Or on a
$$0 \leq y_j \leq 1, \quad j = 1,\ldots,n,$$
$$0 < \mathrm{Re}\, f(z) = 1 - (x_1^2+\ldots+x_n^2) - 2(y_1+\ldots+y_n) + (y_1^2+\ldots+y_n^2).$$
Donc en substituant $y_j \geq y_j^2$ on obtient
$$(x_1^2+\ldots+x_n^2) + (y_1^2+\ldots+y_n^2) < 1,$$
d'où l'assertion. D'après le Théorème 5.3.4 on conclut donc que $H^k_{S\cap U}(U,\mathcal{O}) = H^k_{K_1\setminus K_2}(U,\mathcal{O}) = 0$ pour $k < n$, d'où $\underline{H}^k_S(\mathcal{O})_0 = 0$ pour $k < n$. C.Q.F.D.

Démontrons maintenant le

<u>Théorème 5.3.7</u> $R^n \subset C^n$ est pur de codimension n par rapport à $\mathcal{O}$.

<u>Démonstration</u> Il reste à considérer $\underline{H}^k_{R^n}(\mathcal{O})$ pour $k > n$. Soit $\Omega \subset R^n$ un ouvert et soit U un voisinage complexe de Stein de Ω. Posons $U_j = U \cap \{\mathrm{Im}\, z_j \neq 0\}$, $j = 1,\ldots,n$. Alors $\mathcal{U} = \{U,U_1,\ldots,U_n\}$, $\mathcal{U}' = \{U_1,\ldots,U_n\}$ sont un recouvrement relatif de Stein de $(U,U\setminus\Omega)$. On a donc
$$H^k_\Omega(U,\mathcal{O}) = H^k(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}',\mathcal{O}).$$
Pour $k > n$, il n'y a pas de cochaîne relative non banale. D'où $H^k(U,\mathcal{O}) = 0$, donc $\underline{H}^k_{R^n}(\mathcal{O}) = 0$. C.Q.F.D.

Si on se rappelle du facteur V dans le Théorème 5.3.4, on peut démontrer par la même manière une variante comme suit:

<u>Théorème 5.3.7bis</u> $R^n \times C^d \subset C^{n+d}$ est pur de codimension n par rapport à $\mathcal{O}_{C^{n+d}}$.

Considérons enfin les groupes $H^k_S(C^n,\mathcal{O})$ pour $S \subset R^n$ localement fermé. On sait déjà qu'ils s'annulent pour $k < n$. De plus, si $S = \Omega$ est un ouvert, on sait $H^k_\Omega(C^n,\mathcal{O}) = 0$ aussi pour $k > n$. Donc dans le cas général où $S =$

$\Omega \cap F$ avec Ω ouvert et F fermé, en vertu de la suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H^{k-1}_{\Omega \setminus F}(C^n, \mathcal{O}) \longrightarrow H^k_S(C^n, \mathcal{O}) \longrightarrow H^k_{\Omega}(C^n, \mathcal{O}) \longrightarrow H^k_{\Omega \setminus F}(C^n, \mathcal{O}) \longrightarrow \cdots$$

on conclut que $H^k_S(C^n, \mathcal{O}) = 0$ pour $k \geq n+2$. Examinons donc $H^{n+1}_S(C^n, \mathcal{O})$.

<u>Lemme 5.3.8</u> Soit $S = \Omega \cap F$ où $\Omega \subset R^n$ est un ouvert et $F \subset R^n$ est un fermé. Supposons que F est une réunion finie de fermés de R^n dont chacun est du type produit : $F_1 \times \cdots \times F_n$ avec des $F_j \subset R$ fermés. On a alors $H^{n+1}_S(C^n, \mathcal{O}) = 0$.

<u>Démonstration</u> Grâce à la suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H^{n+1}_F(C^n, \mathcal{O}) \longrightarrow H^{n+1}_{\Omega \cap F}(C^n, \mathcal{O}) \longrightarrow H^{n+2}_{(R^n \setminus \Omega) \cap F}(C^n, \mathcal{O}) \longrightarrow \cdots,$$

il suffit de démontrer $H^{n+1}_F(C^n, \mathcal{O}) = 0$. Supposons d'abord que F est lui-même du type produit $F_1 \times \cdots \times F_n$. Alors les $n+1$ ouverts

$$U_0 = C^n, \quad U_1 = (C \setminus F_1) \times C \times \cdots \times C, \ldots, \quad U_n = C \times \cdots \times C \times (C \setminus F_n)$$

se constitueront un recouvrement relatif de Stein de $(C^n, C^n \setminus F)$. D'où $H^{n+1}_F(C^n, \mathcal{O}) = 0$.

Démontrons le cas général par la récurrence sur le nombre de composantes de la réunion. Supposons qu'on a $H^{n+1}_F(C^n, \mathcal{O}) = 0$ pour tout F qui est une réunion de N fermés du type produit. Considérons $F \cup F'$, où F' est du type produit. D'après le théorème de Mayer-Vietoris, on a la suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H^{n+1}_F(C^n, \mathcal{O}) \oplus H^{n+1}_{F'}(C^n, \mathcal{O}) \longrightarrow H^{n+1}_{F \cup F'}(C^n, \mathcal{O}) \longrightarrow H^{n+2}_{F \cap F'}(C^n, \mathcal{O}) \longrightarrow \cdots,$$

d'où on obtient $H^{n+1}_{F \cup F'}(C^n, \mathcal{O}) = 0$. C.Q.F.D.

<u>Exercice</u> Démontrer la variante ci-dessus de la suite de Mayer-Vietoris en imitant celle du Théorème 4.3.8.

<u>Remarque</u> En effet, on démontrera ultérieurement $H^{n+1}_S(C^n, \mathcal{O}) = 0$ quel que soit $S \subset R^n$ localement fermé. Pour le moment, on se contentera du résultat ci-dessus, partiel mais suffisant pour la plupart d'applications.

4. Définition cohomologique de l'hyperfonction

Maintenant on est prêt à donner la définition rigoureuse de l'hyperfonction

Définition 5.4.1 On définit le faisceau d'hyperfonctions B sur R^n par $B = \underline{H}^n_{R^n}(\mathcal{O})$.

En vertu des Théorème 5.3.7, Lemme 4.3.5, Lemme 5.3.8 et Théorème 4.4.4, on obtient le

Corollaire 5.4.2 Pour un ouvert $\Omega \subset R^n$ on a

(5.14) $\qquad B(\Omega) = H^n_\Omega(C^n, \mathcal{O}) = H^n_\Omega(U, \mathcal{O}),$

où U est un voisinage complexe quelconque de Ω. De plus, pour $S \subset R^n$ localement fermé, on a

(5.15) $\qquad \Gamma_S(R^n, B) = H^n_S(C^n, \mathcal{O}),$

et

$$H^k_S(R^n, B) = H^{n+k}_S(C^n, \mathcal{O}) = 0,$$

pour $k \geq 2$, ou pour $k = 1$ et pour S vérifiant la conclusion du Lemme 5.3.8.

Corollaire 5.4.3 Soit $\Omega \subset R^n$ un ouvert. Supposons que $\partial\Omega$ satisfait à la conclusion du Lemme 5.3.8. Alors la restriction $\Gamma_{\overline{\Omega}}(R^n, B) \to B(\Omega)$ est surjective.

Ceci découle du corollaire précédent et de la suite exacte

$$\cdots \to \Gamma_{\overline{\Omega}}(R^n, B) \to \Gamma(\Omega, B) \to H^1_{\partial\Omega}(R^n, B) \to \cdots.$$

Cette hypothèse sera vérifiée si par exemple Ω est ~~à frontière analytique~~ la réunion d'un nombre fini de cubes à côtés parallèles aux hyperplans de coordonnées. ~~réelle par morceaux, car le Lemme 5.3.8 peut être généralisé à tel cas par le changement de coordonnées.~~ Comme on l'a remarqué à la fin du paragraphe précédent, on aura en effet toujours $H^1_{\partial\Omega}(R^n, B) = 0$, d'où la flascité de B. Pour le moment pour Ω général on peut prolonger $f \in B(\Omega)$ à R^n à une modification au voisinage de $\partial\Omega$ près, car on peut approcher Ω de l'intérieur par des ouverts comme ci-dessus.

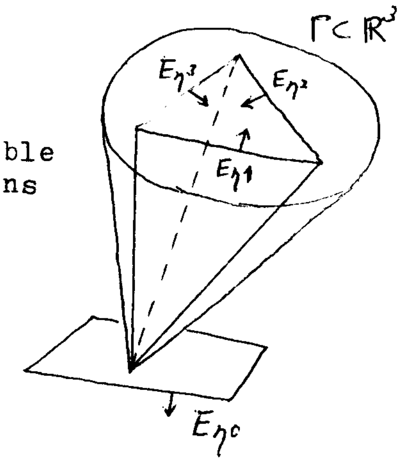
Nous interprétons ensuite la signification de $F(x+i\Gamma 0)$ du point de vue cohomologique. Prenons $\eta^0, \eta^1, \ldots, \eta^n \in R^n$ tels que, en posant

(5.16) $\qquad E_\eta = \{y;\ \langle y, \eta \rangle > 0\},$

$E_{\eta^1} \cap \cdots \cap E_{\eta^n}$ soit un sous cône ~~propre~~ de Γ et que $E_{\eta^0} \cup E_{\eta^1} \cup \cdots \cup E_{\eta^n} = R^n \setminus \{0\}$.注)
On suppose en plus que l'ordre de $\eta^1, \ldots, \eta^n$ est compatible avec l'orientation

---

注) Sous cette condition n éléments parmi $\eta^0, \ldots, \eta^n$ sont toujours linéairement indépendants. En effet, si par ex. $\eta^1, \ldots, \eta^n$ sont linéairement dépendants, $\bigcap_{j=1}^n \partial E_{\eta^j}$ contiendrait une droite, mais ce qui ne serait jamais contenue dans E_{η^0}.



de R^n. (Sinon on change de la signe.) Prenons un petit voisinage complexe U de Ω tel que $F(z)$ soit défini dans $(\Omega+iE_{\eta 1}\cap\cdots\cap E_{\eta n})\cap U$. (Par la définition de coin infinitésimal, ceci est possible si $E_{\eta 1}\cap\cdots\cap E_{\eta n}$ est un sous cône propre de Γ.) Posons

$$U_j = (\Omega+iE_{\eta j})\cap U, \quad j = 0,1,\ldots,n.$$

Alors $\mathfrak{U} = \{U,U_0,\ldots,U_n\}$ et $\mathfrak{U}' = \{U_0,\ldots,U_n\}$ forment un recouvrement relatif de $(U,U\setminus\Omega)$ et

$$(5.17)\qquad F(z)U_\wedge U_{1\wedge}\cdots{}_\wedge U_n \in C^n(\mathfrak{U}\bmod\mathfrak{U}',\mathcal{O}).$$

De plus c'est un cocycle puisque par hypothèse $U_0\cap U_1\cap\cdots\cap U_n = \emptyset$.注) Donc d'après le Théorème 4.5.6 il définit de façon canonique un élément de $H^n_\Omega(C^n,\mathcal{O})$.

<u>Lemme 5.4.4</u> Cet élément de $H^n_\Omega(C^n,\mathcal{O})$ ne dépend pas du choix de $\eta^0,\eta^1,\ldots,\eta^n$.

<u>Démonstration</u> Soit $(\mathfrak{V},\mathfrak{V}')$ un autre recouvrement avec la même propriété. On pourra passer de $(\mathfrak{U},\mathfrak{U}')$ à $(\mathfrak{V},\mathfrak{V}')$ par de petits changements successifs $(\mathfrak{U},\mathfrak{U}')\longmapsto(\mathfrak{M},\mathfrak{M}')$ de trois sortes suivantes:

a) Diminution de U à V: $\mathfrak{M}= \{U\cap V,U_0\cap V,\ldots,U_n\cap V\}$ etc.

b) Remplacement de η^0 par $\eta^{0\prime}$: $\mathfrak{M}= \{U,U_0',U_1,\ldots,U_n\}$ etc.

c) Remplacement de η^1 par $\eta^{1\prime}$: $\mathfrak{M}= \{U,U_0,U_1',U_2,\ldots,U_n\}$ etc.

Ici et dorénavant, $\mathfrak{M}'$ s'obtient toujours en supprimant le premier membre de $\mathfrak{M}$. Bien entendu, on suppose toujours que $(\mathfrak{M},\mathfrak{M}')$ a la même propriété que $(\mathfrak{U},\mathfrak{U}')$.

Examinons l'invariance de la classe de cohomologie séparément pour chaque procédé. Dans le cas a), $\mathfrak{M}$ est un raffinement de $\mathfrak{U}$ et $F(z)(U\cap V)_\wedge(U_1\cap V)_\wedge\cdots{}_\wedge(U_n\cap V)$ correspond à $F(z)U_\wedge U_{1\wedge}\cdots{}_\wedge U_n$ par l'homomorphisme induit par l'application de raffinement. Donc l'assertion est évidente. Dans le cas b), considérons le recouvrement $\mathfrak{U}\cup\mathfrak{M} = \{U,U_0,U_0',U_1,\ldots,U_n\}$. $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{M}$ sont des raffinement de $\mathfrak{U}\cup\mathfrak{M}$ par l'inclusion naturelle. Le cocycle $F(z)U_\wedge U_{1\wedge}\cdots{}_\wedge U_n$ a toujours la même forme pour ces trois recouvrements, d'où l'assertion. Enfin, dans le cas c), considérons le recouvrement $\mathfrak{U}\cup\mathfrak{M} = \{U,U_0,U_1,U_1',U_2,\ldots,U_n\}$. $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{M}$ sont

---

注) En effet si $\eta\in E_{\eta 0}\cap E_{\eta 1}\cap\cdots\cap E_{\eta n}$, alors $-\eta\notin E_{\eta 0}\cup E_{\eta 1}\cup\cdots\cup E_{\eta n} = R^n\setminus\{0\}$, ce qui est absurde.

des raffinement de $\mathfrak{U}\cup\mathfrak{M}$ par l'inclusion naturelle. $F(z)U\wedge U_1\wedge\cdots\wedge U_n$ resp. $F(z)U\wedge U_1'\wedge U_2\wedge\cdots\wedge U_n$ sont des images par l'homomorphisme associé aux raffinements $\mathfrak{U}\cup\mathfrak{M}\longmapsto\mathfrak{U}$ resp. $\mathfrak{U}\cup\mathfrak{M}\longmapsto\mathfrak{M}$ du même cocycle

(5.18) $\quad F(z)U\wedge U_1\wedge\cdots\wedge U_n + F(z)U\wedge U_1'\wedge U_2\wedge\cdots\wedge U_n$

d'où, d'après le Lemme 4.5.7 appliqué au diagramme ci-dessous, on obtient l'assertion.

$$\begin{tikzcd}
& H^k(\mathfrak{U}\cup\mathfrak{M} \bmod (\mathfrak{U}\cup\mathfrak{M})',\mathcal{O}) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
H^k(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}',\mathcal{O}) \arrow[dr] & & H^k(\mathfrak{M} \bmod \mathfrak{M}',\mathcal{O}) \arrow[dl] \\
& H^k_{\Omega}(C^n,\mathcal{O}) &
\end{tikzcd}$$

C.Q.F.D.

Exercice Calculer le cobord de (5.18).

Corollaire 5.4.5 L'opération linéaire

$$F_1(x+i\Gamma_1 0) + F_2(x+i\Gamma_2 0) = (F_1+F_2)(x+i\Gamma_1\cap\Gamma_2 0)$$

correspond à celle dans $H^n_{\Omega}(C^n,\mathcal{O})$ par la correspondence ci-dessus.

Démonstration D'après le Lemme 5.4.4 on peut choisir sans perdre la généralité de façon que $E_{\eta 1}\cap\cdots\cap E_{\eta n}\subset\Gamma_1\cap\Gamma_2$. L'assertion est alors banale.

Ainsi on obtient un homomorphisme bien défini du préfaisceau d'hyperfonctions intuitives $\{\sum F_j(x+i\Gamma_j 0)\}$ dans $\underline{H}^n_{R^n}(\mathcal{O})$. Montrons que cet homomorphisme est en effet un isomorphisme.

Théorème 5.4.6 Soit $\Omega\subset R^n$ un ouvert. Soient $\eta^1,\ldots,\eta^N\in R^n$ tels que $E_{\eta^1}\cup\cdots\cup E_{\eta^N} = R^n\setminus\{0\}$ et que $E_{\eta^{j_1}}\cap\cdots\cap E_{\eta^{j_{n+1}}} = \emptyset$ pour toute partie $\{j_1,\ldots,j_{n+1}\}\subset\{1,\ldots,N\}$ à n+1 éléments. Alors toute hyperfonction $f(x)\in B(\Omega)$ peut se représenter à la forme suivante:

$$f(x) = \sum_{j_1\cdots j_n} F_{j_1\cdots j_n}(x+iE_{\eta^{j_1}}\cap\cdots\cap E_{\eta^{j_n}}0). \tag{5.19}$$

L'expression est unique modulo celles qui correspondent aux cobords.

Démonstration Prenons un voisinage de Stein U de Ω et posons $U_j = (R^n+iE_{\eta^j})\cap U$. Alors $\mathfrak{U} = \{U\}\cup\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{U}' = \{U_1,\ldots,U_N\}$ sera un recouvrement de Stein relatif de $(U, U\setminus\Omega)$. Donc en vertu du théorème de Leray on a $B(\Omega) = H^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}',\mathcal{O})$. Un n-cocycle relatif pour $(\mathfrak{U},\mathfrak{U}')$ s'écrit à la forme

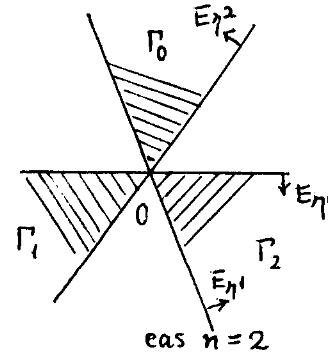
$$\sum_{j_1\cdots j_n} F_{j_1\cdots j_n}(z)U\wedge U_{j_1}\wedge\cdots\wedge U_{j_n}. \tag{5.20}$$

Notons que d'après l'hypothèse $E_{j_1}\cap\cdots\cap E_{j_{n+1}} = \emptyset$, chaque terme est séparément un cocycle. Il provient du terme correspondant de (5.19) (au signe près) par la correspondence ci-dessus. En effet, pour $E_{\eta j_1}\cap\cdots\cap E_{\eta j_n} \neq \emptyset$, on peut trouver un vecteur η tel que $E_\eta \cup E_{\eta j_1} \cup \ldots \cup E_{\eta j_n} = R^n \setminus \{0\}$.注) Posons $U_\eta = (R^n + iE_\eta)\cap U$. Alors le terme $F_{j_1\cdots j_n}(z) U \wedge U_{j_1}\wedge\cdots\wedge U_{j_n}$ représentera toujours la même classe de cohomologie soit pour $\mathcal{U}\cup\{U_\eta\}$ soit pour ses raffinements $\mathcal{U}$ ou $\{U, U_\eta, U_{j_1}, \ldots, U_{j_n}\}$. Ainsi on a la surjectivité. Notons aussi que la valeur au bord intuitive (5.19) qui va à un cobord (5.20) s'annule juste au sens intuitif dans le Chapitre III. D'où l'injectivité. C.Q.F.D.

Examinons quelques exemples concrets de telles expressions.

<u>Exemple 5.4.7</u> Soit U un voisinage de Stein de Ω.

a) Choisissons $\eta^0, \eta^1, \ldots, \eta^n \in R^n$ tels que $E_{\eta^0}\cup\ldots\cup E_{\eta^n} = R^n\setminus\{0\}$. Alors $\mathcal{U} = \{U\}\cup\mathcal{U}'$, $\mathcal{U}' = \{U_0, \ldots, U_n\}$, où $U_j = (R^n + iE_{\eta^j})\cap U$, $j=0,\ldots,n$, est un exemple fondamental de recouvrement de Stein relatif de $(U, U\setminus\Omega)$. Posons $\Gamma_j = \bigcap_{\ell\neq j} E_{\eta^\ell}$, $j = 0,\ldots,n$. Ils sont des cônes propres, disjoints entre eux. L'espace des n-cochaînes s'identifie avec $\bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{O}((R^n + i\Gamma_j)\cap U)$. Posons encore $\Gamma_{jk} = \bigcap_{\ell\neq j,k} E_{\eta^\ell}$. Alors l'espace des (n-1)-cochaînes est isomorphe à $\bigoplus_{j<k} \mathcal{O}((R^n + i\Gamma_{jk})\cap U)$. On a donc



$$(5.21)\quad B(\Omega) = \bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{O}((R^n + i\Gamma_j)\cap U) / \bigoplus_{j<k} \mathcal{O}((R^n + i\Gamma_{jk})\cap U),$$

où le dénominateur entre dans le numérateur par l'application

$$\mathcal{O}((R^n + i\Gamma_{jk})\cap U) \ni F(z) \begin{cases} \nearrow F(z)|_{(R^n + i\Gamma_j)\cap U} \in \mathcal{O}((R^n + i\Gamma_j)\cap U) \\ \searrow (-1)^{k-j-1} F(z)|_{(R^n + i\Gamma_k)\cap U} \in \mathcal{O}((R^n + i\Gamma_k)\cap U). \end{cases}$$

Pour le calcul pratique il vaut mieux conserver le symbole du produit extérieur $U\wedge U_{j_1}\wedge\cdots\wedge U_{j_n}$ pour ne pas se tromper de signes.

b) Reprenons le recouvrement utilisé dans la démonstration du Théorème 5.3.7. Posons $U_j = U\cap\{\mathrm{Im}\, z_j \neq 0\}$. Alors $\mathcal{U} = \{U, U_1, \ldots, U_n\}$, $\mathcal{U}' = \{U_1, \ldots, U_n\}$ est un recouvrement de Stein relatif de $(U, U\setminus\Omega)$. Le cocycle de degré n n'a

---

注) Sinon, $R^n \setminus (E_{\eta j_1}\cup\ldots\cup E_{\eta j_n}) = R^n \cap \overline{E_{-\eta j_1}} \cap\cdots\cap \overline{E_{-\eta j_n}}$ sera un cône convexe fermé contenant une droite γ à sa frontière. Puisque $\pm\xi \in \overline{E_\eta}$ implique $\xi\in\partial E_\eta$, γ sera alors contenue aussi à la frontière de $E_{\eta j_1}\cap\cdots\cap E_{\eta j_n}$. Mais $\gamma\setminus\{0\}$ est recouvert par le reste de $E_{\eta j}$. Il y aurait alors un point voisin de $\gamma\setminus\{0\}$ dans l'intersection $E_{\eta j_1}\cap\cdots\cap E_{\eta j_n}\cap E_{\eta j}$ qui était $\emptyset$.

qu'un seul terme $F(z)U \wedge U_1 \wedge \cdots \wedge U_n$. Donc une hyperfonction est représentée par une fonction $F(z)$ holomorphe sur le seul ouvert $U \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n$ qu'on désigne traditionnellement par $U \# R^n$. On a

$$\delta(\sum G_j(z) U \wedge U_1 \wedge \cdots \wedge U_{j-1} \wedge U_{j+1} \wedge \cdots \wedge U_n) = \sum (-1)^j G_j(z) U \wedge U_1 \wedge \cdots \wedge U_n .$$

Donc $F(z) \in \mathcal{O}(U \# R^n)$ représente nul si et seulement si il existe des fonctions $G_j(z)$ holomorphes respectivement sur $U \cap \{\text{Im } z_k \neq 0 \text{ pour } k \neq j\}$ telles que $F(z) = \sum_{j=0}^{n} G_j(z)$. On a donc

(5.22) $$B(\Omega) = \mathcal{O}(U \# R^n) / \sum_{j=1}^{n} \mathcal{O}(U \cap \{\text{Im } z_k \neq 0 \text{ pour } k \neq j\}).$$

Cherchons la relation entre cette expression et celle du Théorème 5.4.6. Remarquons que $U \# R^n$ se constitue de 2^n composantes connexes dont chacune est un coin infinitésimal $(\Omega + i\Gamma_\sigma) \cap U$, où $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma_j = \pm 1$ et $\Gamma_\sigma = \{\sigma_j \text{Im } z_j > 0, j=1,\ldots,n\}$. Posons donc $U_{j\pm} = U \cap \{\pm \text{Im } z_j > 0\}$. Alors $\mathcal{V} = \{U, U_{1\pm}; \ldots, U_{n\pm}\}$, $\mathcal{V}' = \{U_{1\pm}; \ldots, U_{n\pm}\}$ est un recouvrement de Stein relatif ayant la forme du Théorème 5.4.6. Il est un raffinement de $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ ci-dessus, et le cocycle $F(z) U \wedge U_1 \wedge \cdots \wedge U_n$, représentant de $f(x) \in B(\Omega)$, va à l'élément

$$F(z) U \wedge (U_{1+} + U_{1-}) \wedge \cdots \wedge (U_{n+} + U_{n-}) = \sum_{\sigma} F(z) U \wedge U_{1\sigma_1} \wedge \cdots \wedge U_{n\sigma_n} .$$

Compte tenu du fait que l'orientation de $U_{1\sigma_1} \wedge \cdots \wedge U_{n\sigma_n}$ est égale à $\sigma_1 \cdots \sigma_n$, on obtient donc

(5.23) $$f(x) = \sum_{\sigma} \sigma_1 \cdots \sigma_n F(x + i\Gamma_\sigma 0).$$

Ainsi (5.22) est un cas particulier du Théorème 5.4.6. En vertu du signe $\sigma_1 \cdots \sigma_n$ dans (5.23), la signification du dénominateur en (5.22) est maintenant claire.

<u>Exercice</u> Récapituler le cas $n = 2$ des exemples ci-dessus.

Démontrons maintenant le Lemme 3.1.3.

<u>Lemme 5.4.8</u> Si $F(x+i\Gamma 0) = 0$, on a alors $F(z) \equiv 0$.

<u>Démonstration</u> Prenons $\eta^0, \eta^1, \ldots, \eta^n \in R^n$ qui représentent $F(x+i\Gamma 0)$ comme un cocycle $\underbrace{}_{F\,=} F(z) U \wedge U_1 \wedge \cdots \wedge U_n$, où $U_j = (R^n + iE_{\eta^j}) \cap U$, $j = 0, \ldots, n$. Le problème est de démontrer $F(z) \equiv 0$ étant donné que ce cocycle est un cobord. En vertu du principe du prolongement analytique, on peut supposer sans perdre

la généralité que $\Gamma = E_{\eta 1} \cap \cdots \cap E_{\eta n}$ et que U est un petit voisinage de Stein d'un point, disons l'origine. Posons $\mathcal{U} = \{U\} \cup \mathcal{U}'$, $\mathcal{U}' = \{U_1, \ldots, U_n\}$ comme d'habitude. Soit $G = \sum G_{j_1 \ldots j_{n-1}}(z) U_\wedge U_{j_1} \wedge \cdots \wedge U_{j_{n-1}} \in C^{n-1}(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{O})$ tel que $\delta G = F$. En utilisant le fait que les coefficients de δG pour les termes autre que $U_\wedge U_1 \wedge \cdots \wedge U_n$ s'annulent, on va démontrer ci-dessous que les coefficients $G_{j_1 \ldots j_{n-1}}(z)$ de G tel que $0 \notin \{j_1, \ldots, j_{n-1}\}$ se prolongent à un voisinage entier de l'origine.

<u>Exercice</u> Prévoir la démonstration du lemme pour le cas $n = 2$.

Le procédé de prolongement est assez compliqué et se fait en plusieurs étapes. Notons d'abord que d'après la démonstration du Corollaire 5.3.6, il existe un système de voisinages fondamentaux U de l'origine tels que

$$H^k_{(R^n - i\overline{E_{\eta j_1} \cap \cdots \cap E_{\eta j_n}}) \cap U}(U, \mathcal{O}) = 0 \quad \text{pour} \quad k < n,$$

où $\{j_1, \ldots, j_n\}$ est une partie de $\{0, 1, \ldots, n\}$ formée de n différentes éléments. (En effet, par un changement de coordonnées linéaire on peut toujours ramener à la situation du corollaire.) De plus, si on se rappelle, dans la démonstration, de l'existence du facteur arbitraire V, on peut aussi constater qu'il existe un autre système de voisinages fondamentaux U tels que

$$(5.24) \qquad H^k_{(R^n - i\overline{E_{\eta j_1} \cap \cdots \cap E_{\eta j_p}}) \cap U}(U, \mathcal{O}) = 0 \quad \text{pour} \quad k < p; \quad p = 1, \ldots, n.$$

(En effet, dans ce cas les variables z_j telles que $j \neq j_1, \ldots, j_p$ pourront être considérées comme des paramètres. Donc ce système de voisinages fondamentaux se constituera d'éléments du type produit d'un voisinage distingué de dimension p et d'un voisinage quelconque de dimension $n-p$, et donc il sera différent pour différente valeur de p.) Pour faciliter l'écriture introduisons un système de symboles formels $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_n\}$ et considérons une sorte d'espaces de cochaînes:

$$C^{p,q}(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{I}; \mathcal{O}) = \Big\{ \sum H_{j_1 \ldots j_p; k_1 \ldots k_q}(z) U_\wedge U_{j_1} \wedge \cdots \wedge U_{j_p} \wedge I_{k_0} \wedge \cdots \wedge I_{k_q}; \\ H_{j_1 \ldots j_p; k_1 \ldots k_q}(z) \in \mathcal{O}(U_{j_1} \cap \cdots \cap U_{j_p}) \Big\}.$$

Ici on fait la convention habituelle $I_k \wedge I_\ell = - I_\ell \wedge I_k$, et de plus on pose $U_j \wedge I_k = - I_k \wedge U_j$ pour $j \neq k$ et $U_j \wedge I_j = 0$. Le cobord δ pour le recouvrement $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')$ s'appliquera toujours par la formule $\delta H = \sum_{j=0}^{n} U_j \wedge H$. Donc si on fixe $I_{k_0} \wedge \cdots \wedge I_{k_q}$ et fait varier p, on obtient un δ-complexe. Examinons ce que ce complexe nous donne. Pour $I_{k_0} \wedge \cdots \wedge I_{k_q}$ fixé, on n'a que U_j, $j \in \{j_1, \ldots, j_{n-q}\} = \{0,1,\ldots,n\} \setminus \{k_0,\ldots,k_q\}$ dans les coefficients. Ceux-ci constituent avec U un recouvrement relatif de $(U, \bigcup_{j \in \{j_1,\ldots,j_{n-q}\}} U_j)$. Donc le p-ième groupe de cohomologie est égal à $H^p_{(R^n - i\overline{E_{j_1} \cap \cdots \cap E_{j_{n-q}}}) \cap U}(U, \mathcal{O})$. D'après (5.24) ce groupe s'annule pour $p < n-q$ pour un système de voisinages fondamentaux U.

D'autre part on définit le cobord d par rapport à la famille $\mathcal{J}$ par $dH = \sum_{j=1}^{n} H \wedge I_j$. Il est alors clair qu'on a $d^2 = 0$ et $\delta d = d\delta$. Reprenons maintenant la relation $F = \delta G$. Puisque $dF = 0$, on a $0 = d\delta G = \delta dG$. Puisque $dG \in C^{n-1,0}(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathcal{J}; \mathcal{O})$, on peut alors trouver, d'après la nullité de la cohomologie, un élément $G^{n-2,0} \in C^{n-2,0}(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathcal{J}; \mathcal{O})$ tel que $dG = \delta G^{n-2,0}$ quitte à rétrécir U. Ainsi on peut trouver successivement des éléments $G^{n-q,q-2} \in C^{n-q,q-2}(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathcal{J}; \mathcal{O})$, $q = 2,\ldots,n$. (Voir le diagramme ci-dessous. Là on néglige le rétrécissement de U.)

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathcal{O}(U) \\
C^{0,n-2}(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathcal{J}; \mathcal{O}) \arrow[r, "d"] \arrow[d] \arrow[ur, phantom] & C^{0,n-1}(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathcal{J}; \mathcal{O}) \arrow[u, phantom, "\cong" rotate=90] \arrow[d] \\
\vdots \arrow[ur, dashed] & \vdots
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \vdots \arrow[d] & \\
C^{n-2,0}(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathcal{J}; \mathcal{O}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & C^{n-2,1}(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathcal{J}; \mathcal{O}) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] \arrow[ur, dashed] & \cdots \\
dG \in C^{n-1,0}(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathcal{J}; \mathcal{O}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] \arrow[ur, dashed] & C^{n-1,1}(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathcal{J}; \mathcal{O}) & \\
C^{n,0}(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathcal{J}; \mathcal{O}). & &
\end{tikzcd}
$$

Ceci fait, regardons la correspondence $dG^{n-q,q-2} \longmapsto dG^{n-q-1,q-1}$ en détail. Le fait qu'il existe $H \in C^{n-q-1,q-1}(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}', \mathcal{J}; \mathcal{O})$ tel que $dG^{n-q,q-2} = \delta H$, $dG^{n-q-1,q-1} = dH$ implique que le coefficient $G_{j_1 \ldots j_{n-q}}(z)$ de $dG^{n-q,q-2}$

peut se décomposer à une somme dont chaque terme se prolonge sur l'intersection de $n-1$ parmi $U_{j_1},\dots,U_{j_{n-q}}$, disons sauf U_{j_ℓ}. $dG^{n-q-1,q-1}$ est alors obtenu au signe près en utilisant ce prolongement en remplaçant U_{j_ℓ} par I_{j_ℓ} (et par 0 si $j_\ell = 0$, car on ne dispose pas du facteur I_0). Ainsi on aboutit à un élément $dG^{0,n-2}$ qui est holomorphe sur un voisinage entier U de l'origine. Ecrivons maintenant $G = U_0 \wedge G^0 + G'$ comme d'habitude, où $G^0 \in C^{n-2}(\mathfrak{U}|_{U_0} \bmod \mathfrak{U}'|_{U_0}, \mathcal{O})$ et G' est la partie ne contenant pas le facteur U_0. Par ce qui est démontré ci-dessus, les coefficients de G' sont holomorphes dans U. On a

$$F = \delta G = U_0 \wedge (-\delta' G^0) + U_0 \wedge G' + \delta' G',$$

où δ' désigne le cobord par rapport aux indices autre que 0. On a donc $\delta' G^0 = G'|_{U_0}$ et $F = \delta' G'$. Or on a par un calcul formel

$$0 = \delta'^2 G^0 = \delta' G'|_{U_0}.$$

En général ce calcul ne vaut rien puisque le domaine de définition des coefficients $U_0 \cap \dots \cap U_n$ est vide. Mais dans ce cas $G'|_{U_0}$ est encore défini sur U_0. Donc ce calcul formel, si on le réécrit à l'aide des coefficients, nous donnera $\delta' G'|_{U_0} = 0$. Ainsi d'après le principe du prolongement analytique on conclut que $\delta' G' = 0$ partout, d'où en particulier $F(z) \equiv 0$. C.Q.F.D.

Remarquons que si l'on regarde un coefficient $G_{j_1 \dots j_{n-1}}(z)$ de G tel que $0 \notin \{j_1,\dots,j_{n-1}\}$, on ne rencontre le remplacement par 0 d'aucun terme dans ce procédé-là. Cela signifie qu'un tel coefficient peut se prolonger finalement à un voisinage U de l'origine.

Terminons la démonstration du Lemme 3.1.3. Il est à démontrer qu'en supposant que $F(x+i\Gamma 0) = f(x)$ est une fonction analytique réelle, $F(z)$ se prolonge à l'axe réel. Rappelons qu'on considère la fonction analytique réelle $f(x)$ comme une hyperfonction par $f(x+i\Gamma 0)$, où Γ est un cône quelconque. D'après le Lemme 5.4.4 le résultat comme une hyperfonction ne dépend pas de Γ. Donc en particulier on peut prendre le même cône que $F(x+i\Gamma 0)$. Aussi d'après le Corollaire 5.4.5 on a $F(x+i\Gamma 0) - f(x+i\Gamma 0) = (F-f)(x+i\Gamma 0) = 0$.

Donc en vertu de la première partie du lemme $F(z) = f(z)$ et elle se prolonge sur l'axe réel. C.Q.F.D.

Exercice Démontrer que la correspondence

$$\sum F_{j_0\ldots j_k}(z)U_{j_0}\wedge\cdots\wedge U_{j_k} \longmapsto \sum F_{j_0\ldots j_k}(z)U\wedge U_{j_0}\wedge\cdots\wedge U_{j_k}$$

représente l'homomorphisme $H^k(U\setminus\Omega,\mathcal{O}) \to H^{k+1}_{\Omega}(U,\mathcal{O})$ défini naturellement à partir de la suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H^k(U,\mathcal{O}) \longrightarrow H^k(U\setminus\Omega,\mathcal{O}) \longrightarrow H^{k+1}_{\Omega}(U,\mathcal{O}) \longrightarrow H^{k+1}(U,\mathcal{O}) \longrightarrow \cdots\cdot$$

(Ainsi, si on considère $B(\Omega) = H^{n-1}(U\setminus\Omega,\mathcal{O})$ au lieu de $H^n_{\Omega}(U,\mathcal{O})$, on peut supprimer le facteur annuyant U dans l'écriture!)

Remarque Soit M une variété analytique réelle. Pour chaque carte de coordonnées Ω (qu'on identifie avec un ouvert de R^n), on peut choisir un voisinage complexe U et définir le faisceau $\underline{H}^n_{\Omega}(\mathcal{O}_U)$. Cette notion étant locale et indépendante de coordonnées coisies, on peut les recoller à un faisceau bien défini sur M. (En effet, en recollant U on peut même trouver une variété analytique complexe $X \supset M$, unique près de M à l'homéomorphisme holomorphe près, de sorte que $\underline{H}^n_M(\mathcal{O}_X)$ l'est.) Strictement dit, ce faisceau sur M diffère du faisceau d'hyperfonctions B par un petit détail: La notion de l'hyperfonction intuitive B ne dépend pas de l'orientation locale de M, tandis que $\underline{H}^n_M(\mathcal{O}_X)$ déjà contient celle-ci. (Rappelons aussi que pour définir la correspondence $B(\Omega) \longrightarrow H^n_{\Omega}(U,\mathcal{O})$ on a bien fixé l'orientation de Ω.) Si M est orientable, on peut fixer l'orientation de M une fois pour tout et identifier B avec $\underline{H}^n_M(\mathcal{O}_X)$. C'est équivalent à déterminer l'image de la fonction 1 dans $\underline{H}^n_M(\mathcal{O}_X)$. Si M est non orientable, il n'y a pas de section globale l'image de 1 dans $\underline{H}^n_M(\mathcal{O}_X)$. Rappelons donc le sous faisceau $\underline{H}^n_M(C_X)$ de $\underline{H}^n_M(\mathcal{O}_X)$ calculé dans le Corollaire 4.7.7 pour le cas $M = R^n$. Là on a eu l'isomorphisme $\underline{H}^n_{R^n}(C_{C^n}) \simeq C_{\mathbf{R}^n}$ à l'aide de celle $H^{n-1}(S^{n-1},C) \simeq C$, où S^{n-1} était la fibre du fibré conormal de $R^n \subset C^n$. Donc en général $\underline{H}^n_M(C_X)$ est seulement localement constant et déterminer un isomorphisme local avec C_M

(ou, de façon équivalente, déterminer la section locale 1), c'est déterminer l'orientation locale de M.*) On appelle donc $\underline{H}^n_M(C_X)$ le faisceau de l'orientation de M. La définition cohomologique naïve du faisceau B sur M sera alors donnée par $B = \underline{H}^n_M(\mathcal{O}_X) \otimes_{C_M} \underline{H}^n_M(C_X)$, où le second membre est le faisceau défini par $\Omega \longmapsto H^n_\Omega(U,\mathcal{O}_U) \otimes_C H^n_\Omega(U,C_U)$. Intuitivement, cela signifie qu'on identifie le résultat de deux façons de plongement $B(\Omega) \to H^n_\Omega(U,\mathcal{O})$.

Exercice Soit Ω un ouvert convexe et soit $U \supset \Omega$ un voisinage convexe. Alors $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ sera toujours un recouvrement de Leray pour le faisceau C_U. Examiner $H^n_\Omega(U,C_U)$ à l'aide de ce recouvrement.

Exercice Récapituler le cas n = 1 (Chapitre I) du point de vue cohomologique.

Pour terminer ce paragraphe examinons les opérations sur l'hyperfonction de dérivation et de multiplication par une fonction analytique réelle. Plus généralement, soit $p(x,\partial)$ un opérateur aux dérivées partielles à coefficients analytiques réels définis dans un ouvert réel Ω. Soit $U \supset \Omega$ un voisinage complexe où cet opérateur est défini au sens complexe: $p(z,\partial_z)$. Alors $h = p(z,\partial_z): \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U$ est un homomorphisme de faisceaux et par l'argument général il induit de façon canonique un homomorphisme de faisceaux $h_*: \underline{H}^n_\Omega(U,\mathcal{O}) \longrightarrow \underline{H}^n_\Omega(U,\mathcal{O})$. D'où on obtient la définition cohomologique de l'opérateur $p(x,\partial)$: $B \to B$. Vérifions que cette définition est compatible avec notre ancienne définition intuitive. Soit $0 \to \mathcal{O}_U \to \mathcal{L}^\cdot$ la résolution flasque canonique. Compte tenu du Corollaire 5.4.5, il s'agit donc de démontrer que h_* est représenté en cohomologie de recouvrement $H^n(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \mathcal{O})$ par $F(z)U_\wedge U_1 \wedge \cdots \wedge U_n \mapsto p(z,\partial_z)F(z) U_\wedge U_1 \wedge \cdots \wedge U_n$. Mais ceci découle, comme la recette générale, du diagramme commutatif (4.18) superposé à deux exemplaires avec les flèches induites entre eux par $h^j: \mathcal{L}^j(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_k}) \to \mathcal{L}^j(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_k})$, où $h^j: \mathcal{L}^j \to \mathcal{L}^j$ est le relèvement canonique de $h: \mathcal{O} \to \mathcal{O}$.

*) Une variété analytique complexe X possède une orientation canonique définie, par exemple, par la 2n-forme $c(z)dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n > 0$, où $c(z)$ est une fonction continue et positive partout. Donc si on se donne une orientation locale $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n > 0$ de M, cela induit automatiquement l'orientation $\pm dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n > 0$ de la fibre iR^n. (La détermination exacte du signe sera laissée à titre d'exercice.)