A. Kaneko

Chapitre VIII. Hyperfonctions à paramètres holomorphes

Cours de l'institut Fourier, tome 13 (1977-1978), p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1977-1978__13__A5_0>

CHAPITRE VIII. HYPERFONCTIONS A PARAMETRES HOLOMORPHES

1. Construction d'hyperfonctions via hyperfonctions à paramètres holomorphes

Soit U un ouvert de $R^n \times C^d$. Rappelons la définition de l'hyperfonction $u(x;\tau) \in B(U)$ qui contient τ comme paramètres holomorphes. C'était un élément du sous espace $B_n\mathcal{O}_d(U) = \underline{H}^n_{R^n\times C^d}(\mathcal{O}_{n+d}) \otimes \omega_{R^n\times C^d}(U) \subset B_{n+2d}(U) = \underline{H}^{n+2d}_{R^n\times C^d}(\mathcal{O}_{n+2d}) \otimes \omega_{R^n\times C^d}(U)$. D'après le Théorème 7.2.6, elle était caractérisée comme la solution de

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{\tau}_1} = 0, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \bar{\tau}_d} = 0.$$

Lemme 8.1.1 Soit $f(x,\tau)$ une hyperfonction contenant τ comme paramètres holomorphes. On a alors

(8.1) $\qquad S.S.f(x,\tau) \subset R^n \times C^d \times \{\frac{1}{i}\xi dx\infty;\, \xi \in S^{n-1}\}.$

En particulier, $f(x,\tau)$ contient $\mathrm{Re}\,\tau$, $\mathrm{Im}\,\tau$ comme paramètres analytiques réels.

Démonstration L'assertion étant de caractère local, on peut supposer que $f(x,\tau)$ est défini sur $\Omega \times V$, où $\Omega \subset R^n$, $V \subset C^d$ sont des boules centrés à $0 \in R^n$ resp. à $0 \in C^d$. Soit $U \supset \Omega$ un voisinage complexe convexe (donc de Stein) et soit $U_j = U \cap \{\mathrm{Im}\, z_j \neq 0\}$. Alors $\{U\times V, U_1 \times V, \ldots, U_n \times V\}$ se constituent un recouvrement de Stein, et $f(x,\tau) \in H^n_{\Omega\times V}(U \times V, \mathcal{O}_{n+d})$ est représenté par

$$F(z,\tau) U\times V \wedge U_1 \times V \wedge \cdots \wedge U_n \times V,$$

où $F(z,\tau) \in \mathcal{O}((U \# R^n)\times V)$. Par l'application $B_n\mathcal{O}_d(\Omega\times V) \hookrightarrow B_{n+2d}(\Omega\times V)$, $f(x,\tau)|_{\Omega\times\frac{1}{2}V}$ va à l'hyperfonction définie comme valeurs au bord de $F(z,w+i\zeta) \in \mathcal{O}((U \# R^n)\times \frac{1}{2}V \times \frac{i}{2}V)$, où w resp. ζ sont le complexifié de $\mathrm{Re}\,\tau$ resp. $\mathrm{Im}\,\tau$. En effet, cette assertion s'obtient si on exprime par recouvrement les homomorphismes $\underline{H}^n_{R^n\times C^d}(\mathcal{O}_{n+d}) \xrightarrow{\sim} \underline{H}^{n+2d}_{R^n\times C^d}(G^{-1}\mathcal{O}_n) \longrightarrow \underline{H}^{n+2d}_{R^n\times C^d}(\mathcal{O}_{n+2d})$ donnés dans le Théorème 7.2.6. L'estimation (8.1) est alors claire. C.Q.F.D.

Notons que ce lemme est un cas particulier du théorème fondamental de Sato (voir Théorème 3.5.5).

Ainsi à partir de $f(x,\tau)$ on peut prendre sa restriction par rapport à τ sur une sous variété analytique réelle de C^d pour obtenir une nouvelle hyperfonction de $n+d$ variables réelles. De plus, on peut même considérer l'opération de prendre la valeur au bord de $f(x,\tau)$ par rapport à τ:

<u>Proposition et Définition 8.1.2</u> Soit $f(x,\tau)$ une hyperfonction à paramètres holomorphes τ définie sur $\Omega\times(T+i\Delta 0)$, où $\Omega\subset R^n$ est un ouvert et $T+i\Delta 0$ est un coin infinitésimal dans C^d avec le tranchant $T\subset R^d$. On peut alors lui associer de façon canonique une hyperfonction $f(x,t+i\Delta 0)\in B_{n+d}(\Omega\times T)$. On a

(8.2) $\quad S.S.f(x,t+i\Delta 0)\subset R^{n+d}\times\{\frac{1}{i}(\xi dx+\theta dt)\infty\ ;\ \theta\in\Delta^\circ\}.$

<u>Démonstration</u> Rappelons le Théorème 4.4.4. On a

$$\underline{H}^k_{R^{n+d}}(\underline{H}^n_{R^n\times C^d}(\mathcal{O}_{n+d}))=\underline{H}^{n+k}_{R^{n+d}}(\mathcal{O}_{n+d}).$$

Cela montre que R^{n+d} est pur de codimension d par rapport au faisceau $\underline{H}^n_{R^n\times C^d}(\mathcal{O}_{n+d})$ et qu'il existe un isomorphisme canonique de faisceaux

$$\underline{H}^d_{R^{n+d}}(\underline{H}^n_{R^n\times C^d}(\mathcal{O}_{n+d}))\xrightarrow{\sim}\underline{H}^{n+d}_{R^{n+d}}(\mathcal{O}_{n+d}).$$

En tensorisant par $\omega_{R^{n+d}}=\omega_{R^n\times C^d}\otimes\omega_{R^{n+d}|R^n\times C^d}$ (où $\omega_{R^{n+d}|R^n\times C^d}\overset{\text{déf}}{=}\underline{H}^d_{R^{n+d}}(C_{R^n\times C^d})$) on obtient l'isomorphisme

(8.3) $\quad \underline{H}^d_{R^{n+d}}(B_n\mathcal{O}_d)\otimes\omega_{R^{n+d}|R^n\times C^d}\longrightarrow B_{n+d}.$

Or $f(x,\tau)\in B_n\mathcal{O}_d(\Omega\times(T+i\Delta 0))$ définit via la cohomologie par recouvrement une section du premier membre de (8.3) (c.f. Chapitre V, §4). $f(x,t+i\Delta 0)$ sera alors par définition l'image de cet élément par (8.3).

Vérifions maintenant (8.2). Pour cela on va regarder (8.3) en terme de cohomologie par recouvrement. Sans perdre la généralité on peut supposer que Ω, $V=T+i\Delta 0$ sont convexes. Choisissons un voisinage complexe convexe $U\supset\Omega$. Posons $U_j=U\cap\{\operatorname{Im} z_j\neq 0\}$ comme d'habitude. $U_j\times V$ étant de Stein, $f(x,\tau)$ sera alors représenté par

$$F(z,\tau)\,U\times V\wedge U_1\times V\wedge\cdots\wedge U_n\times V.$$

Il est alors évident que $f(x,t+i\Delta 0)$ est l'hyperfonction définie comme valeurs au bord de $F(z,\tau)$ holomorphe dans la réunion de coins infinitésimals $(U\# R^n)\times(T+i\Delta 0)$. D'où (8.2). C.Q.F.D.

Ce théorème nous donne un moyen très commode de fabriquer une nouvelle hyperfonction à partir de connues. Recapitulons en particulier le cas $d = 1$. Soit $T \subset R$ un intervalle ouvert et soit $V \supset T$ un voisinage complexe. Posons $V_{\pm} = V \cap \{\pm \mathrm{Im}\,\tau > 0\}$. Etant données des hyperfonctions $f_{\pm}(x,\tau) \in B_{n+2}(\Omega \times V_{\pm})$ vérifiant $\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} f_{\pm}(x,\tau) = 0$, on peut alors construire l'hyperfonction

$$f_{+}(x,t+i0) - f_{-}(x,t-i0) \in B(\Omega \times T),$$

où $S.S.f_{\pm}(x,t\pm i0) \subset R^{n+1} \times \{\frac{1}{i}(\xi dx + \theta dt)\infty;\ \pm\theta \leq 0\}$.

Soit $\Omega \subset R^n$ un ouvert et soit V un ouvert de Stein. On a alors

$$H^k(\Omega \times V, B_n \mathcal{O}_d) = H^{n+k}_{\Omega \times V}(C^n \times V, \mathcal{O}_{n+d}) = 0 \quad \text{pour } k \geq 1.$$

(Voir la démonstration du Théorème 5.3.7.) Cela signifie que $\Omega \times V$ est un "ouvert de Stein" par rapport au faisceau $B_n \mathcal{O}_d$. Soit donc $T \subset R^d$ un ouvert et soit $V \supset T$ un voisinage de Stein. On a alors l'expression par recouvrement, par exemple comme suit:

$$(8.4) \qquad H^d_{\Omega \times T}(\Omega \times V, B_n \mathcal{O}_d) = B_n \mathcal{O}_d(\Omega \times (V \# R^d)) / \sum_{j=1}^{d} B_n \mathcal{O}_d(\Omega \times (V \#_j R^d)).$$

Ainsi on obtient en réciproque

Lemme 8.1.3 Toute hyperfonction $f(x,t) \in B_{n+d}(\Omega \times T)$ peut se représenter à la forme

$$\sum_j f_j(x, t+i\Delta_j 0),$$

où $f_j(x,\tau)$ sont des hyperfonctions à paramètres holomorphes τ définies respectivement dans $\Omega \times (T+i\Delta_j 0)$.

Etudions maintenant la flascité de $B_n \mathcal{O}_d$ par rapport aux n premières variables.

Théorème 8.1.4 Soit $V \subset C^d$ un ouvert de Stein. Soit $\pi: R^n \times V \to R^n$ la projection. Alors $\pi_* B_n \mathcal{O}_d$ est un faisceau flasque sur R^n, i.e. la restriction $B_n \mathcal{O}_d(R^n \times V) \to B_n \mathcal{O}_d(\Omega \times V)$ est surjective pour tout $\Omega \subset R^n$ ouvert.

Démonstration Comme dans le Théorème 7.3.4 il suffit de démontrer la surjectivité de

$$(8.5) \qquad \Gamma_{L \times V}(R^n \times V, B_n \mathcal{O}_d) \longrightarrow \Gamma(\Omega \times V, B_n \mathcal{O}_d),$$

où Ω est borné et L est un cube contenant $\bar{\Omega}$. Soit $K = K_1 \times \ldots \times K_n$ un compact du type produit. D'après le Théorème 4.4.4 on a

$$\Gamma_{K\times V}(R^n\times V, B_n\mathcal{O}_d) = H^n_{K\times V}(C^n\times V, \mathcal{O}_{n+d}),$$
$$H^1_{K\times V}(R^n\times V, B_n\mathcal{O}_d) = H^{n+1}_{K\times V}(C^n\times V, \mathcal{O}_{n+d}).$$

Choisissons un voisinage de K du type produit: $U = U_1\times\ldots\times U_n$. V étant un ouvert de Stein, on a alors

$$(8.6)\qquad H^n_{K\times V}(C^n\times V, \mathcal{O}_{n+d}) = \mathcal{O}((U\# K)\times V)/\sum_{j=1}^{n}\mathcal{O}((U\#_j K)\times V),$$

$$(8.7)\qquad H^{n+1}_{K\times V}(C^n\times V, \mathcal{O}_{n+d}) = 0.$$

En procédant comme le Lemme 5.3.8, on conclut (8.7) aussi pour K qui est une réunion finie de compacts du type produit. D'où la surjectivité de (8.5) pour Ω qui est une réunion finie de cubes ouverts. On a aussi pour deux tels compacts la suite exacte

$$(8.8)\qquad 0 \longrightarrow B_n\mathcal{O}_d[(K\cap L)\times V] \longrightarrow B_n\mathcal{O}_d[K\times V]\oplus B_n\mathcal{O}_d[L\times V] \longrightarrow B_n\mathcal{O}_d[(K\cup L)\times V] \longrightarrow 0,$$

où on a abrégé $\Gamma_{K\times V}(R^n\times V, B_n\mathcal{O}_d)$ par $B_n\mathcal{O}_d[K\times V]$ etc.

D'autre part, comme dans le Lemme 7.3.1 on peut constater que (8.6) est un espace de Fréchet. Imitant le procédé du Théorème 7.3.3 à la suite (8.8), on peut étendre cette topologie aux compacts qui sont des réunions finies de cubes fermés. Pour conclure la surjectivité de (8.5) pour Ω général moyennant l'argument du Théorème 7.3.4, il reste donc à constater que

$$H^n_{\{P\}\times V}(C^n\times V, \mathcal{O}_{n+d}) \longrightarrow H^n_{K\times V}(C^n\times V, \mathcal{O}_{n+d})$$

est à image dense, où K est un tel compact et $P\in K$ est un point. Vu la suite récurrente (8.8), il suffit de le démontrer pour le cube K. Dans ce cas on peut utiliser (8.6) et l'assertion découle de la densité de l'image de

$$\mathcal{O}((U\# P)\times V) \longrightarrow \mathcal{O}((U\# K)\times V)$$

ce qui est une conséquence immédiate du Théorème 5.1.7. C.Q.F.D.

Comme une application améliorons l'estimation (8.2).

<u>Théorème 8.1.5</u> On a

$$(8.9)\qquad \operatorname{supp} f(x,t+i\Delta 0) \subset R^{n+d} \cap \overline{\operatorname{supp} f(x,\tau)},$$

(8.10) Il existe un voisinage H de la section $dt = 0$ dans $\Omega\times T\times \frac{1}{i}S^{*n+d-1}_{\infty}$ tel que

$$S.S.f(x,t+i\Delta 0)\cap H \subset \{\operatorname{Im}\tau = 0\}\cap\overline{S.S.f(x,\tau)} \cup R^{n+d}\times\{\tfrac{1}{i}\theta dt\infty\ ;\ \theta\in\Delta^\circ\},$$

où l'adhérence est prise respectivement dans $R^n \times C^d$ et dans $R^n \times C^d \times \frac{1}{i} S^{*n-1}_{\infty}$. $\frown$ désigne l'enveloppe convexe dans S^{n+d-1} par rapport aux grands cercles.

Démonstration (8.9) découle du fait que la correspondence $f(x,\tau) \longmapsto f(x,t+i\Delta 0)$ est compatible avec la restriction. En effet la partie essentielle de cette correspondence a été définie comme un homomorphisme de faisceaux. L'assertion (8.10) est aussi de caractère local. Il suffit donc de montrer ceci: Si $S.S.f(x,\tau) \cap \Omega \times V \times \frac{1}{i} \Gamma^{c} dx\infty = \emptyset$, on a alors pour $\xi \in \operatorname{Int}(\Gamma^{c})$

(8.11) $\qquad S.S.f(x,t+i\Delta 0) \cap \Omega \times T \times \{\frac{1}{i}(\xi dx + \theta dt)\infty\ ; \theta \in \Delta^{c}\} \cap H = \emptyset,$

où Ω, T sont de petites boules et $V = T+i\Delta 0$ est un coin infinitésimal qu'on peut supposer convexe.

Prenons $\tilde{f}(x,\tau) \in \Gamma_{\bar{\Omega}\times V}(R^n \times V, B_n\mathcal{O}_d)$, un prolongement de $f(x,\tau)$ d'après le Théorème 8.1.4. Choisissons un recouvrement de $S^{n-1} \setminus \operatorname{Int}\Gamma^{c}$ par Γ_j^{c}, où Γ_j sont des cônes convexes ouverts vérifiant $\Gamma_j^{c} \not\ni \xi$. Posons

$$\tilde{f}_j(x,\tau) = \tilde{f}(x,\tau) \underset{x}{*} W(x,-\Gamma_j^{c} \cap S^{n-1}), \quad W(x,-\Gamma_j^{c} \cap S^{n-1}) = \int_{-\Gamma_j^{c} \cap S^{n-1}} W(x,\omega)d\omega,$$

où $W(x,\omega)$ est la composante de la décomposition de $\delta(x)$ donnée dans le Théorème 6.2.8. On a évidemment $\bar{\partial}_{\tau_k}\tilde{f}_j(x,\tau) = 0$, d'où $\tilde{f}_j(x,\tau) \in B_n\mathcal{O}_d(R^n \times V)$. $\tilde{f}_j(x,\tau)$ est évidemment représenté par $\tilde{f}_j(z,\tau) \in \mathcal{O}((\mathbb{R}^n + i\Gamma_j 0)\times V)$, la fonction holomorphe calculée par

$$\tilde{f}_j(z,\tau) = \int W(z-x,-\Gamma_j^{c} \cap S^{n-1})\tilde{f}(x,\tau)dx.$$

Il est évident que $\tilde{f}_j(x,t+i\Delta 0)$ s'accorde avec l'hyperfonction $f_j((x,t)+i(\Gamma_j \times \Delta)0)$ définie par cette fonction holomorphe. D'où

$$S.S.\tilde{f}_j(x,t+i\Delta 0) \subset \mathbb{R}^n \times T \times \frac{1}{i}(\Gamma_j^{\circ}dx + \Delta^{\circ}dt)\infty.$$

D'autre part, la différence $g(x,\tau) = f(x,\tau) - \sum \tilde{f}_j(x,\tau)\big|_{\Omega\times T}$ devient analytique réelle en x, τ, car par hypothèse elle ne contient aucun S.S. Ainsi $g(z,\tau)$ est holomorphe en z, τ sur $\Omega \times T + i(\{0\} \times \Delta)0$. D'après le théorème de Kashiwara (Corollaire 2.2.5) il existe (quitte à rétrécir $\Omega \times T$) un cône $\mathcal{E}$ contenant $\{0\} \times \Delta$ tel que $g(z,\tau)$ se prolonge au coin infinitésimal $\Omega \times T + i\mathcal{E}0$. Alors $g(x,t+i\Delta 0)$ s'accordera avec $g((x,t)+i\mathcal{E}0)$, d'où

(8.12) $\qquad S.S.g(x,t+i\Delta 0) \cap \{dt = 0\} = \emptyset.$

En somme on a établi (8.11). C.Q.F.D.

Remarque La nécessité de H dans l'estimation (8.10) provient de (8.12) qui ne peut plus être amélioré en général. Considérons par exemple $1/(kx+\tau)$ $\in B_1\mathcal{O}_1(R\times\{\mathrm{Im}\,\tau>0\})$. qui est certainement analytique réel dans ce domain. On a

$$\mathrm{S.S.}\,\frac{1}{kx+t+i0} = \{(0,-\frac{1}{i}(kdx+dt)\infty)\},$$

ce qui peut être n'importe quel point sur S^1 sauf $\pm\frac{1}{i}dx\infty$. Cependant, il sera évident que si $g(x,\tau)$ se prolonge sur $\Omega\times T$, $g(x,t+i\Delta 0)$ s'accorde avec cette fonction analytique prolongée $g(x,t)$. Toutefois, il est clair qu'on peut remplacer H par un voisinage de la demi-sphère $dt\leq 0$ lorsque $d=1$ et $\Delta = R^+$.

Remarquons aussi le

Lemme 8.1.6 La dérivation et l'intégration se comportent de façon naturelle pour ce passage à la limite: Soit $p(z,\tau;\partial_z,\partial_\tau)$ un opérateur aux dérivées partielles linéaire à coefficients holomorphes définis au voisinage de $\Omega\times T$. On a alors

(8.13) $\quad p(x,\tau;\partial_x,\partial_\tau)f(x,\tau)\Big|_{\tau\mapsto t+i\Delta 0} = p(x,t;\partial_x,\partial_t)f(x,t+i\Delta 0).$

Soit $K\subset\Omega$ un compact et supposons que $f(x,\tau)$ est une fonction analytique réelle sur $\partial K\times(T+i\Delta 0)$ qui se prolonge au voisinage de $\partial K\times T$. On a alors

(8.14) $\quad \int_K f(x,\tau)dx\Big|_{\tau\mapsto t+i\Delta 0} = \int_K f(x,t+i\Delta 0)dx.$

Soit $L\subset T$ un compact et supposons que $f(x,\tau)$ est une fonction analytique réelle sur $\Omega\times(\partial L+i\Delta 0)$ qui se prolonge au voisinage de $\Omega\times\partial L$. On a alors

(8.15) $\quad \int_L f(x,t+i\Delta 0)dt = \int_L f(x,t+i\varepsilon(t))d(t+i\varepsilon(t)),$

où $\varepsilon(t)$ est une application continue et analytique réelle par morceaux vérifiant

$$\begin{cases} t+i\varepsilon(t)\in T+i\Delta 0 & \text{pour } t\in L \text{ général} \\ \varepsilon(t)=0 & \text{pour } t\in\partial L. \end{cases}$$

Si L est du type produit, on peut aussi utiliser le chemin du type produit.

Démonstration (8.13) découle du fait que les homomorphismes de faisceaux qui intervenaient pour définir $f(x,\tau)\mapsto f(x,t+i\Delta 0)$ étaient tous $\mathcal{P}$-homomorphismes (ce qui, bien sûr, peut se vérifier directement via l'expression par recouvrement). Pour vérifier (8.14) on peut supposer comme dans la démonstration du Théorème 8.1.5 que

(8.16) $\qquad f(x,\tau) = F(z,\tau)\big|_{z\mapsto x+i\Gamma 0}$,

où $F(z,\tau) \in \mathcal{O}((\Omega+i\Gamma 0)\times(T+i\Delta 0))$ se prolonge au voisinage de $\partial K\times T$. (Plus précisément il faudrait encore écrire $\tau = w + i\zeta$ comme dans la démonstration du Lemme 8.1.1.) Alors

$$\int_K f(x,\tau)dx = \int_K F(x+i\varepsilon(x),\tau)d(x+i\varepsilon(x)),$$

d'où (8.14). (Rappeler la définition du Chapitre III, §2, 7°.)

Enfin, pour (8.15) supposons encore (8.16) mais cette fois-ci que $F(z,\tau)$ se prolonge au voisinage de $\Omega\times\partial L$. On a alors

$$\int_L f(x,t+i\Delta 0)dt = \Big[\int_L F(z,t+i\varepsilon(t))d(t+i\varepsilon(t))\Big]_{z\mapsto x+i\Gamma 0}.$$

D'autre part, sur chaque morceau analytique réel du chemin $t+i\varepsilon(t)$, $f(x,t+i\varepsilon(t))$ est défini comme l'hyperfonction obtenue par la restriction des variables sur ce morceau. Donc elle est la valeur au bord de la fonction holomorphe $F(z,\tau+i\varepsilon(\tau))$ au sens évident, d'où (8.15). Il en est de même du chemin du type produit. C.Q.F.D.

Remarquons que (8.15) montre en même temps que le théorème de Cauchy ou de Poincaré est vrai pour l'intégrale par rapport aux paramètres holomorphes.

Exercice Etendre (8.15) pour le chemin qui n'est pas analytique réel par morceaux. [Considérer la mesure portée par le chemin comme une hyperfonction.]

Exemple 8.1.7 Construisons l'hyperfonction $1/(x+it)$ de deux variables. Puisque c'est une fonction localement intégrable sur R^2, on peut bien entendu la considérer comme une hyperfonction sans aucune ambiguïté. Mais il serait difficile de calculer $(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial t})\frac{1}{x+it}$ de cette manière. (Notons que la fonction holomorphe $1/(z+i\tau)$ ne sert rien pour donner l'expression valeurs au bord de cette hyperfonction.) Or il est facile de le faire en utilisant l'hyperfonction avec paramètre holomorphe. Considérons en effet

$$\frac{Y(\mp x)}{x+i\tau} \qquad \text{sur} \quad \pm\operatorname{Im}\tau > 0.$$

Il est clair qu'elles sont des hyperfonctions en x, τ dans les domaines indiqués et qu'elles contiennent τ comme paramètre holomorphe. (On a

$$\bar{\partial}_\tau\left(\frac{Y(\mp x)}{x+i\tau}\right) = Y(\mp x)\bar{\partial}_\tau\left(\frac{1}{x+i\tau}\right) = 0$$

pour $\pm \operatorname{Im}\tau > \varepsilon$, $\pm x < \varepsilon$.) D'où on obtient une hyperfonction

$$(8.17) \qquad \frac{Y(-x)}{x+i(t+i0)} + \frac{Y(x)}{x+i(t-i0)}$$

qui s'accorde avec $1/(x+it)$ en dehors de $(x,t) = (0,0)$. On pourra alors vérifier la vraie égalité en calculant par exemple l'intégrale

$$\int_{\substack{|x|\leq\varepsilon \\ |t|\leq\varepsilon}} \frac{1}{x+it}\varphi(x,t)\,dxdt$$

en deux sens, où $\varphi(x,t)$ parcourt les fonctions analytiques réelles. (En effet il suffit de comparer le calcul de représentant standard de $\chi(x,t)\frac{1}{x+it}$, où $\chi(x,t)$ est la fonction caractéristique de $|x| \leq \varepsilon$, $|t| \leq \varepsilon$.)

Cependant (8.17) est plus commode comme définition. Par exemple, d'après le Lemme 8.1.6 on obtient tout de suite

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{Y(-x)}{x+i(t+i0)} + \frac{Y(x)}{x+i(t-i0)}\right)$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\left(\frac{Y(-x)}{x+i\tau}\right)\Big|_{\tau\mapsto t+i0} + \left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\left(\frac{Y(x)}{x+i\tau}\right)\Big|_{\tau\mapsto t-i0}$$
$$= \frac{-\delta(x)}{x+i\tau}\Big|_{\tau\mapsto t+i0} + \frac{\delta(x)}{x+i\tau}\Big|_{\tau\mapsto t-i0} = \frac{-\delta(x)}{i\tau}\Big|_{\tau\mapsto t+i0} + \frac{\delta(x)}{i\tau}\Big|_{\tau\mapsto t-i0}$$
$$= -\frac{\delta(x)}{i}\left(\frac{1}{t+i0} - \frac{1}{t-i0}\right) = 2\pi\,\delta(x)\delta(t).$$

Ainsi on a obtenu la solution élémentaire de l'opérateur de Cauchy-Riemann.

2. Causalité et microanalyticité.

Dans ce paragraphe nous démontrerons le Théorème 3.4.5. Etudions d'abord le principe du prolongement analytique pour le paramètre holomorphe.

Théorème 8.2.1 Soit $f(x,\tau)$ une hyperfonction à paramètres holomorphes τ définie dans un ouvert connexe $\Omega \times V$. Soit $W \subset V$ une partie ouverte. Supposons que $f|_{\Omega \times W} = 0$. On a alors $f \equiv 0$.

Démonstration Il suffit de considérer le cas $d = 1$. Supposons que Ω contient la boule $|x| \leq \delta$ et W contient le disque $|\tau| \leq r$. Posons

$$D_{R,k} = \left(\frac{|x|}{\delta}\right)^{2k} + \left(\frac{|\tau|}{R}\right)^{2k} \leq 1, \quad \text{pour } R \geq r.$$

$D_{R,k}$ est contenu dans $\Omega \times V$ tant que $|\tau| \leq R$ est contenu dans V. Lorsque $k \to +\infty$, $D_{R,k}$ s'approche de $\{|x| \leq \delta\} \times \{|\tau| \leq R\}$. La frontière $S_{R,k}$ de $D_{R,k}$ est une hypersurface analytique réelle. D'après le Lemme 8.1.1, les éléments conormaux de $S_{R,k}$ ne sont pas contenus dans $S.S.f(x,\tau)$ sauf sur $S_{R,k} \cap \{|\tau| = 0\}$ qui est toujours contenu dans $\Omega \times W$. Ainsi on peut appliquer le Théorème 3.4.4 pour chaque $S_{R,k}$, et par la récurrence pour la famille continue on conclut que $f(x,\tau) = 0$ dans $\{|x| < \delta\} \times \{|\tau| < R\}$ pour tout R tel que $\{|\tau| \leq R\} \subset V$. En répétant ce procédé avec des boules à divers centres et à divers rayons, on conclut finalement $f(x,\tau) \equiv 0$. C.Q.F.D.

Remarquons que ce théorème est un cas particulier du théorème de Holmgren sur la propagation des zéros de la solution d'une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients analytiques par rapport à une famille d'hypersurfaces non caractéristiques.

Ce théorème peut se généraliser à la microfonction à paramètres holompr-phes τ: On dira qu'une microfonction (représentée par l'hyperfonction) $f(x,\tau)$ définie dans $(\Omega \times V) \times \frac{1}{i}\Delta(dx, d\tau)\infty$ contient τ comme paramètres holomprphes si $\bar{\partial}_{\tau_j} f(x,\tau) = 0$ (i.e. si le représentant hyperfonction $\bar{\partial}_{\tau_j} f(x,\tau)$ devient micro-analytique dans cet ouvert).

Théorème 8.2.2 Soit $f(x,\tau)$ une microfonction sur un ouvert connexe $(\Omega \times V) \times \frac{1}{i}\Delta(dx, d\tau)\infty$ contenant τ comme paramètres holomorphes. Soit $W \subset V$

une partie ouverte. Supposons que

$$f(x,\tau)\Big|_{(\Omega\times W)\times\frac{1}{i}\Delta(dx,dt)\infty} = 0.$$

On a alors $f(x,\tau) \equiv 0$.

Démonstration Par le même argument que le théorème précédent, on peut supposer que $d = 1$ et que $\Omega = \{|x|<\delta\}$, $V = \{|\mathrm{Re}\,\tau|<\delta\}+i\{|\mathrm{Im}\,\tau|<R\}$, $W = \{|\mathrm{Re}\,\tau|<\delta\}+i\{|\mathrm{Im}\,\tau|<r\}$ avec $r < R$. Soit $f(x,\tau)\in B(\Omega\times V)$ un représentant de la microfonction donnée. Alors l'hypothèse que τ soit un paramètre holomorphe signifie que $g(x,\tau) = \bar\partial_\tau f(x,\tau)$ est microanalytique dans $\Omega\times V\times\frac{1}{i}\Delta$ $(dx,dt)\infty$. Soit $\tilde g(x,\tau)$ une hyperfonction sur $\Omega\times C^d$ telle que $S.S.\tilde g\subset\overline{S.S.g}$ et que $h = g-\tilde g\in A(\Omega\times V)$. L'existence d'un tel élément est assuré par la flascité du faisceau C. Soit $\chi(\tau)$ la fonction caractéristique d'un cube contenant $\bar V$ dans son intérieur. Soit $V'\subset\subset V$ et soit $\psi(\tau)$ la fonction caractéristique de V'. En utilisant la solution élémentaire $1/\pi\tau$ de $\bar\partial_\tau$, on a alors

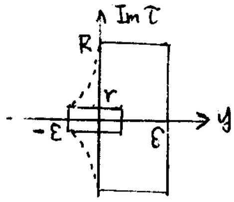
$$\bar\partial_\tau\Big(f(x,\tau)-\{\chi(\tau)g(x,\tau)+\psi(\tau)h(x,\tau)\}\underset{\tau}{*}\frac{1}{\pi\tau}\Big)\Big|_{\Omega\times V'} = 0.$$

Remarquons que les termes ajoutés sont toujours micro-analytiques dans $\Omega\times V'$ $\times\frac{1}{i}\Delta(dx,dt)\infty$. (Rappeler la règle de calcul de S.S. donnée dans le Chapitre III.) Ainsi sans perdre la généralité on peut supposer que $\bar\partial_\tau f(x,\tau) = 0$ au sens d'hyperfonction. D'après le Lemme 8.1.1 il suffit donc de considérer au voisinage Δ de $\Gamma\times\{0\}$, où $\Gamma\subset S^{n-1}$.

Soit maintenant $\tilde f(x,\tau)\in B(R^n\times V)$ un prolongement d'après le Théorème 8.1.4 de $f(x,\tau)$ à support dans $\bar\Omega\times V$. Prenons la décomposition

$$f(x,\tau) = \sum_j \tilde f(x,\tau)\underset{x}{*}W(x,-\Gamma_j)\Big|_{\Omega\times V},$$

où $\{\Gamma_j\}$ est une décomposition de la sphère S^{n-1}. Chaque terme est une hyperfonction à paramètre holomorphe τ. Soit $\Gamma'\subset\subset\Gamma$ une partie ouverte. Montrons que la micro-analyticité de $f(x,\tau)$ dans $\Omega\times W\times\frac{1}{i}\Gamma\,dx\infty$ implique celle dans $\Omega\times V\times\frac{1}{i}\Gamma'dx\infty$. Γ' étant arbitraire, cela terminera la démonstration. Pour Γ_j vérifiant $\Gamma_j\cap\Gamma' = \emptyset$, le terme correspondant est déjà micro-analytique en $\Omega\times V\times\frac{1}{i}\Gamma'dx\infty$. Pour Γ_j vérifiant $\Gamma_j\subset\subset\Gamma$, l'hypothèse signifiera que le terme correspondant devient analytique réel dans $\Omega\times W$,



i.e. que la fonction holomorphe dans $(\Omega+i\Gamma_j 0)\times V$:

$$\int W(z-x,-\Gamma_j)\tilde{f}(x,\tau)dx$$

se prolonge à $\Omega\times W$. D'où, quitte à rétrécir Ω, V et W, il suffit de démontrer l'assertion suivante: Soit $F(z,\tau)$ une fonction holomorphe définie dans $(\Omega+i(\Gamma\cap\{|y|<\delta\}))\times V$. Supposons qu'elle se prolonge à $(\Omega+i\{|y|<\varepsilon\})\times W$. Alors elle se prolonge à $\Omega\times V$.

Cette assertion découle de la version locale du théorème du tube de Bochner. En effet, c'est un problème de prolongement de $F(z,\tau)$ à partir de l'ensemble

(8.18) $\quad \Omega\times\{|\mathrm{Re}\,\tau|<\delta\}+i(\Gamma\cap\{|y|<\delta\})\times\{|\mathrm{Im}\,\tau|<R\}\cup\{|y|<\varepsilon\}\times\{|\mathrm{Im}\,\tau|<r\}$.

Si la partie réelle $\Omega\times\{|\mathrm{Re}\,\tau|<\delta\}$ est remplacée par R^{n+1}, on aura le prolongement de $F(z,\tau)$ d'après Bochner (~~Théorème~~ Corollaire 2.2.4) à l'enveloppe convexe qui contiendra la partie de la frontière $R^{n+1}+i\{y=0\}\times\{|\mathrm{Im}\,\tau|<R\}$ dans son intérieur. La démonstration du Corollaire 2.2.4 utilisant le Théorème 2.2.3 montre que dans notre cas la partie correspondante de la frontière de (8.18) $\Omega\times\{|\mathrm{Re}\,\tau|<\delta\}+i\{y=0\}\times\{|\mathrm{Im}\,\tau|<R\}$ sera toujours contenue dans l'ouvert sur lequel $F(z,\tau)$ se prolonge. D'où $F(z,\tau)$ se prolonge à $\Omega\times V$. C.Q.F.D.

Le Théorème 8.2.2 implique en particulier la propagation des singularités de la solution de $\bar{\partial}_\tau f(x,\tau)=0$ le long de la fibre $x=\mathrm{Cte}$:

<u>Corollaire 8.2.3</u> Soit $f(x,\tau)$ une hyperfonction dans $\Omega\times V$ contenant τ comme paramètres holomorphes. Soit $W\subset V$ une partie ouverte. Supposons que $f(x,\tau)$ est analytique réelle dans $\Omega\times W$. Alors elle l'est dans $\Omega\times V$.

Compte tenu du principe du prolongement analytique ordinaire, le Théorème 8.2.1 sera donc contenu dans le Théorème 8.2.2.

<u>Démonstration du Théorème 3.4.5</u> Il s'agit de démontrer, étant donné un germe d'hyperfonction $f(x)$ en 0 vérifiant $\mathrm{supp}\, f\subset\{x_1\geq 0\}$, que la micro-analyticité de f en $(0,\frac{1}{i}\xi dx\infty)$ avec $\xi'\neq 0$ implique celle en $(0,\frac{1}{i}(\pm dx_1+\lambda\xi' dx')\infty)$ pour tout $\lambda>0$. Ici et ci-dessous on désigne comme d'habitude $x'=(x_2,\dots,x_n)$, $\xi'=(\xi_2,\dots,\xi_n)$. La démonstration se fera en plusieurs étapes.

1ère étape Localisation en ξ'. Montrons d'abord qu'on peut supposer sans perdre la généralité que $(0,\frac{1}{i}\xi dx\infty)\notin S.S.f$ pour tout ξ avec la raison $\xi_1/|\xi'|$ donnée. (On pourra le dire pour simplifier que le S.S. ne contient pas le parallèle passant à ξ.) Soit en effet $\tilde{f}$ une hyperfonction coupée le support de f au voisinage de l'origine. Soit $W(x',\omega')$ la composante de la décomposition curviligne de $\delta(x')$. Soit Δ un petit voisinage de ξ' donné dans S^{n-2}. On a alors

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f} \underset{x'}{*} W(x',-\Delta) + \tilde{f} \underset{x'}{*} W(x',S^{n-2}\setminus(-\Delta)).$$

Rappelons que $W(x',-\Delta) = \int_{(-\Delta)} W(x',\omega')d\omega'$, d'où

$$S.S.W(x',-\Delta) = \{(0,\tfrac{1}{i}\xi'dx'\infty);\ \xi'\in\bar{\Delta}\}.$$

Il est alors évident que le S.S. du second terme du second membre ne contient pas le méridien passant à ξ. D'autre part, pour Δ suffisamment petit le premier terme est par hypothèse une hyperfonction à S.S. ne contenant le parallèle passant à ξ, et à support toujours dans $\{x_1\geq 0\}$. Ainsi il suffit de démontrer le théorème pour cette hyperfonction.

Exercice Effectuer le calcul du S.S. indiqué ci-dessus selon les règles du Chapitre III. (Imiter le calcul dans la démonstration du Théorème 3.4.4.)

2e étape réduction à l'équateur. Montrons ensuite qu'on peut supposer sans perdre la généralité que le parallèle trouvé ci-dessus est l'équateur (i.e. $\xi_1 = 0$). En appliquant la transformation de Holmgren à f (voir la démonstration du Théorème 3.4.4), on peut supposer sans perdre la généralité que $\operatorname{supp} f \cap \{x_1=0\} \subset \{0\}$. Soit alors $\tilde{f}$ une hyperfonction coupée le support de f au voisinage de 0. On a toujours

$$\operatorname{supp} \tilde{f} \cap \{x_1 = 0\} \subset \{0\}. \tag{8.19}$$

Soit ensuite

$$W_0(x,\xi) = \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\,\frac{1}{(x\xi+i0)^n}$$

la composante de la décomposition de $\delta(x)$ en ondes planes. Différemment de l'Exemple 3.3.3, on la considérera d'abord comme une hyperfonction de $(x,\xi) \in R^n\times(R^n\setminus\{0\})$. On a alors

(8.20) $\quad S.S.W_0(x,\xi) = \{(x,\xi,-\frac{1}{i}(\xi dx+xd\xi)\infty);\ x\xi = 0\}.$

Considérons

$$G(t,z',\zeta_1,\xi') = \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\int\frac{\tilde{f}(y)dy}{((-t^2-y_1)\zeta_1+(z'-y')\xi'+i0)^n}\ .$$

Le support de $\tilde{f}$ étant dans $\{x_1 \geq 0\}$, il est évident que $G(t,z',\zeta_1,\xi')$ est une fonction holomorphe bien définie dans $\operatorname{Im}\zeta_1 < 0$, $\operatorname{Im} z'\xi' > 0$. On a évidemment

(8.21) $\quad G(-t,z',\zeta_1,\xi') = G(t,z',\zeta_1,\xi').$

En passant à la valeur au bord, on obtient ainsi une hyperfonction $G(t,x',\zeta_1,\xi') = G(t,x'+i\xi'0,\zeta_1,\xi')$ sur $\operatorname{Im}\zeta_1 < 0$, $\xi' \neq 0$ qui est paire en t et qui contient ζ_1 comme paramètre holomorphe. D'autre part, on a évidemment

(8.22) $\quad G(t,x',\xi_1-i0,\xi') = (W \underset{x}{*} \tilde{f})(-t^2,x',\xi).$

(Notons que pour $\xi' \neq 0$, $W \underset{x}{*} \tilde{f}$ contient x_1 comme paramètre analytique réel, donc cette substitution est légitime.) Calculons S.S.G. L'hypothèse $(0,\xi) \notin S.S.f$ implique, comme l'argument dans la démonstration du Théorème 6.2.7, que $G(t,z',\zeta_1,\xi')$ se prolonge au voisinage des points $(0,0,\zeta_1,\xi')$ avec $\operatorname{Re}\zeta_1 = \xi_1$. D'où $G(t,x',\zeta_1,\xi')$ devient analytique réelle au voisinage de ces points. Grâce au Corollaire 8.2.3, l'analyticité se propage en ζ_1. Compte tenu aussi de l'homogénéité, $G(t,x',\zeta_1,\xi')$ devient donc analytique réelle au voisinage de $(0,0,\zeta_1,\xi')$ pour tout ζ_1, ξ' tel que $\operatorname{Im}\zeta_1 < 0$, $\xi' \neq 0$. Passons encore à la valeur au bord en ζ_1. D'après le Théorème 8.1.5, $G(t,x',\zeta_1-i0,\xi')$ vérifie donc l'estimation suivante:

$$S.S.G(t,x',\xi_1-i0,\xi') \cap \{d\xi_1 = 0\} = \emptyset.$$

Restreignons maintenant ξ sur $\{|\xi| = 1\} \cap \{\xi' \neq 0\}$. C'est possible puisque G contient ξ évidemment comme paramètres analytiques réels. Ainsi on obtient une hyperfonction $G(t,x',\omega)$ vérifiant au voisinage de l'équateur $\omega_1 = 0$

$$S.S.G(t,x',\omega) \cap \{d\omega_1 = 0\} = \emptyset.$$

(En effet ceci se vérifie comme suit: Considérons par exemple au voisinage de $\omega_n = \pm 1$. On peut alors utiliser $\xi_1,\dots\xi_{n-1}$ comme les coordonnées sur la sphère. On a $\xi_n = \pm\sqrt{1-\xi_1^2-\dots-\xi_{n-1}^2}$, d'où

$$d\xi_1 + \alpha' d\xi' = \left(1 \pm \frac{-2\alpha_n \xi_1}{\sqrt{1-\xi_1^2-\ldots-\xi_{n-1}^2}}\right) d\xi_1 + \ldots.$$

Lorsque ξ_1 est assez petit, le coefficient de $d\xi_1$ ne donc s'annule pas.)

Prenons alors l'intégrale en ω', i.e. par rapport aux variables sur l'équateur. En vertu du Théorème 3.2.8, le résultat devient une fonction analytique réelle de t, x', ω_1 au voisinage de $\omega_1 = 0$. Executions encore l'intégrale en ω_1 sur un petit intervalle $|\omega_1| \leq \varepsilon$ contenu dans ce voisinage. On conclut ainsi que

$$\int_{|\omega_1| \leq \varepsilon} G(t,x',\omega)\,d\omega$$

est une fonction analytique réelle en t, x', et bien sûr paire en t. Vu (8.22), ceci signifie que

$$(8.23) \quad \int_{|\omega_1| \leq \varepsilon} (W \underset{x}{*} \tilde{f})(x_1,x',\omega)\,d\omega$$

est analytique réelle pour $x_1 < 0$ et même se prolonge comme une fonction analytique réelle jusqu'au voisinage de $x_1 = 0$. D'après le Théorème 3.4.4, ce prolongement doit s'accorder avec l'hyperfonction (8.23) pour $x_1 \geq 0$, car celle-ci contient toujours x_1 comme paramètre analytique réel. Ainsi on conclut que, au voisinage de l'origine

$$\tilde{f}(x) \equiv \int_{|\omega_1| \geq \varepsilon} (W \underset{x}{*} \tilde{f})(x,\omega)\,d\omega \mod A,$$

ce qui signifie évidemment que les directions dans le voisinage $|\omega_1| \leq \varepsilon$ de l'équateur ne sont pas contenues dans la fibre de S.S.f au-dessus de 0.

<u>3^e étape</u> <u>Le cas où S.S.f ne contient pas l'équateur.</u> Dans ce cas, d'après le Corollaire 3.2.2, au voisinage de 0, f admet une expression de la forme

$$f(x) = F_+(x+i\Gamma 0) - F_-(x-i\Gamma 0),$$

où Γ est un cône contenant le vecteur $(1,0,\ldots,0)$, et $F_\pm(z)$ se recollent à une fonction holomorphe $F(z)$ sur $x_1 < 0$. Considérons alors la fonction $G(w,z') = F(w^2,z')$, où $w = u+iv$. Elle est certainement holomorphe, disons, sur $\{|u|<\delta\} \times \{|x'|<a\} + i\{0<v<\delta,\ y'=0\}$. D'après le Corollaire 2.2.5, G se prolonge donc à un coin infinitésimal $\{|u|<\delta'\} \times \{|x'|<a'\} + i\{c|y'|<v<\delta'\}$. Regardons l'image de cet ensemble en coordonnées z. On a $z_1 = w^2$, d'où

$$u = \operatorname{sgn} y_1 \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{x_1^2+y_1^2}+x_1)}, \qquad v = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{x_1^2+y_1^2}-x_1)}.$$

Compte tenu de l'inégalité

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2} - x_1 > \frac{1}{2x_1}|y_1| \quad \text{pour} \quad x_1 > 0,$$

l'image contiendra l'ensemble suivant

$$\{z=x+iy;\ |x_1| < \delta'',\ |x'| < a'',\ 2cx_1|y'| < |y_1| < \delta''\}.$$

Ainsi $F_\pm(z)$ s'y prolongeant; il est donc clair que la fibre en 0 de S.S.f ne contient que les deux directions $\pm\frac{1}{i}dx_1\infty$.

Ainsi le théorème est démontré.