A. Kaneko

Exercices

Cours de l'institut Fourier, tome 13 (1977-1978), p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1977-1978__13__A7_0>

EXERCICES

1. Soit $U = \{\min\{|z_1|, |z_2|\} < 1\} \subset \mathbb{C}^n$. Calculer $H^k(U,\mathcal{O})$.

2. Soit $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$. $\mathbb{T}$ est une variété analytique complexe de dimension 1. Soit $\mathcal{O}$ le faisceau de fonctions holomorphes sur $\mathbb{T}$. Calculer $H^k(\mathbb{T},\mathcal{O})$ en deux manières, a) par le recouvrement de Stein, b) par la résolution de Dolbeault.

3. Considérons l'application $j: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $t \mapsto (t,0)$. Calculer $R^k j_* A_{\mathbb{R}}$ resp. $R^k j_* B_{\mathbb{R}}$. Les réaliser de façon canonique comme sous faisceaux de $B_{\mathbb{R}^2}$. [Indication: Utiliser la suite $0 \leftarrow j_*\mathcal{O}_1 \leftarrow \mathcal{O}_2 \xleftarrow{z_2} \mathcal{O}_2 \leftarrow 0$.]

4. Considérons l'application analytique réelle $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $t \mapsto (t^2,t^3)$. Désignons par S l'image de φ, qui est une courbe cubique.

a) Calculer $R^k\varphi_* B_{\mathbb{R}}$ et les réaliser comme sous faisceaux de $B_{\mathbb{R}^2}$.

b) Chercher la condition pour que $u \in B[\{0\}]$ soit dans $\varphi_* B_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ par l'inclusion ci-dessus.

5. Soit S la courbe donnée dans 4. Soient p_1 resp. p_2 la projection naturelle $(x_1,x_2) \mapsto x_1$ resp. $(x_1,x_2) \mapsto x_2$. Désignons par $\int_{p_1^{-1}}$ resp. $\int_{p_2^{-1}}$ l'intégrale par rapport à la variable x_2 resp. x_1. Déterminer l'image de $\int_{p_1^{-1}}: \Gamma_S(B_{\mathbb{R}^2}) \to B_{\mathbb{R}_{x_1}}$ resp. $\int_{p_2^{-1}}: \Gamma_S(B_{\mathbb{R}^2}) \to B_{\mathbb{R}_{x_2}}$. Y-a-t-il parmi eux un homomorphisme réciproque à gauche de φ_* dans 4?

6. Calculons $H^1_{\{0\}}(\mathbb{C},\mathcal{O})$ par les deux manières, soit par le recouvrement de Stein relatif $U = \mathbb{C}$, $U_1 = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, soit par la résolution flasque $0 \to \mathcal{O} \to B \xrightarrow{\bar\partial} B^{(0,1)} \to 0$.

a) Soit $u \in H^1_{\{0\}}(\mathbb{C},\mathcal{O})$. Supposons qu'il est représenté soit par $F(z)U\wedge U_1$ (où $F(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$), soit par $u(x,y)d\bar z$ (où $u(x,y) \in \Gamma_{\{0\}}(\mathbb{R}^2,B_{x,y})$). Donner la correspondence entre eux.

b) Considérons maintenant $u \in H^1_{\{0\}}(\mathbb{C},\mathcal{O})$ comme un élément $u(x)$ de $\Gamma_{\{0\}}(\mathbb{R},B_x)$. Exprimer cet élément en terme de $F(z)U\wedge U_1$ resp. $u(x,y)d\bar z$.

c) Considérons les trois formes linéaires $H^1_{\{0\}}(\mathbb{C};\mathcal{O}) \to \mathbb{C}$ induites par

i) $F(z)U\wedge U_1 \longmapsto \mathrm{Rés}_0 F(z)$,

ii) $u(x,y) \longmapsto \int_{\mathbb{R}^2} u(x,y)\,dxdy$,

iii) $u(x) \longmapsto \int_{\mathbb{R}} u(x)\,dx$.

Chercher la relation entre eux.

7. Soit $S^1 = \{|z| = 1\}$ le cercle unité dans $\mathbb{C}$. Considérons $\mathbb{C}$ comme un voisinage de Stein de la variété analytique réelle S^1. On a alors $B(S^1) = \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus S^1)/\mathcal{O}(\mathbb{C})$. Soit $F_0(z) \in \mathcal{O}(|z| < 1)$ et $F_\infty(z) \in \mathcal{O}(|z| > 1)$ un couple de représentant d'un élément $f(\theta) \in B(S^1)$.

a) Chercher un représentant pour l'hyperfonction $e^{in\theta}$ sur S^1.

b) Exprimer le coefficient de Fourier

$$a_n \underset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2\pi}\int f(\theta)e^{-in\theta}d\theta$$

en terme de celui de $F_0(z)$ ou de $F_\infty(z)$.

c) Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que la somme formelle $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\theta}$ représente une hyperfonction (une distribution, une fonction C^∞ resp. une fonction analytique réelle)?

d) Donner le développement en série de Fourier de $\delta(\theta)$.

e) Mettre la topologie dans $B(S^1)$ resp. $A(S^1)$ de façon plausible et étudier la dualité. Exprimer le aussi en terme de coefficients de Fourier.

f) Calculer l'indice de l'opérateur $\frac{d}{d\theta}: B(S^1) \longrightarrow B(S^1)$ (et $\frac{d}{d\theta}: D'(S^1) \longrightarrow D'(S^1)$, $\frac{d}{d\theta}: A(S^1) \longrightarrow A(S^1)$). [N.B. l'indice de $\frac{d}{d\theta} = \dim \mathrm{Ker}\frac{d}{d\theta} - \dim \mathrm{Coker}\frac{d}{d\theta}$.]

g) Chercher la condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur différentiel ordinaire $p(\frac{d}{dx})$ à coefficients constants admette une solution élémentaire 2π-périodique.

8. Considérons l'équation des ondes d'une variable spaciale $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2})\, u(t,x) = 0$.

a) Trouver la forme générale de la solution hyperfonction de cette équation

b) Vérifier le théorème fondamental de Sato (Théorème 3.5.5) pour cette équation en utilisant la forme explicite de solution.

c) Trouver la solution élémentaire du problème de Cauchy, i.e. la solution $E_0(t,x)$ de

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)E_0(t,x) = 0 \\ E_0(0,x) = 0, \quad \frac{\partial E_0}{\partial t}(0,x) = \delta(x). \end{cases}$$

d) Posons $E(t,x) = Y(t)E_0(t,x)$. Déterminer supp E, supp sing E, S.S.E. Calculer $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)E(t,x)$.

e) Montrer que $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}: B(R^2) \to B(R^2)$ est surjectif. [Indication: Utiliser aussi $Y(-t)E_0(t,x)$.]

9. (Méthode des ondes planes) a) Soit $\omega \in S^{n-1}$. Soit $f(t,r)$ une hyperfonction de deux variables. Montrer

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x\right)f(t,x\omega) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)f(t,r)\Big|_{r=x\omega}.$$

b) Calculer la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x\right)E_0(t,x,\omega) = 0, \\ E_0(0,x,\omega) = 0, \quad \frac{\partial E_0}{\partial t}(0,x,\omega) = \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\frac{1}{(x\omega+i0)^n}. \end{cases}$$

c) Calculer $E_0(t,x) = \int_{S^{n-1}} E_0(t,x,\omega)d\omega$, $E(t,x) = Y(t)E_0(t,x)$.

d) Montrer

$$\text{supp } E(t,x) \subset \{t \geq |x|\}, \quad \text{supp sing } E(t,x) = \{t = |x|\},$$

$$\text{S.S.}E(t,x) = \{0\} \times \tfrac{1}{i}S^{*n}_{\infty} \cup \bigcup_{\omega \in S^{n-1}} \bigcup_{t>0} \{(t, t\omega; \tfrac{\pm 1}{i}(dt - \omega dx)\infty)\}.$$

10. Soit $p(x,\partial)$ un opérateur à partie principale réelle $p^0(x,\partial)$. Soit $(x^0,\xi^0) \in R^n \times S^{n-1}$ un point caractéristique de p, i.e. un point vérifiant $p^0(x^0,\xi^0) = 0$. La courbe intégrale du système d'équations différentielles ordinaires sur $R^n \times S^{n-1}$:

$$\frac{dx}{dt} = p^0_{\xi}(x,\xi), \quad \frac{d\xi}{dt} = -p^0_x(x,\xi)$$

vérifiant $x(0) = x^0$, $\xi(0) = \xi^0$ est dite la bande bicaractéristique de p passant à (x^0,ξ^0).

a) Calculer la bande bicaractéristique de $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x$.

b) Montrer pour la solution u de $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x\right)u(t,x) = 0$ l'assertion suivante:
<u>Propagation des singularités le long de la bande bicaractéristique</u>: Si S.S.u

contient un point caractéristique de $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x$, il contient alors toute la bande bicaractéristique passant à ce point. [Indication: Démontrer la contraposée : Supposons que $S.S.u \not\ni (t^0, x^0; \theta^0, \xi^0)$. Soit $u = v + w$ une décomposition telle que v soit analytique réel au voisinage de (t^0, x^0), et que $S.S.w \cap R^{n+1} \times \{(\theta^0, \xi^0)\} = \emptyset$. Alors

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x\right) v(t,x) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x\right) w(t,x)$$

est micro-analytique en direction (θ^0, ξ^0), et on a

$$\begin{aligned} Y(t-t^0)v(t,x) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x\right)\{Y(t-t^0)v(t,x)\} * E(t,x) \\ &= v(0,x)\delta'(t) * E(t,x) - \left\{Y(t-t^0)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x\right)w(t,x)\right\} * E(t,x). \end{aligned}$$

Estimer le S.S. du second membre.]

11. Considérons dans $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ l'opérateur de H.Lewy

$$P^{\pm} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \pm iz \frac{\partial}{\partial t},$$

où $z = x + iy$ et (x,y,t) est les coordonnées standard de R^3. Posons

$$E^{\pm}(z,w,t,s) = -\frac{1}{2\pi^2 i} \frac{1}{z-w} \frac{1}{t-s \pm i(|z|^2 + |w|^2 - 2z\bar{w}) \pm i0}.$$

a) Vérifier que $E^{\pm}(z,w,t,s)$ sont bien définies comme des hyperfonctions sur R^6 et déterminer supp, supp sing, et S.S.

b) Montrer

$$P^{\mp}_{z,t} E^{\pm}(z,w,t,s) = \delta(z-w)\left(-\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{t-s \pm i0}\right), \quad (\text{où } \delta(z) \overset{\text{déf}}{=} \delta(x)\delta(y)).$$

En déduire l'assertion suivante: Soit $f(z,t)$ un germe d'hyperfonction vérifiant $S.S.f \subset \mathrm{Int}(D^{\mp})$, où

$$D^{\pm} = R^3 \times \left\{\tfrac{1}{i}(\xi dx + \eta dy + \theta dt)\infty \,; \pm\theta \geq 0\right\}.$$

Alors $P^{\pm}u = f$ est localement résoluble dans B.

c) Montrer

$$\int E^{\pm}(z,w,t,s) P^{\pm}_{w,s} \delta(w-\zeta)\delta(s-r)\, du\, dv\, ds = \delta(z-\zeta)\left(-\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{t-r \pm i0}\right),$$

(où $w = u+iv$). En déduire l'assertion suivante: Soit $P^{\pm}u = 0$. On a alors $S.S.u \subset D^{\pm}$. Préciser l'estimation à l'aide du théorème fondamental de Sato.

d) Montrer

$$P^{\pm}_{z,t} E^{\pm}(z,w,t,s) = \delta(z-w)\left(-\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{t-s \pm i0}\right) + K_{\pm}(z,w,t,s)$$

où

$$K_{\pm}(z,w,t,s) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{z-w}\,\frac{z}{(t-s+i(|z|^2+|w|^2-2z\bar{w})+i0)^2}.$$

En déduire pour $u(z,t)$ quelconque l'égalité

$$\int K_{\pm}(z,w,t,s)P^{\pm}_{w,s}u(w,s)\,du\,dv\,ds = 0$$

en tant qu'une microfonction sur $D^{\mp}$.

e) Démontrer que $P^{\pm}u = f$ n'est pas nécessairement localement résoluble dans B.

12. Considérons le laplacien Δ dans R^n. On suppose connue la solution élémentaire $E(x)$ $(= -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|}$ pour $n = 3)$. Elle est analytique réelle en dehors de 0.

a) Soit $\Omega \subset R^n$ un ouvert borné. Montrer que $\Delta : B(\Omega) \to B(\Omega)$ est surjectif. Montrer aussi que $\Delta: A(\Omega) \to A(\Omega)$, $\Delta: D'(\Omega) \to D'(\Omega)$ sont surjectifs. [Utiliser un prolongement $\tilde{f} \in B[\bar{\Omega}]$ de $f \in B(\Omega)$ donnée pour convoler avec E.]

b) Démontrer la même assertion pour Ω non nécessairement borné en remarquant que E est une hyperfonction de Fourier. [Utiliser un prolongement en hyperfonction de Fourier rapidement décroissante de $f \in B(\Omega)$ donnée.]

Remarque 1. Un élément non trivial de $\mathcal{O}(\{|z_1|<1, |z_2|<1\})/\mathcal{O}(\{|z_1|<1\}) + \mathcal{O}(\{|z_2|<1\})$ s'obtiendra par un changement de coordonnées à partir de $1/z_1z_2$ vu que $S.S.\frac{1}{x_1+i0}\,\frac{1}{x_2+i0} \supsetneqq \{(0,-\frac{1}{i}dx_1\infty), (0,-\frac{1}{i}dx_2\infty)\}$.

2. La fonction méromorphe

$$F(z,a) = \frac{1}{\pi}\sum_{\omega\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{z-\omega} - \frac{1}{z-a-\omega} + \frac{a}{\omega^2}\right)$$

sera une hyperfonction sur T à paramètre analytique réel $a \in \mathbb{C}$ vérifiant $\bar{\partial}F(z,a) = \delta(z)-\delta(z-a)$.

7. Un représentant de $f(\zeta)$ sur S^1 sera calculé par la formule de Cauchy: $\frac{1}{2\pi i}\int_{S^1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$.