YVES COLIN DE VERDIÈRE

Chapitre VI Quantification

Cours de l'institut Fourier, tome 18 (1982-1983), p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1982-1983__18__A6_0>

D.E.A. - Géométrie symplectique
1982-1983

CHAPITRE VI

QUANTIFICATION

Bibliographie

LANDAU-LIFSCHITZ, Mécanique quantique.

BERGER-GAUDUCHON-MAZET, Le spectre d'une variété riemannienne compacte.

D. HEJHAL, La formule des traces de Selberg. I. (Lecture notes in Math.).

D. HEJHAL, The Selberg Trace Formula and the Riemann zêta function. Duke Math. J. 43 (1976) pp. 441-482.

DUISTERMAAT-GUILLEMIN, Spectrum of positiv elliptic operators and periodic geodesics. Inventiones Math. 29 (1975) pp. 39-79.

1. - PHILOSOPHIE DE LA QUANTIFICATION.

Dans la mécanique hamiltonienne, un état est un point de l'espace des phases, qui est une variété symplectique (X, ω) . Un hamiltonien est une fonction $H \in C^{\infty}(X; \mathbb{R})$ et l'évolution du système est déterminée par le flot φ_t du champ de vecteur ξ_H , gradient symplectique de H . L'ensemble des hamiltoniens est muni d'une structure d'algèbre de Lie, grâce au crochet de Poisson.

En mécanique quantique, un état est un vecteur de norme 1 d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{H} = L^2(Z, dx)$ et φ est un état, $|\varphi|^2 dx$ est la loi de probabilité de l'état considéré. Un hamiltonien H est un opérateur autoadjoint (non borné en général) de $\mathcal{H}$. L'évolution du système est donné par l'équation de Schrödinger, $\frac{d\varphi}{dt} + \frac{i}{\hbar} H\varphi = 0$, soit au sens du calcul fonctionnel des opérateurs autoadjoints, $\varphi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} tH} \varphi(0)$; $\hbar$ la constante de Planck est une constante physique universelle qui a la dimension ET^{-1} (E = énergie, T=temps), de façon que l'argument de l'exponentielle soit sans dimension. A l'échelle macroscopique, $\hbar$ est très petite : la mécanique quantique est opérationnelle pour les échelles petites, i.e. microscopiques. On a une notion de crochet sur les opérateurs : $[A, B] = A \circ B - B \circ A$.

On appelle <u>quantification</u> toute correspondance fonctorielle du type :

$(X, \omega) \rightsquigarrow \mathcal{H}$

variétés symplectique espace de Hilbert

$H \in C^{\infty}(X; \mathbb{R}) \rightsquigarrow \hat{H}$ opérateur autoadjoint sur $\mathcal{H}$

qui respecte les structures d'algèbre de Lie :

$[\hat{H}, \hat{K}] = i\hbar\{H, K\}$.

<u>Remarque</u>. La transformation $H \rightsquigarrow \hat{H}$ n'est définie que pour

certains hamiltoniens d'une forme particulière : il n'y a pas de méthodes universelles de quantification.

Résolution de l'équation de Shrödinger.

Elle fait appel soit à des calculs explicites ou approchés utilisant la théorie des équations aux dérivées partielles, soit à la décomposition spectrale de l'opérateur H .

Le cas le plus simple est celui où H est à résolvante compacte, c'est-à-dire où $(H-\lambda_0)^{-1}$ est un opérateur compact de $\mathcal{H}$ (λ_0 étant choisi hors du spectre de H , par exemple $\lambda_0 = i$). Il existe alors une base orthonormée $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$ et une suite $E_0 \leq E_1 \leq \ldots \leq E_n \leq \ldots$ de nombres réels avec $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = +\infty$ tels que $H\varphi_n = E_n\varphi_n$.

Si $\varphi \in \mathcal{H}$, on a $\varphi = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n$, $a_n = \langle\varphi|\varphi_n\rangle$ et
$e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\varphi = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{i}{\hbar}tE_n}\varphi_n$.

On a $\sum |a_n|^2 = 1$ et $|a_n|^2 = \text{Probabilité}\{E(\varphi)=E_n\}$.

D'une manière générale, si A est un hamiltonien, la valeur probable de A dans l'état φ est $\langle A\varphi|\varphi\rangle$.

Deux principes généraux sont valables :

• le principe d'incertitude : si A, B sont 2 hamiltoniens tels que $[A,B] = c\frac{\hbar}{i}\,\mathrm{Id}$, alors $(AB\varphi|\varphi) - (BA\varphi|\varphi) = c\frac{\hbar}{i}$, $2\mathrm{Im}(A\varphi|B\varphi) = c\hbar$. Donc : $\|A\varphi\|\,\|B\varphi\| \geq \frac{c}{2}\hbar$. Soit φ telle que $(A\varphi|\varphi) = \alpha$, $(B\varphi|\varphi) = \beta$. on a :

$$\begin{cases} ((A-\alpha)\varphi|\varphi) = ((B-\beta)\varphi|\varphi) = 0 \\ [A-\alpha, B-\beta] = [A,B] \end{cases}$$

et donc $\|(A-\alpha)\varphi\|\,\|(B-\beta)\varphi\| \geq \frac{c}{2}\hbar$.

L'expression $\|(A-\alpha)\varphi\|^2$ représente l'écart quadratique moyen entre φ et sa valeur moyenne α , qu'on peut noter ΔA^2 : on a donc :

$$\Delta A.\Delta B \geq \frac{c}{2}\hbar .$$

2 hamiltoniens dont le crochet est $\frac{c}{i}\hbar\,\mathrm{Id}$ ne peuvent simultanément être connu avec une précision absolue dans un état φ .

• Le principe d'exclusion : soit $\hat{H}$ un hamiltonien et $N(E) = \mathrm{Card}\{E_n \le E\}$ (valeurs propres de H), alors on a des majorations du type : $N(E) \le C.(2\pi\hbar)^n \mathrm{vol}\{H \le E\}$ où X est de dimension $2n$, $C \sim 1$: une particule quantique occupe une place de volume $(2\pi\hbar)^n$; ce principe rend obligatoire la quantification : les valeurs possibles de $\hat{H}$ ne peuvent décrire qu'un ensemble discret si $H : X \to \mathbb{R}$ est propre.

2. - QUANTIFICATION DE SCHRÖDINGER-WEYL.

Dans cet exemple de quantification $X = T^*(\mathbb{R}^n)$ muni de la structure symplectique usuelle et $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ (dx étant la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$). On se contentera dans un premier temps de réaliser la philosophie précédente pour les hamiltoniens $H \in C^\infty(T^*(\mathbb{R}^n))$ qui sont des polynômes de degré ≤ 2 en (x,ξ) .

On pose $\hat{1} = \mathrm{Id}$; $\hat{x}_i = m_i$, opérateur multiplication par x_i ; $\hat{\xi}_j = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$; $\widehat{x_i\xi_j} = \frac{1}{2}(\hat{x}_i \circ \hat{\xi}_j + \hat{\xi}_j \circ \hat{x}_i)$; $\widehat{x_i x_j} = \hat{x}_i \circ \hat{x}_j$; $\widehat{\xi_i\xi_j} = \hat{\xi}_i \circ \hat{\xi}_j$.

On étend par linéarité à tous les polynômes de degré ≤ 2 . Par exemple :

$$\widehat{x_1\xi_1} = \frac{\hbar}{i}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\right) \ ;$$

$$\widehat{\Sigma\xi_i^2} = -\hbar^2\Delta \quad \text{avec} \quad \Delta = \Sigma\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ ;$$

$$[\hat{x}_\ell, \hat{\xi}_j] = i\hbar\delta_{j\ell}\,\mathrm{Id} \quad (\delta_{j\ell} \text{ symbole de Kronecher}).$$

On vérifie aisément la relation :

$$[\hat{f}, \hat{g}] = i\hbar\widehat{\{f,g\}} \ .$$

On étend cette quantification aux hamiltoniens de la forme :

$$H(x,\xi) = \Sigma\, a_{ij}\xi_i\xi_j + \Sigma\, b_j(x)\xi_j + c(x) \ ;$$

on pose :

$$\hat{H} = -\hbar^2 \sum a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\hbar}{i} \sum \left(b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial b_j}{\partial x_j} \right) + c(x) .$$

Par exemple si

$$H(x, \xi) = \frac{1}{2m} \sum \xi_i^2 + V(x) ,$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x) .$$

C'est l'opérateur de Schrödinger d'une particule de masse m dans un potentiel $V(x)$.

Si $H(x, \xi) = \dfrac{1}{2m} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (\xi_j - a_j(x))^2 + V(x)$,

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \sum \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} - a_j(x) \right)^2 + V(x) .$$

C'est l'opérateur de Schrödinger en présence d'un champ magnétique $B = d(\sum a_j(x) dx_j) \in \Omega^2(\mathbb{R}^n)$ et d'un champ électrique $V(x)$.

Remarque. On ne peut pas étendre cette quantification à l'ensemble des hamiltoniens polynômiaux en (x, ξ) . Il est par exemple impossible de définir de façon cohérente $\widehat{x_1 \xi_1^2}$ par exemple.

Si $P_m = \{$polynôme de degré $\leq m$ en $(x, \xi)\}$ et $\mathcal{O}_m = \{$opérateurs différentiels d'ordre m dans $\mathbb{R}^n\}$, on peut définir une application $P \mapsto \hat{P}$ de P_m dans $\mathcal{O}_m$ vérifiant $[\hat{P}, \hat{Q}] = \frac{\hbar}{i} \widehat{\{P, Q\}} + R$ où, si $P \in P_m$, $Q \in P_\ell$, $R \in \mathcal{O}_{m+\ell-3}$.

3. - OSCILLATEUR HARMONIQUE.

Dans ce §, on fait $\hbar = 1$. A l'hamiltonien $h = \frac{1}{2}(x^2 + \xi^2)$ sur $T^*(\mathbb{R})$, on associe par la quantification de Schrödinger-Weyl l'opérateur $H = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)$ sur $L^2(\mathbb{R}, dx)$. Cet opérateur est défini sur un domaine dense de $L^2(\mathbb{R}, dx)$, par exemple l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schwartz. Il est clair que H est formellement symétrique : si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} Hf \cdot \bar{g}\, dx = \int_{\mathbb{R}} f . \overline{Hg}\, dx$. On peut en fait montrer que H admet une unique extension autoadjointe qui, de plus, est à résolvante compacte : $L^2(\mathbb{R}, dx)$ admet donc une base orthonormée φ_n formée de fonctions propres de H associées à une suite $0 \le \lambda_0 \le \lambda_1 \le \ldots$ de valeurs propres vérifiant $\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty$, que nous allons déterminer ci-dessous.

THEOREME. - $\lambda_n = n + \frac{1}{2}$ <u>et</u> $\varphi_n = c_n \left(\frac{-d}{dx} + x\right)^n \left(e^{-x^2/2}\right) = H_n(x) e^{-x^2/2}$ <u>où</u> H_n <u>est un polynôme de degré</u> n <u>ayant</u> n <u>zéros et la parité de</u> n <u>(polynômes d'Hermite)</u> ; $c_n = \pi^{-1/4} . 2^{-n/2} . ((n-1)!)^{-1/2}$.

<u>Preuve</u>. - La factorisation $x^2 + \xi^2 = (x + i\xi)(x - i\xi)$ conduit à introduire les opérateurs différentiels $B_\pm = \pm \frac{d}{dx} + x$. On vérifie les relations :

$$B_+ \circ B_- = -2H - 1 \quad ; \quad B_- \circ B_+ = -2H + 1 \quad ; \quad [B_+, B_-] = -2 .$$

Soit $\varphi \neq 0$ telle que $H\varphi = \lambda\varphi$, on vérifie aisément que

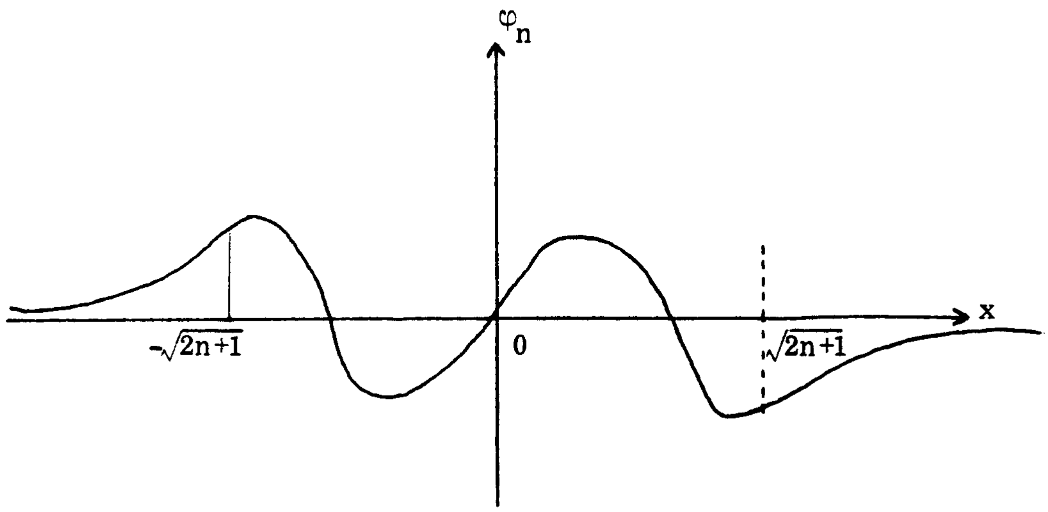
$$\begin{cases} \text{(a)} \quad \lambda \neq \frac{1}{2} \Rightarrow B_+\varphi \neq 0 \\ \text{(b)} \quad \lambda \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow B_-\varphi \neq 0 \\ \text{(c)} \quad H(B_\pm\varphi) = (\lambda \mp 1)(B_\pm\varphi) . \end{cases}$$

Donc, si λ est valeur propre de H $(\lambda \ge 0)$, $\lambda + 1$ est valeur propre de H avec la fonction propre $B_-\varphi$. Si λ est valeur propre de H et $\lambda \neq \frac{1}{2}$, $\lambda - 1$ est valeur propre de H avec la fonction propre $B_+\varphi$. Comme les valeurs propres de H sont ≥ 0 , on voit que les conditions précédentes impliquent $\text{Spectre}(H) = \{n + \frac{1}{2} \mid n \in \mathbb{N}\}$: $\lambda_n = n + \frac{1}{2}$; et de plus, on a : $B_+\varphi_n = c' . \varphi_{n-1}$, $B_-\varphi_n = c''\varphi_{n+1}$: la condition $\varphi_n \in L^2$ détermine donc φ_{n+1} à partir de φ_n et φ_0 par $B_+\varphi_0 = 0$: les espaces propres sont de multiplicité 1 ; $\varphi_0 = c e^{-x^2/2}$ et $\varphi_n = c . B_-^n(\varphi_0)$.

La relation $(B_-\varphi|B_-\varphi) = -(B_+\circ B_-\varphi|\varphi) = +((2H+1)\varphi|\varphi)$ permet de calculer la norme L^2 de $B_-^n(\varphi_0)$ et donc les constantes c_n de normalisation.

Localisation.

La n-ème fonction propre φ_n vérifie l'équation différentielle $\varphi_n'' + (2n+1-x^2)\varphi_n = 0$, donc le graphe admet des points d'inflexion pour $x = \pm\sqrt{2n+1}$: la fonction φ_n est oscillante pour $x \in [-\sqrt{2n+1},\sqrt{2n+1}]$ et exponentiellement décroissante hors de cette intervalle : l'état quantique φ_n est donc localisé dans l'intervalle $[-\sqrt{2n+1},\sqrt{2n+1}]$. On remarque que c'est la projection sur l'axe des x de la ligne d'énergie $h(x,\xi) = n+\frac{1}{2}$ qui est le cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{2n+1}$.



Exercice. Dessiner avec précision les graphes de φ_n pour $n \leq 5$.

On remarque aussi que la place occupée dans $T^*\mathbb{R}$ par la particule φ_n qui est l'aire de la couronne $R \in [\sqrt{2n},\sqrt{2n+2}]$ vaut 2π ($2\pi\hbar$ si $\hbar\neq 1$) ce qui concorde avec la philosophie générale.

Relation avec la transformation de Fourier.

Soit $U(t) = e^{-itH}$ la solution de l'équation de Schrödinger. On a $U(t)\varphi_k = e^{-it(k+\frac{1}{2})}\varphi_k$. En particulier $U(\pi)\varphi_k = -i(-1)^k\varphi_k$ et en général $U(\pi)(f) = -if(-x)$; $U(2\pi) = -Id$; $U(4\pi) = Id$.

Soit $\mathcal{F}f(x) = (2\pi)^{-1/2}.\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}f(y)dy$, on a :

$U(\frac{\pi}{2}) = e^{-i\pi/4}\mathcal{F}$;

en effet $\mathcal{F}\varphi_0 = \varphi_0$; $\mathcal{F}B_- = -iB_-\mathcal{F}$ et donc $\mathcal{F}\varphi_k = (-i)^k\varphi_k = U(\frac{\pi}{2})e^{i\frac{\pi}{4}}\varphi_k$.

Système classique.

$\varphi_t : T^*(\mathbb{R}) \to T^*(\mathbb{R})$ est la rotation d'angle t autour de 0 .
En particulier $\varphi_{\frac{\pi}{2}}(x,\xi) = (-\xi, x)$; $\varphi_{2\pi} = Id$.

Système quantique.

$U(t) : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$; $U(\frac{\pi}{2}) = e^{-i\pi/4}\mathcal{F}$; $U(2\pi) = -Id$.
$(H-E)f = 0$ n'est possible que si $E = n + \frac{1}{2}$: cela correspond à une famille discrète de cercles de rayon $\sqrt{2n+1}$ dans $T^*(\mathbb{R})$.

Il faut remarquer que la représentation $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = U(1) \to Symp(T^*(\mathbb{R}))$ donnée par $t \mapsto \varphi_t$ ne se quantifie pas en une représentation unitaire de $U(1)$ dans $U(L^2(\mathbb{R}))$, mais du revêtement à 2 feuillets $\mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}$ de $U(1)$ dans $U(L^2(\mathbb{R}))$: $t \rightsquigarrow U(t)$. C'est la source des difficultés qui conduisent à la théorie de l'indice de Maslov. Notons aussi qu'on a le même problème pour la représentation naturelle de $SL_2(\mathbb{R})$ dans $Symp(T^*(\mathbb{R}))$ qui prolonge celle de $U(1)$: on doit passer au revêtement à 2 feuillets $MP_2(\mathbb{R})$ de $SL_2(\mathbb{R})$: c'est le groupe métaplectique qui joue un rôle fondamental dans les méthodes de quantification.

4. - LAPLACIEN D'UNE VARIETE RIEMANNIENNE.

Comment quantifier l'hamiltonien $\frac{1}{2}\sum g^{ij}(x)\xi_i\xi_j$ d'une variété riemannienne (X,g) et le flot géodésique qui lui correspond. Il est naturel de choisir comme espace de Hilbert, l'espace $\mathcal{H}$ des fonctions sur X de carré intégrable par rapport à l'élément de volume riemannien $v_g = \sqrt{\text{dét}\, g_{ij}(x)}.dx_1\ldots dx_n = \theta(x)dx_1\ldots dx_n$.

On doit donc chercher un opérateur formellement symétrique à coefficients réels $\Delta : C_0^\infty(X) \circlearrowleft$ tel que :

① $\Delta = -\sum g^{ij}(x)\dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ + opérateur d'ordre 1

② $\int_X \Delta f.\bar{g}.v_g = \int_X f.\overline{\Delta g}.v_g$.

Si on ajoute la troisième condition :

③ $\Delta.1 = 0$

on obtient ainsi un opérateur Δ_g unique appelé laplacien de (X,g) .

THEOREME. - <u>Il existe un opérateur</u> Δ_g <u>unique différentiel du second ordre sur</u> X <u>vérifiant les conditions</u> ①, ② et ③. <u>On a</u> :

$$\int_X \Delta f.\bar{g}\,v_g = \int_X (df(x)|dg(x))_{T_x^* X}\, v_g \ .$$

<u>Preuve</u>. - L'unicité résulte du fait qu'un opérateur du 1er ordre ne peut pas être symétrique et à coefficients réels sans être d'ordre 0 : la condition ③ détermine le terme d'ordre 0 .

Pour calculer Δ_g on part de la formule, pour $U \subset X$ domaine de carte , $f,g \in C_0^\infty(U)$, $\int_U (\Delta f|g)\theta dx = \int \sum g^{ij}(x)\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{\partial g}{\partial x_j}\theta dx$. Par intégration par parties, il vient :

$$\Delta f = -\theta^{-1}\sum \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\theta . g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) .$$

<u>Exercice</u>. 1) X de dim 2 , $g = e^{-\varphi}(dx^2+dy^2)$, prouver que

$$\Delta = -e^{\varphi}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) .$$

2) $g = dr^2 + r^2 d\theta^2$, $\Delta = -\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)$

(laplacien en coordonnées polaires).

3) $g = dr^2 + r^2 d\sigma^2$ sur $\mathbb{R}^+ \times S^2$,

$$\Delta = -\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta_{S^2} .$$

4) Calculer Δ pour $g = dt^2 + f(t)g_0(dz)$ sur $\mathbb{R}\times Z$.

Quelques propriétés du spectre du laplacien.

Si la variété X est compacte, le laplacien Δ est à résolvante compacte, son spectre est donc formé d'une suite de valeurs propres $\lambda_0 = 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ avec $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$.

Comportement asymptotique des valeurs propres.

$$\mathrm{Card}\{\lambda_n \leq E\} \underset{E\to\infty}{\sim} (2\pi)^{-n} \int_{g^*(x,\xi)\leq E} dx_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_d = (2\pi)^{-n} C_n E^{n/2} \mathrm{vol}(X)$$

où C_n est le volume de la boule de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$.

Cette relation traduit la philosophie générale : chaque φ_n occupe une place de volume $(2\pi)^n$ dans l'espace T^*X .

Relation avec le flot géodésique.

Ces relations utilisant de puissants outils d'analyse ont été découvertes il y a une dizaine d'années.

THEOREME. - Si toutes les géodésiques sont périodiques de période $T > 0$, le spectre de Δ s'accumule autour de la suite $\left(\frac{2\pi k}{T}+\alpha\right)^2$ ($k\in\mathbb{N}$, α est une constante déterminée par la géométrie de X).

THEOREME. - Si $Z(t) = \sum_n \exp(-it\sqrt{\lambda_n}) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on a : $\mathrm{Supp\,Sing}(Z(t)) \subset \{0\} \cup \mathcal{L}$ où $\mathcal{L}$ est l'ensemble des géodésiques périodiques de X .

Remarque. - Des relations plus explicites étaient déjà connues pour les variétés hyperboliques H/Γ (formules de traces de Selberg) et pour les tores plats $\mathbb{R}^n/\Gamma$ (formule de Poisson).

5. - ETUDE D'UN EXEMPLE : SPECTRE DE S^2 .

Soit P un polynôme homogène de degré k et harmonique dans $\mathbb{R}^3$, l'expression du laplacien euclidien de P en coordonnées sphériques montre que :

$$0 = \Delta_{\mathbb{R}^3} P = \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2} P$$

et comme $P(r,\omega) = r^k P(\omega)$ $(\omega \in S^2)$, on obtient avec $\tilde{P}(\omega) = P\restriction_{S^2}$:

$$\Delta_{S^2}\tilde{P} = k(k+1)\tilde{P} \ .$$

Soit $E_k = \{P\restriction_{S^2} | P$ homogène de degré k et harmonique$\}$, on a : $\Delta_{S^2}\restriction_{E_k} = k(k+1)\mathrm{Id}$.

THEOREME. - <u>Le spectre de</u> Δ_{S^2} <u>est formé des</u> $k(k+1)$, $k=0,1\ldots.$; <u>l'espace propre associé à la valeur propre</u> $k(k+1)$ <u>est</u> E_k ; <u>sa dimension est</u> $2k+1$.

<u>Preuve</u>. - Voir le livre de Berger-Gauduchon-Mazet sur le spectre. On peut faire une décomposition spectrale plus fine : soit A une direction vectorielle de $\mathbb{R}^3$ et $\frac{\partial}{\partial\theta}$ le champ de vecteurs des rotations infinitésimales autour de A , si $L = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$, on a $[L, \Delta_{S^2}] = 0$. Donc E_k se décompose en sous-espaces propres de L . Les valeurs propres de L sont les entiers et on a :

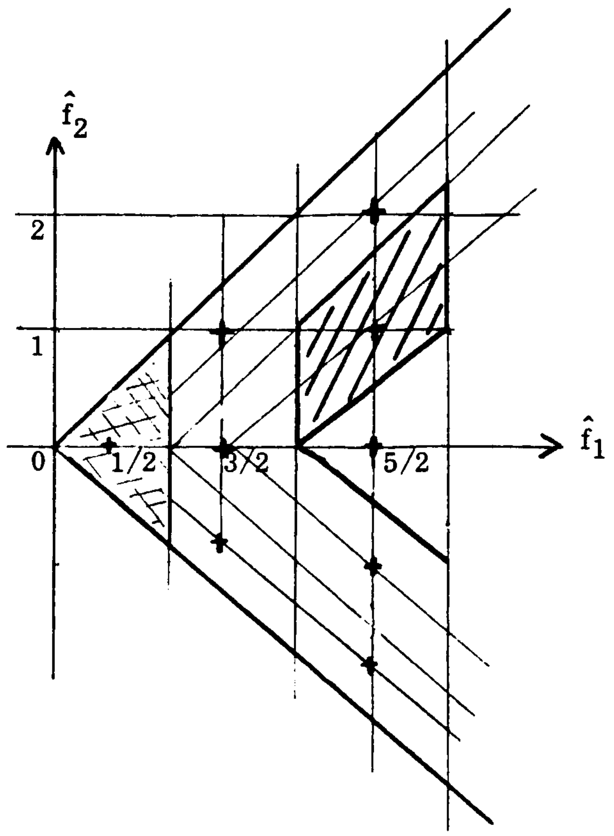
$$E_k = \bigoplus_{\ell=-k}^{\ell=k} \Omega_{k,\ell} \quad \text{où } \Omega_{k,\ell} \text{ est de dimension } 1 ,$$

il est engendré par une fonction propre de valeur propre ℓ de L . En coordonnées sphériques d'axe A , $\Omega_{k,\ell}$ est engendrée par $\omega_{k,\ell} = F_{k,\ell}(\varphi)e^{i\ell\theta}$. Les $F_{k,\ell}$ vérifient des équations différentielles ordinaires ; pour $\ell = 0$ ce sont les polynômes de Legendre.

<u>Relation avec la géométrie symplectique.</u>

Soit g_x^* la métrique sur $T_x^* S^2$, $f_1 = \sqrt{g^*}$ et $f_2 = \alpha(\frac{\partial}{\partial\theta})$, le système f_1, f_2 est complétement intégrable $\{f_1,f_2\} = 0$, et peut se quantifier en $\hat{f}_1 = \sqrt{\Delta + \frac{1}{4}}$, $\hat{f}_2 = L$: $[\hat{f}_1, \hat{f}_2] = 0$.

Représentons sur une figure le spectre joint $(k+\frac{1}{2}, \ell)$, $|\ell| \le k$ de $\hat{f}_1, \hat{f}_2$:



Les $\Lambda_{k,\ell} = (f_1, f_2)^{-1}(k+\frac{1}{2}, \ell)$ forment une famille de sous-variétés lagrangiennes de T^*S^2 occupent un volume $(2\pi)^2$ conformément à la philosophie générale : prendre $(f_1, f_2)^{-1}(P_{k,\ell})$: $P_{k,\ell}$ = parallélogramme de surface 1 de centre $(k+\frac{1}{2}, \ell)$.

Application.

Soit $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r)$ l'équation de Schrödinger dans $\mathbb{R}^3$ pour un potentiel radial, comme H commute avec Δ_{S^2} , on a :

$L^2(\mathbb{R}^3) = \oplus \mathcal{H}_{k,\ell}$, où $\mathcal{H}_{k,\ell}$ est l'ensemble des

$\varphi(r)\omega_{k,\ell}(\theta, \varphi)$ et H se décompose en une somme d'opérateurs différentiels $H_{k,\ell}$:

$$H_{k,\ell}\varphi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\varphi'' + \frac{2}{r}\varphi'\right) + \left(V(r) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{k(k+1)}{r^2}\right)\varphi \ .$$