COURS DE L'INSTITUT FOURIER

JULIO RUBIO
FRANCIS SERGERAERT

1. Homologie effective

Cours de l'institut Fourier, tome 20 (1986), p. 15-38
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1986__20__15_0>

1. Homologie effective

1. Premières définitions et propriétés

1.1. DÉFINITION. — *Un complexe de chaînes* (C_*, d) *est une suite* $\cdots \to C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \to \cdots \to C_0$, *où* C_n *est un* $\mathbf{Z}$*–module libre,* d_n *est un homomorphisme de groupes et* $d_n \cdot d_{n+1} = 0$, *pour tout* $n \in \mathbf{N}$.

1.2. DÉFINITION. — *Un morphisme de complexes de chaînes* $f : (C_*, d) \to (\overline{C}_*, \overline{d})$ *est une famille d'homomorphismes de groupes* $f_n : C_n \to \overline{C}_n$ *tel que* $f_n d_{n+1} = \overline{d}_{n+1} f_{n+1}$, *pour tout* $n \in \mathbf{N}$

$$\begin{array}{cccccc} \cdots\longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \longrightarrow\cdots\longrightarrow & C_0 \\ & \big\downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & \circlearrowleft & \big\downarrow{\scriptstyle f_n} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_0} \\ \longrightarrow & \overline{C}_{n+1} & \xrightarrow{\overline{d}_{n+1}} & \overline{C}_n & \longrightarrow\cdots\longrightarrow & \overline{C}_0 \end{array}$$

1.3. DÉFINITION. — *Une équivalence d'homotopie entre deux complexes de chaînes* (C_*, d) , $(\overline{C}_*, \overline{d})$ *est un ensemble* $(f, g, h, \overline{h})$, *où* $f : (C_*, d) \to (\overline{C}_*, \overline{d})$, $g : (\overline{C}_*, \overline{d}) \to (C_*, d)$ *sont des morphismes de chaînes,* $h_n : C_n \to C_{n+1}$, $\overline{h}_n : \overline{C}_n \to \overline{C}_{n+1}$ *sont des morphismes de groupes pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *vérifiant :*

$$\left.\begin{array}{l} h_{n-1} d_n + d_{n+1} h_n + g_n f_n = 1 \\[2ex] \overline{h}_{n-1} \overline{d}_n + \overline{d}_{n+1} \overline{h}_n + f_n g_n = 1 \end{array}\right\} \text{, pour tout } n \in \mathbf{N}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots\leftrightarrows & C_{n+1} & \underset{d_{n+1}}{\overset{h_n}{\leftrightarrows}} & C_n & \underset{d_n}{\overset{h_{n-1}}{\leftrightarrows}} & C_{n-1} & \leftrightarrows\cdots \\ & \downarrow\uparrow & & {\scriptstyle f_n}\downarrow\uparrow{\scriptstyle g_n} & & \downarrow\uparrow & \\ \leftrightarrows & \overline{C}_{n+1} & \underset{\overline{d}_{n+1}}{\overset{\overline{h}_n}{\leftrightarrows}} & \overline{C}_n & \underset{\overline{d}_n}{\overset{\overline{h}_{n-1}}{\leftrightarrows}} & \overline{C}_{n-1} & \leftrightarrows\cdots \end{array}$$

(Classiquement, un morphisme $f : (C_*, d) \to (\overline{C}_*, d)$ est une équivalence d'homotopie s'il existe un inverse homotopique, c'est-à-dire s'il existe un morphisme $g : (\overline{C}_*, \overline{d}) \to (C_*, d)$, une homotopie $h : g \cdot f \simeq 1$ et une autre $\overline{h} : f \cdot g \simeq 1$. On dispose donc d'un diagramme :

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, shift right, "g_n f_n"'] \arrow[d, shift left, "1"] \arrow[dl, dashed, "h_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \arrow[dl, dashed, "h_{n-1}"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \qquad h_{n-1} d_n + d_{n+1} h_n = 1 - g_n f_n$$

et de même pour $\overline{h}$. La différence entre cette définition et celle de 1.3 est la suivante : dans 1.3 on exige que l'inverse homotopique g et les homotopies h , $\overline{h}$ soient données *explicitement*).

1.4. DÉFINITION. — *Un homomorphisme de $\mathbf{Z}$–modules libres $f : A \to B$ est dit réductible s'il existe A', A'', B', B'' non–vides tels que $A = A' \oplus A''$, $B = B' \oplus B''$, $f(A') \subset B'$, $f(A'') \subset B''$ et $f | A'' : A'' \to B''$ est un isomorphisme.*

1.5. DÉFINITION. — *Un complexe de chaînes (C_*, d) est réductible s'il existe un n tel que d_n est réductible. Une réduction de (C_*, d) est un nouveau complexe de chaînes $(\overline{C}_*, d_*)$, défini par :*

$$\overline{C}_r = C_r \ , \quad si\ r \neq n \ , \ n-1$$

$$\overline{d}_r = d_r \ , \quad si\ r \neq n+1 \ , \ n \ , \ n-1$$

$$\overline{C}_n = C'_n \ , \quad \overline{C}_{n-1} = C'_{n-1} \ , \ \overline{d}_{n+1} = p \cdot d_{n+1} \ ,$$

$$\overline{d}_n = d_n | C'_n \ , \quad \overline{d}_{n-1} = d_{n-1} \cdot i \ , \ où :$$

$C_n = C'_n \oplus C''_n$, $C_{n-1} = C'_{n-1} \oplus C''_{n-1}$ (décompositions non–triviales), $d_n | C''_n : C''_n \to C''_{n-1}$ est un isomorphisme, $d_n(C'_n) \subset C'_{n-1}$, $p : C_n \to C'_n$ est la projection canonique et $i : C'_{n-1} \to C_{n-1}$ est l'inclusion canonique.

$$\begin{tikzcd}
 & & C''_n \arrow[r, "d_n|C''_n", "\simeq"'] \arrow[d, hook] & C''_{n-1} \arrow[d, hook] & & \\
{} \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[dr] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "p"] & C_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] & C_{n-2} \arrow[r] & {} \\
 & & C'_n \arrow[r, "\overline{d}_n"'] & C'_{n-1} \arrow[u, "i"'] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

1.6. PROPOSITION. — *Un complexe de chaînes (C_*, d) et une de ses réductions $(\overline{C}_*, \overline{d})$ sont canoniquement homotopiquement équivalents.*

Démonstration. — Une équivalence d'homotopie est indiquée dans le diagramme suivant, où les notations sont celles de la définition 1.5.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots \underset{d_{n+2}}{\overset{0}{\leftrightarrows}} & C_{n+1} & \underset{d_{n+1}}{\overset{0}{\leftrightarrows}} & C_n & \underset{d_n}{\overset{0 \oplus (d|C''_n)^{-1}}{\leftrightarrows}} & C_{n-1} & \underset{d_{n-1}}{\overset{0}{\leftrightarrows}} & C_{n-2} & \underset{d_{n-2}}{\overset{0}{\leftrightarrows}} \cdots \\
 & 1 \downarrow\uparrow 1 & & p \downarrow\uparrow i & & p \downarrow\uparrow i & & 1 \downarrow\uparrow 1 & \\
\cdots \underset{d_{n+2}}{\overset{0}{\leftrightarrows}} & C_{n+1} & \underset{p \cdot d_{n+1}}{\overset{0}{\leftrightarrows}} & C'_n & \underset{d_n | C'_n}{\overset{0}{\leftrightarrows}} & C'_{n-1} & \underset{d_{n-1} \cdot i}{\overset{0}{\leftrightarrows}} & C_{n-2} & \underset{d_{n-2}}{\overset{0}{\leftrightarrows}} \cdots
\end{array}$$

■

1.7. DÉFINITION. — *Un complexe de chaînes est irréductible s'il n'est pas réductible.*

1.8. REMARQUE. — Si $a, b \in \mathbf{Z}$ on sait que p.g.c.d.$(a, b) =$ p.g.c.d.$(a, -b) =$ p.g.c.d.$(a, a+b)$, où p.g.c.d. signifie plus grand commun diviseur.

Soit $f : A \to B$ un homomorphisme de $\mathbf{Z}$–modules libres de type fini et soit M sa matrice par rapport à certaines bases de A et B; on définit p.g.c.d.$(M) =$ {p.g.c.d. des éléments de M} (remarquer que M est une matrice à coefficients entiers). La remarque précédente nous permet d'affirmer que la définition suivante est cohérente.

1.9. DÉFINITION. — *Soit $f : A \to B$ un morphisme de $\mathbf{Z}$–modules libres de type fini et soit M une matrice de f; on définit* p.g.c.d. $f =$ p.g.c.d.(M) .

1.10. LEMME. — *Un morphisme $f : A \to B$ est réductible si et seulement si* p.g.c.d. $f = \pm 1$.

Démonstration. — Elle est déduite de l'algorithme de diagonalisation des matrices entières (le premier élément de la matrice diagonale est le p.g.c.d. de la matrice de départ) et de ce que tout isomorphisme entre $\mathbf{Z}$– modules libres admet comme matrice, dans des bases bien choisies, la matrice identité. ■

Remarque. — On dira qu'un *complexe de chaînes* (C_*, d) *est de type fini* si C_n est de type fini pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1.11. PROPOSITION. — *Un complexe de chaînes de type fini* (C_*, d) *est irréductible si et seulement si* p.g.c.d. $d_n \neq \pm 1$ *pour tout* $n \in \mathbf{N}$.

Démonstration. — C'est une conséquence du lemme 1.10. ■

1.12. DÉFINITION. — *Une homologie effective d'un complexe de chaînes* (C_*, d) *est un ensemble de données* $\{(C'_*, d'), f, g, h, h'\}$ *, où* (C'_*, d') *est un complexe de chaînes irréductible de type fini et* (f, g, h, h') *est une équivalence d'homotopie entre* (C_*, d) *et* (C'_*, d') .

NOTATION. — Si aucune confusion n'est à craindre, on dira simplement que (C'_*, d') est une homologie effective de (C_*, d).

1.13. REMARQUE. — On déduit du diagramme de la démonstration 1.6, que si on obtient une homologie effective de (C_*, d) par réduction de chaque flèche d_n on aura que : $h_n \cdot h_{n-1} = 0$, $h_n \cdot g_n = 0$, $f_{n+1} \cdot h_n = 0$ et que $h'_n : C'_n \to C'_{n+1}$ est l'application nulle pour tout $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \leftrightarrows & C_{n+1} & \overset{h_n}{\underset{d_{n+1}}{\leftrightarrows}} & C_n & \leftrightarrows \cdots \\
& g_{n+1}\downarrow\uparrow f_{n+1} & & g_n\downarrow\uparrow f_n & \\
\cdots \leftrightarrows & C'_{n+1} & \overset{h'_n}{\underset{d'_{n+1}}{\leftrightarrows}} & C'_n & \leftrightarrows \cdots .
\end{array}$$

Puisque si deux complexes de chaînes sont homotopiquement équivalents ils ont leurs groupes d'homologie isomorphes, on déduit la propriété suivante :

1.14. PROPRIÉTÉ. — *Si (C'_*, d') est une homologie effective de (C_*, d) , alors $H_q(C'_*, d') \simeq H_q(C_*, d)$, pour tout $q \in \mathbf{N}$, où H_q est le q–ième foncteur d'homologie.*

1.15. PROPOSITION. — *Soient $\{(\overline{C}_*, \overline{d}), \overline{f}, \overline{g}, \overline{h}, \overline{h}'\}$, $\{(\overline{\overline{C}}_*, \overline{\overline{d}}), \overline{\overline{f}}, \overline{\overline{g}}, \overline{\overline{h}}, \overline{\overline{h}}'\}$, deux homologies effectives d'un même complexe de chaînes (C_*, d) . Alors :*

(a) $(\overline{C}_*, \overline{d})$ et $(\overline{\overline{C}}_*, \overline{\overline{d}})$ sont canoniquement homotopiquement équivalents. De plus, si (C_*, d) est de type fini, alors :

(b) $\dim \overline{C}_n = \dim \overline{\overline{C}}_n$ *pour tout $n \in \mathbf{N}$;*

(c) Si d_n a une matrice coordonnée diagonale $\operatorname{diag}[1, \ldots, 1, \tau_1, \ldots, \tau_p, 0, \ldots, 0]$ *où $2 \leqslant \tau_1$ et τ_i divise τ_{i+1} , $i = 1, \ldots, p-1$, alors $\overline{d}_n$ et $\overline{\overline{d}}_n$ ont pour matrice coordonnée diagonale une même matrice $[\tau_1, \ldots, \tau_p, 0, \ldots, 0]$.*

Démonstration. —

(a) On vérifie que $(\overline{\overline{f}} \cdot \overline{g}\ ,\ \overline{f} \cdot \overline{\overline{g}}, K, \overline{K})$ est une équivalence d'homotopie entre $(\overline{C}_*, \overline{d})$ et $(\overline{\overline{C}}_*, \overline{\overline{d}})$, où :

$$K_n = \overline{h}'_n + \overline{f}_{n+1}\, \overline{\overline{h}}_n\, \overline{g}_n : \overline{C}_n \to \overline{C}_{n+1}$$

et

$$K_n = \overline{\overline{h}}'_n + \overline{\overline{f}}_{n+1}\, \overline{h}_n\, \overline{\overline{g}}_n : \overline{\overline{C}}_n \to \overline{\overline{C}}_{n+1} \quad .$$

(b) et (c) . On voit que si $\overline{C}_*$ est irréductible, la matrice diagonale de $\overline{d}_n$ doit être du type $[\alpha_1, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0]$, où $\alpha_i > 1$, pour tout i, mais ces coefficients donnent la partie de torsion de $H_{n-1}(\overline{C}_*, \overline{d})$, donc, pour la propriété 1.14, les coefficients de torsion de $d_n, \overline{d}_n$ et $\overline{\overline{d}}_n$ sont les mêmes : $\tau_1, \ldots, \tau_{p(n)}$. Maintenant, dans ces conditions, on voit que $\dim \overline{C}_n$ = dim -partie-libre $H_n(\overline{C}) + p(n) + p(n+1)$ = dim -partie-libre $H_n(\overline{\overline{C}}) + p(n) + p(n+1) = \dim \overline{\overline{C}}_n$, où dim -partie-libre $H_n(\overline{C})$ est le nombre de Betti correspondant. ∎

1.16. REMARQUE. — La dernière proposition affirme "l'unicité", à changement de bases près, de l'homologie effective d'un complexe de chaînes (C_*, d) . Dorénavant, on dira qu'on a *calculé l'homologie effective* de (C_*, d) si on dispose de n'importe quelle homologie effective de (C_*, d) et on notera cette homologie effective par

(HC_*, d) ou HC_* .

Remarquer que avec cette convention, si (C_*, d) et $(\overline{C}_*, \overline{d})$ sont deux complexes de chaînes et si on connaît une équivalence d'homotopie (f, g, h, h') entre eux, il est équivalent de calculer l'homologie effective de C_* ou celle de $\overline{C}_*$, donc dans ces conditions on peut écrire : $HC_* = H\overline{C}_*$.

1.17. EXEMPLE. — On considère le complexe de chaînes suivant :

$$0 \to \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 0\,0 \\ 0\,0 \\ 1\,0 \\ 0\,5 \end{bmatrix}]{d_2} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0 \\ 0\,3\,0\,0 \end{bmatrix}]{d_1} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

Par réduction de d_1 on obtient :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, shift left, "1"'] & \mathbf{Z} \oplus \underbrace{\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}} \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, shift left] & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[l, bend right, "1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \arrow[r, "\overline{d}_2", "\begin{bmatrix} 0\,0 \\ 1\,0 \\ 0\,5 \end{bmatrix}"'] \arrow[u, shift left] & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \arrow[r, "d_1", "{[3\ 0\ 0]}"'] \arrow[u, shift left] & \mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[u, shift left] & 0
\end{tikzcd}$$

Par réduction de $\overline{d}_2$ on obtient l'homologie effective du complexe de départ, où les flèches non indiquées sont nulles.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, shift left] & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, shift left] \arrow[l, bend right, "1"'] & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[l, bend right, "1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z} \arrow[r, "\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}"'] \arrow[u, shift left] & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \arrow[r, "{[3\ 0]}"'] \arrow[u, shift left] \arrow[u, shift right=3] & \mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[u, shift left] & 0
\end{tikzcd}$$

L'homologie classique du complexe irréductible, donc de celui du départ est :

$$0 \xrightarrow{0} \mathbf{Z}_5 \xrightarrow{0} \mathbf{Z}_3 \xrightarrow{0} 0 .$$

1.18. DÉFINITION. — *Soient* (C_*, d) , $(K_*, \overline{d})$ *deux complexes de chaînes. On considère le bicomplexe* $(C_p \otimes K_q, d_p \otimes 1, (-1)^p \otimes \overline{d}_q)$ *et soit* $(C \otimes K)_*$ *le complexe de chaînes associé* $\left[(C \otimes K)_n = \bigoplus_{p+q=n}(C_p \otimes K_q)\right]$. *Alors on définit l'homologie effective de* (C_*, d) *à coefficients dans* $(K_*, \overline{d})$ *par* $H(C \otimes K)_*$.

On va prouver une suite de lemmes pour arriver à la définition de l'homologie effective à coefficients dans un $\mathbf{Z}$-module (en général non libre) G .

1.19. DÉFINITION. — *Une résolution (abélienne, libre) d'un* $\mathbf{Z}$*-module* G *est un ensemble de données* (K, F, j, p) *où* K, F *sont* $\mathbf{Z}$*-modules libres et* $0 \longrightarrow K \xrightarrow{j} F \xrightarrow{p} G \longrightarrow 0$ *est une suite exacte courte.*

Remarque. — Tout $\mathbf{Z}$-module G admet une résolution.

1.20. LEMME. — *Soit* (K, F, j, p) *une résolution de* G *et soient* $\varphi_1 : K \to K$, $\varphi_0 : F \to F$ *un morphisme définissant un automorphisme de chaînes du complexe* $0 \to K \xrightarrow{j} F \to 0$ *, de façon que*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\varphi_0"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G \arrow[d, "1"] \\ F \arrow[r, "p"'] & G \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Alors on peut définir un morphisme $\Sigma(\varphi_0, \varphi_1) : F \to K$ *tel que :*

$$\begin{cases} j\Sigma(\varphi_0, \varphi_1) + \varphi_0 = 1 \\ \Sigma(\varphi_0, \varphi_1)j + \varphi_1 = 1 \ . \end{cases}$$

Démonstration. —

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "j"] \arrow[d, shift right, "\varphi_1"'] \arrow[d, shift left, "1"] & F \arrow[r, "p"] \arrow[d, shift right, "1"'] \arrow[d, shift left, "\varphi_0"] \arrow[dl, dashed, "\Sigma"'] & G \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "j"'] & F \arrow[r, "p"'] & G \arrow[r] & 0 \ . \end{tikzcd}$$

On a $p(\varphi_0 - 1) = p\varphi_0 - p = 0$, donc $\mathrm{Im}(\varphi_0 - 1) \subset \mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Im}\, j$; soit S une base de F , étant donné $s \in S \hookrightarrow F$, on voit que $(\varphi_0 - 1)s \in \mathrm{Im}\, j$; on choisit $r \in K$ tel que $(\varphi_0 - 1)s = j(r)$; on définit $\Sigma(\varphi_0, \varphi_1)(s) = -r$, qu'on étend à un morphisme $\Sigma(\varphi_0, \varphi_1) : F \to K$. Par construction, on vérifie que $j\Sigma(\varphi_0, \varphi_1) + \varphi_0 = 1$. De plus, $j(\Sigma(\varphi_0, \varphi_1)j + \varphi_1 - 1) = j\Sigma(\varphi_0, \varphi_1)j + j\varphi_1 - j = (1 - \varphi_0)j + j\varphi_1 - j = 0$ et on en déduit la deuxième égalité cherchée (car j est injective). ∎

1.21. LEMME. — *Soient* (K, F, j, p) *et* $(\overline{K}, \overline{F}, \overline{j}, \overline{p})$ *deux résolutions d'un même* $\mathbf{Z}$*-module* G *. Alors il existe une équivalence d'homotopie* $(\psi, \xi, \Sigma, \Sigma')$ *entre les complexes de chaînes* $0 \longrightarrow K \xrightarrow{j} F \longrightarrow 0$ *et* $O \longrightarrow \overline{K} \xrightarrow{\overline{j}} \overline{F} \longrightarrow 0$.

Démonstration. — Avec les mêmes techniques de la dernière démonstration il est facile de construire $\psi_0, \psi_1, \xi_0, \xi_1$ tel que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\psi_1"'] & F \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\psi_0"] & G \arrow[d, "1"] \\ \overline{K} \arrow[r, "\overline{j}"] \arrow[d, "\xi_1"'] & \overline{F} \arrow[r, "\overline{p}"] \arrow[d, "\xi_0"] & G \arrow[d, "1"] \\ K \arrow[r, "j"] & F \arrow[r, "p"] & G \end{tikzcd}$$

soient commutatifs.

Alors, on définit $\Sigma_0 = \Sigma(\xi_0\psi_0, \xi_1\psi_1)$ et $\Sigma_0' = \Sigma(\psi_0\xi_0, \psi_1\xi_1)$ où on a employé les notations du dernier lemme. ∎

1.22. LEMME. — *Soient (K, F, j, p) , $(\overline{K}, \overline{F}, \overline{j}, \overline{p})$ deux résolutions d'un $\mathbf{Z}$-module G . Soit (C_*, d) un complexe de chaînes. On note P_* le complexe de chaînes $0 \to K \xrightarrow{j} F \to 0$ et $\overline{P}_*$ celui $0 \to \overline{K} \xrightarrow{\overline{j}} \overline{F} \to 0$. Alors, il existe une équivalence d'homotopie (f, g, h, h') entre $(P \otimes C)_*$ et $(\overline{P} \otimes C)_*$.*

Démonstration. — On définit

$$\begin{array}{lll}
f_n = (\psi_0 \otimes 1) \oplus (\psi_1 \otimes 1) : (F \otimes C_n) \oplus (K \otimes C_{n-1}) & \longrightarrow (\overline{F} \otimes C_n) \oplus (\overline{K} \otimes C_{n-1}) \\
g_n = (\xi_0 \otimes 1) \oplus (\xi_1 \otimes 1) : (\overline{F} \otimes C_n) \oplus (\overline{K} \otimes C_{n-1}) & \longrightarrow (F \otimes C_n) \oplus (K \otimes C_{n-1}) \\
h_n : (F \otimes C_n) \oplus (K \otimes C_{n-1}) & \to (F \otimes C_{n+1}) \oplus (K \otimes C_n) \\
\qquad (f \otimes c, k \otimes \overline{c}) & \mapsto (0, \Sigma_0(f) \otimes c) \\
h'_n : (\overline{F} \otimes C_n) \oplus (\overline{K} \otimes C_{n-1}) & \to (\overline{F} \otimes C_{n+1}) \oplus (\overline{K} \otimes C_n) \\
\qquad (\overline{f} \otimes c, \overline{k} \otimes \overline{c}) & \mapsto (0, \Sigma_0'(\overline{f}) \otimes c) \ ,
\end{array}$$

où on a employé les notations du dernier lemme. ∎

Compte-tenu de la fin de la remarque 1.16 et du dernier lemme on peut donner la définition suivante :

1.23. DÉFINITION. — *Soit (C_*, d) un complexe de chaînes et (K, F, j, p) une résolution d'un $\mathbf{Z}$-module G . On définit l'homologie effective de (C_*, d) à coefficients dans le groupe G comme l'homologie effective de $0 \to K \xrightarrow{j} F \to 0$ à coefficients dans (C_*, d) . Elle sera notée par $H(C_*; G)$.*

La proposition suivante montre que cette définition est naturelle.

1.24. PROPOSITION. — *Soit (C_*, d) un complexe de chaînes et G un $\mathbf{Z}$-module. Alors : $H_q\big(H(C_*; G)\big) \cong H_q(C_*; G)$, pour tout $q \in \mathbf{N}$, où $H_q(\ ; G)$ est le q-ième foncteur d'homologie à coefficients dans G .*

Démonstration. — On sait que $H_q(C_*; G)$ est défini à partir de l'homologie du complexe de chaînes

$$\cdots \longrightarrow C_n \otimes G \xrightarrow{d_n \otimes 1} C_{n-1} \otimes G \longrightarrow \cdots$$

ou bien du complexe de chaînes canoniquement isomorphe :

$$\cdots \longrightarrow G \otimes C_n \xrightarrow{1 \otimes d_n} G \otimes C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

(Remarquer que ce ne sont pas nécessairement des complexes de chaînes selon notre définition 1.1, puisque $C_n \otimes G$ peut *ne pas* être libre).

Soit (K, F, j, p) une résolution de G . On a l'opérateur de bord

$$\begin{array}{lll}
\partial_n : & (F \otimes C_n) \oplus (K \otimes C_{n-1}) & \to (F \otimes C_{n-1} \oplus (K \otimes C_{n-2}) \\
& (f \otimes c, k \otimes \overline{c}) & \mapsto (f \otimes d_n c + j(k) \otimes \overline{c}, -k \otimes d_{n-1}\overline{c}) \ .
\end{array}$$

D'après nos définitions et la propriété 1.14, il suffit de démontrer qu'il y a un isomorphisme entre $\operatorname{Ker} \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}$ et $\operatorname{Ker}(1 \otimes d_n) / \operatorname{Im}(1 \otimes d_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Puisque C_n est libre, le foncteur $(-)\otimes C_n$ est exact et donc dans le diagramme suivant les suites verticales sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & K\otimes C_n \arrow[r, "1\otimes d_n"] \arrow[d, "j\otimes 1"'] & K\otimes C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "j\otimes 1"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & F\otimes C_n \arrow[r, "1\otimes d_n"] \arrow[d, "p\otimes 1"'] & F\otimes C_n \arrow[r] \arrow[d, "p\otimes 1"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & G\otimes C_n \arrow[r, "1\otimes d_n"] \arrow[d] & G\otimes C_n \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Ce fait et la commutativité du diagramme impliquent que l'application

$$\operatorname{Ker}\partial_n/\operatorname{Im}\partial_{n+1} \to \operatorname{Ker}(1\otimes d_n)/\operatorname{Im}(1\otimes d_{n+1})$$
$$[(a,b)] \mapsto [(p\otimes 1)(a)]$$

est bien définie, est un morphisme de groupes et est bijective. ∎

2. Multicomplexes

2.1. DÉFINITION. — *Un multicomplexe est un couple (C,d) où $C = \{E_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ est un ensemble gradué, $E_n = \{C_n^1,\ldots,C_n^{r_n}\}$ avec C_n^i $\mathbf{Z}$-module libre pour tout $i = 1,\ldots,r_n$ et d est une famille de morphismes de $\mathbf{Z}$-modules $d_n^{i,j} : C_n^i \to C_{n-1}^j$, pour chaque $i \in \{1,\ldots,r_n\}$, $j \in \{1,\ldots,r_{n-1}\}$, $n \in \mathbf{N}$, vérifiant $\sum_{j=1}^{r_n} d_n^{j,k}\cdot d_{n+1}^{i,j} = 0$, $1 \leqslant i \leqslant r_{n+1}$, $1 \leqslant k \leqslant r_{n-1}$.*

$$\begin{tikzcd}
 & C_n^1 \arrow[dr, "d_n^{1,k}"] \arrow[d, dash, dotted] & \\
C_{n+1}^i \arrow[ur, "d_{n+1}^{i,1}"] \arrow[r, "d_{n+1}^{i,j}"] \arrow[dr, "d_{n+1}^{i,r_n}"'] & C_n^j \arrow[r, "d_n^{j,k}"] \arrow[d, dash, dotted] & C_{n-1}^k \\
 & C_n^{r_n} \arrow[ur, "d_n^{r_n,k}"'] &
\end{tikzcd}$$

2.2. EXEMPLES. —

(1). — Si dans cette définition on a pour tout $n \in \mathbf{Z}$ $r_n = 1$, on obtient la définition 1.1 d'un complexe de chaînes.

(2). — Si $r_n = n+1$ et $d_n^{i,j} = 0$ si $j \neq i, i-1$, la définition 2.1 n'est autre que la définition classique d'un bicomplexe; un tel bicomplexe est exprimé d'ordinaire

comme un diagramme :

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
 & & & C_2^3 \arrow[d, "d_2^{3,2}"] \\
\cdots \arrow[r] & C_3^2 \arrow[r, "d_3^{2,2}"'] \arrow[d, "d_3^{2,1}"'] & C_2^2 \arrow[r, "d_2^{2,2}"'] \arrow[d, "d_2^{2,1}"] & C_1^2 \arrow[d, "d_1^{2,1}"] \\
\cdots \arrow[r] & C_2^1 \arrow[r, "d_2^{1,1}"] & C_1^1 \arrow[r, "d_1^{1,1}"] & C_0^1
\end{tikzcd}
$$

ou bien (en changeant les indices) de la façon classique :

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
 & & & C_{0,2} \arrow[d, "\partial''_{0,2}"] \\
\cdots \arrow[r] & C_{2,1} \arrow[r, "\partial'_{2,1}"] \arrow[d, "\partial''_{2,1}"'] & C_{1,1} \arrow[r, "\partial'_{1,1}"] \arrow[d, "\partial''_{1,1}"] & C_{0,1} \arrow[d, "\partial''_{0,1}"] \\
\cdots \arrow[r] & C_{2,0} \arrow[r, "\partial'_{2,0}"] & C_{1,0} \arrow[r, "\partial'_{1,0}"] & C_{0,0} \, .
\end{tikzcd}
$$

(3). — Si on a deux complexes de chaînes $(C_*, d), (\overline{C}_*, \overline{d})$, on peut leur associer un multicomplexe (en fait, un bicomplexe) par les formules $C_n^i = C_{n-i+1} \otimes \overline{C}_{i-1}$, $d_n^{i,i} = d_{n-i+1} \otimes 1$, $d_n^{i,i-1} = (-1)^{n-i-1} \otimes \overline{d}_{i-1}$, comme dans la définition 1.18. A partir de ce bicomplexe, on définit le produit tensoriel des complexes de chaînes.

(4). — Soient $(C_*, d), (\overline{C}_*, \overline{d})$ deux complexes de chaînes et f un morphisme de l'un vers l'autre; alors on peut définir un multicomplexe (un bicomplexe) :

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "(-1)^n f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "(-1)^{n-1} f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "-f_1"'] & C_0 \arrow[d, "f_0"] \\
\cdots \arrow[r] & \overline{C}_n \arrow[r, "\overline{d}_n"'] & \overline{C}_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \overline{C}_1 \arrow[r, "\overline{d}_1"'] & \overline{C}_0
\end{tikzcd}
$$

où $r_n = 2$, si $n \geqslant 1$, $r_0 = 1$, $C_0^1 = \overline{C}_0$, $\overline{C}_n^1 = \overline{C}_n$, $C_n^2 = C_{n-1}$, si $n \geqslant 1$; $d_n^{1,1} = \overline{d}_n$, $d_n^{2,1} = (-1)^{n-1} f_{n-1}$, $d_n^{1,2} = 0$, $d_n^{2,2} = d_{n-1}$, si $n \geqslant 1$.

2.3. DÉFINITION. — *La totalisation d'un multicomplexe (C, d) est un couple (T, ∂) , où $T = \{T_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ est l'ensemble de $\mathbf{Z}$-modules libres définis par $T_n = C_n^1 \oplus \cdots \oplus C_n^{r_n}$ et $\partial = \{\partial_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ est l'ensemble de morphismes de $\mathbf{Z}$-modules définis par :*

$$\partial_n : Cq_n \oplus \cdots \oplus C_n^{r_n} \to C_{n-1}^1 \oplus \cdots \oplus C_{n-1}^{r_{n-1}}$$

$$(c_1, \ldots, c_{r_n}) \mapsto \Big(\sum_{i=1}^{r_n} d_n^{i,1}(c_i), \ldots, \sum_{i=1}^{r_n} d_n^{i,r_{n-1}}(c_i) \Big) .$$

2.4. PROPOSITION. — *La totalisation d'un multicomplexe est un complexe de chaînes.*

Démonstration. — On vérifie que la condition exigée sur $d_n^{i,j}$ dans la définition 2.1 d'un multicomplexe implique que $\partial_n \cdot \partial_{n+1} = 0$. ■

2.5. EXEMPLE. — La définition de totalisation d'un multicomplexe est une généralisation de la façon classique d'associer un complexe de chaînes à un bicomplexe.

2.6. DÉFINITION. — *Soit (C, d) un multicomplexe; on suppose que $d_n^{j,k} : C_n^j = C' \oplus C'' \to C_{n-1}^k = \overline{C}' \oplus \overline{C}''$ est réductible, que $d_n^{j,k}(C') \subset \overline{C}'$ et que $d_n^{j,k}/C'' : C'' \to \overline{C}''$ est un isomorphisme, d'inverse g; alors la réduction associée au multicomplexe (C, d) est un couple $(\overline{C}, \overline{d})$, où $\overline{C}$ est un ensemble gradué de $\mathbf{Z}$-modules défini à partir de C par :*

$$\overline{C}_n^j = C'$$
$$\overline{C}_{n-1}^k = \overline{C}'$$
$$\overline{C}_r^q = C_r^q \text{ ,dans tous les autres cas ;}$$

et $\overline{d}$ est un ensemble de morphisme de $\mathbf{Z}$-modules $\overline{d}_n^{i,j} : \overline{C}_n^i \to \overline{C}_{n-1}^j$, un pour chaque indice possible, définis par :

$$\begin{tikzcd}
& C^l_n \arrow[r, "d^{l,m}_n"] \arrow[ddr, "d^{l,k}_n"'] & C^m_{n-1} \arrow[dr, "d^{m,p}_{n-1}"] & \\
C^i_{n+1} \arrow[ur, "d^{i,l}_{n+1}"] \arrow[dr, "d^{i,j}_{n+1}"'] & C'' \arrow[d, "i"'] & \overline{C}'' \arrow[l, "g \cong"'] & C^p_{n-2} \\
& C^j_n \arrow[r, "d^{j,k}_n"'] \arrow[uur, "d^{j,m}_n"] \arrow[d, shift right, "p'"'] & C^k_{n-1} \arrow[u, "p"'] \arrow[ur, "d^{k,p}_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "p''"'] & \\
& C' \arrow[r, "d^{j,k}_n|C'"'] \arrow[u, shift right, "i'"'] & \overline{C}' \arrow[u, shift right, "i''"'] &
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{array}{lll}
\overline{d}_r^{q,s} & = d_r^{q,s} \ , & \text{si } r \neq n+1 \ , \ n \ , \ n-1 \\
\overline{d}_{n+1}^{q,s} & = d_{n+1}^{q,s} \ , & \text{si } s \in \{1,\ldots,r_n\}\backslash\{j\} \\
\overline{d}_{n-1}^{q,s} & = d_{n-1}^{q,s} \ , & \text{si } q \in \{1,\ldots,r_{n-1}\}\backslash\{k\} \\
\overline{d}_{n+1}^{i,j} & = p' \cdot d_{n+1}^{i,j} \ , & \text{si } i \in \{1,\ldots,r_{n+1}\} \\
\overline{d}_n^{j,m} & = d_n^{j,m} \cdot i' \ , & \text{si } m \in \{1,\ldots,r_{n-1}\}\backslash\{k\} \\
\overline{d}_n^{l,k} & = p'' \cdot d_n^{l,k} \ , & \text{si } l \in \{1,\ldots,r_n\}\backslash\{j\} \\
\overline{d}_{n-1}^{k,p} & = d_{n-1}^{k,p} \cdot i'' \ , & \text{si } p \in \{1,\ldots,r_{n-2}\} \\
\overline{d}_n^{j,k} & = p'' \cdot d_n^{j,k} \cdot i' \ , &
\end{array}
$$

et surtout

$$
\overline{d}_n^{l,m} = d_n^{l,m} - d_n^{j,m} \cdot i \cdot g \cdot p \cdot d_n^{l,k} \ , \quad \text{si } \begin{array}{l} l \in \{1,\ldots,r_n\}\backslash\{j\} \\ m \in \{1,\ldots,r_{n-1}\}\backslash\{k\} \end{array}
$$

2.7. PROPOSITION . — *Une réduction d'un multicomplexe est aussi un multicomplexe.*

Démonstration. — Il faut la faire en regardant tous les cas possibles. On vérifie ici, par exemple, que si $m \neq k$ on a $\sum_{l=1}^{r_{m+1}} \overline{d}_n^{l,m} \overline{d}_{n+1}^{i,l} = 0$, où on utilise les mêmes notations que dans la dernière définition. De plus, on utilise les faits suivants :

(1) $i \cdot g \cdot p \cdot d_n^{j,k} = i \cdot \overline{p}$, où $\overline{p} : C_n^j \to C''$ est la projection canonique (la démonstration est triviale).

(2) $d_n^{j,k} d_{n+1}^{i,j} = - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{r_n} d_n^{l,k} d_{n+1}^{i,l}$, car (C,d) est un multicomplexe.

(3) $i\overline{p} + i'p' = 1$.

$$
\begin{aligned}
m \neq k \ , \ \sum_{l=1}^{r_n} \overline{d}_n^{l,m} \overline{d}_{n+1}^{i,l} &= \sum_{l \neq j} \overline{d}_n^{l,m} \cdot \overline{d}_{n+1}^{i,l} + \overline{d}_n^{j,m} \cdot \overline{d}_{n+1}^{i,j} \\
&= \sum_{l \neq j} (d_n^{l,m} - d_n^{j,m} \cdot i \cdot g \cdot p \cdot d_n^{l,k}) d_{n+1}^{i,l} + d_n^{j,m} \cdot i' \cdot p' \cdot d_{n+1}^{i,j} \\
&= \sum_{l \neq j} d_n^{l,m} \cdot d_{n+1}^{i,l} \cdot i \cdot g \cdot p (- \sum_{l \neq j} d_n^{l,k} d_{n+1}^{i,k}) + d_n^{j,m} \cdot i' \cdot p' \cdot d_{n+1}^{i,j} \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{l \neq j} d_n^{l,m} \cdot d_{n+1}^{i,l} + d_n^{j,m} \cdot i \cdot g \cdot p \cdot d_n^{j,k} d_{n+1}^{i,j} + d_n^{j,m} \cdot i' \cdot p' \cdot d_{n+1}^{i,j} \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{l \neq j} d_n^{l,m} \cdot d_{n+1}^{i,l} + d_n^{j,m} (i\overline{p} + i'p') d_{n+1}^{i,j} \\
&\overset{(3)}{=} \sum_{l \neq j} d_n^{l,m} \cdot d_{n+1}^{i,l} + d_n^{j,m} d_{n+1}^{i,j} = \sum_{l=1}^{r_n} d_n^{l,m} d_{n+1}^{i,l} = 0 \ .
\end{aligned}
$$

■

2.8. Exemples. —

(1). — Evidemment si (C,d) est un complexe de chaînes, la définition 2.6 est la même que celle donnée en 1.5.

(2). — On considère un bicomplexe :

$$\begin{tikzcd}
 & & & \vdots \arrow[d] \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & C_2^3 \arrow[d, "d_2^{3,2}"] \\
\cdots \arrow[r] & C_3^2 \arrow[r, "d_3^{2,2}"] \arrow[d, "d_3^{2,1}"'] & C_2^2 \arrow[r, "d_2^{2,2}"] \arrow[d, "d_2^{2,1}"] & C_1^2 \arrow[d, "d_1^{2,1}"] \\
\cdots \arrow[r] & C_2^1 \arrow[r, "d_2^{1,1}"'] & C_1^1 \arrow[r, "d_1^{1,1}"'] & C_0^1 \; .
\end{tikzcd}$$

On suppose que la flèche $d_2^{2,1}$ est réductible; alors avec les notations de la définition 2.6, on a une réduction :

$$\begin{tikzcd}
 & & & \vdots \arrow[d] \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & C_2^3 \arrow[d, "d_2^{3,2}"] \\
\cdots \arrow[r] & C_3^2 \arrow[r, "p'\cdot d_3^{2,2}"] \arrow[d, "d_3^{2,1}"'] & C' \arrow[r, "d_2^{2,2}\cdot i'"] \arrow[d, "p''\cdot d_2^{2,1}\cdot i'"] & C_1^2 \arrow[d, "d_1^{2,1}"] \\
\cdots \arrow[r] & C_2^1 \arrow[r, "p''\cdot d_2^{1,1}"'] \arrow[urr, dashed, "\overline{d}_2^{1,2}"] & \overline{C}' \arrow[r, "d_1^{1,1}\cdot i''"'] & C_0^1
\end{tikzcd}$$

où on voit que la seule modification "réelle" introduite est la flèche $\overline{d}_2^{1,2} = -d_2^{2,2}\cdot i\cdot g\cdot p\cdot d_2^{1,1}$. Donc, en général, la réduction d'un bicomplexe *n'est pas* un autre bicomplexe. Alors $\overline{d}_2^{1,2}$ est appelée *flèche de correction.*

2.9. Théorème. — *Soit (C,d) un multicomplexe et (T,∂) sa totalisation; soit $(\overline{C},\overline{d})$ le résultat d'une réduction et $(\overline{T},\overline{\partial})$ la totalisation de ce nouveau multicomplexe. Alors, il existe une équivalence d'homotopie canonique entre (T,∂) et $(\overline{T},\overline{\partial})$.*

Démonstration. — On maintient les mêmes notations que dans la définition 2.6 et on prend $j=k=1$ pour rendre l'écriture plus commode. On va définir une équivalence d'homotopie $(f,\overline{f},h,\overline{h})$ entre (T,∂) et $(\overline{T},\overline{\partial})$:

$$\begin{aligned}
f_n : C_n^1\oplus C_n^2\oplus\cdots\oplus C_n^{r_n} &\to C'\oplus C_n^2\oplus\cdots\oplus C_n^{r_n}\\
(c_1,c_2,\ldots,c_{r_n}) &\mapsto \big(p'(c_1),c_2,\ldots,c_{r_n}\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{n-1}: C_{n-1}^1\oplus C_{n-1}^2\oplus\cdots\oplus C_{n-1}^{r_{n-1}} &\to \overline{C}'\oplus C_{n-1}^2\oplus\cdots\oplus C_{n-1}^{r_{n-1}}\\
(c_1,c_2,\ldots,c_{r_{n-1}}) &\mapsto \big(p''(c_1),c_2-d_n^{1,2}igp(c_1),\ldots,c_{r_{n-1}}-d_n^{1,r_{n-1}}igp(c_1)\big)
\end{aligned}$$

f_k est l'identité si $k \neq n$, $n-1$.

On vérifie que f est un morphisme de chaînes.

$$\begin{array}{llll} \overline{f}_n: & C' \oplus C_n^2 \oplus \cdots \oplus C_n^{r_n} & \to C_n^1 \oplus C_n^2 \oplus \cdots \oplus C_n^{r_n} \\ & (c_1, c_2, \ldots, c_{r_n}) & \mapsto \big(i'(c_1) - i \cdot g \cdot p \sum_{j=2}^{r_n} d_n^{j,1}(c_j), c_2, \ldots, c_n\big) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \overline{f}_{n-1}: & \overline{C}' \oplus C_{n-1}^2 \oplus \cdots \oplus C_{n-1}^{r_{n-1}} & \to \overline{C}'_{n-1} \oplus C_{n-1}^2 \oplus \cdots \oplus C_{n-1}^{r_{n-1}} \\ & (c_1, c_2, \ldots, c_{r_{n-1}}) & \mapsto \big(i''(c_1), c_2, \ldots, c_{r_{n-1}}\big) \end{array}$$

$\overline{f}_k$ est l'identité si $k \neq n$, $n-1$.

On vérifie que $\overline{f}$ est un morphisme de chaînes.

On définit :

$$\begin{array}{lll} h_{n-1}: & C_{n-1}^1 \oplus \cdots \oplus C_{n-1}^{r_{n-1}} & \to C_n^1 \oplus \cdots \oplus C_n^{r_n} \\ & (c_1, \ldots, c_{r_{n-1}}) & \mapsto \big(i \cdot g \cdot p(c_1), 0, \ldots, 0\big) \end{array}$$

L'application h_k est nulle si $k \neq n-1$.

On vérifie que h est une homotopie entre $\overline{f} \cdot f$ et l'identité; par exemple :

$$\begin{aligned} &(h_{n-1}\partial_n + \overline{f}_n f_n)(c_1, \ldots, c_{r_n}) \\ &= h_{n-1}\Big(\sum_{j=1}^{r_n} d_n^{j,1}(c_j), \ldots, \sum_{j=1}^{r_n} d_n^{j,r_{n-1}}(c_j)\Big) + \overline{f}_n(p'(c_1), c_2, \ldots, c_n) \\ &= \Big(i \cdot g \cdot p \sum_{j=1}^{r_n} d_n^{j,1}(c_j), 0, \ldots, 0\Big) + \Big(i'p'(c_1) - i \cdot g \cdot p \sum_{j=2}^{r_n} d_n^{j,1}(c_j), c_2, \ldots, c_{r_n}\Big) \\ &= \big(igpd_n^{1,1}(c_1) + i'p'(c_1), c_2, \ldots, c_{r_n}\big) \\ &= \big(i\overline{p}(c_1) + i'p'(c_1), c_2, \ldots, c_{r_n}\big) = (c_1, c_2, \ldots, c_{r_n}) \end{aligned}$$

On voit que $f_k \cdot \overline{f}_k$ est l'identité pour tout k; par exemple :

$$\begin{aligned} f_{n-1} \cdot \overline{f}_{n-1}(c_1, \ldots, c_{r_{n-1}}) &= f_{n-1}\big(i''(c_1), c_2, \ldots, c_{r_{n-1}}\big) \\ &= \big(p''i''(c_1), c_2 - d_n^{1,2} \cdot i \cdot g \cdot p \cdot i''(c_1), \ldots, c_{r_{n-1}} - d_n^{1,r_{n-1}} \cdot i \cdot g \cdot p \cdot i''(c_1)\big) \\ &= (c_1, c_2, \ldots, c_{r_{n-1}}) , \end{aligned}$$

car $p'' \cdot i'' = 1$ et $p \cdot i'' = 0$.

Donc, on peut définir l'homotopie $\overline{h}$ entre $f \cdot \overline{f}$ et l'identité comme $\overline{h}_k = 0$, pour tout k . ■

2.10. Remarque importante. — On peut remarquer dans la démonstration que les seules données importantes dont on a besoin pour définir l'équivalence d'homotopie entre (T, ∂) et $(\overline{T}, \overline{\partial})$ sont (n, j, k, g) . Si on suppose qu'on réduit chaque flèche d'un multicomplexe (C, d) jusqu'à en trouver un autre $(\overline{\overline{C}}, \overline{\overline{d}})$ et si à chaque étape, on a sauvegardé toute l'information nécessaire, on pourra donner explicitement une équivalence d'homotopie entre (T, ∂) et la totalisation de $(\overline{\overline{C}}, \overline{\overline{d}})$. Ainsi, si on a un complexe de chaînes (T, ∂) qui est la totalisation d'un multicomplexe (C, d), une méthode pour nous rapprocher de l'homologie effective de (T,∂) consiste à réduire chaque flèche de (C,d) et à totaliser ensuite. C'est le principal outil qu'on utilisera pour calculer l'homologie effective dans les paragraphes suivants. Bien que ce ne soit pas indiqué, on supposera que chaque fois qu'on réduit une flèche d'un multicomplexe, on sauvegarde en même temps toute l'information nécessaire pour la suite.

3. Suites exactes courtes

Dans ce paragraphe et le suivant, si on dit qu'on connaît l'homologie effective HC_* d'un complexe de chaînes (C,d) il faut comprendre qu'on sait la calculer par réduction de chacune des flèches d_n , comme indiqué dans le paragraphe 1.

3.1. DÉFINITION. — *Soient* $(A_*,\overline{d})$, (B_*,d) , $(C_*,\overline{\overline{d}})$ *trois complexes de chaînes. Une suite exacte courte associée à ces complexes est un ensemble de données* (i,p,j,q) , *où* $i_n : A_n \to B_n$, $p_n : B_n \to C_n$, $j_n : C_n \to B_n$, $q_n : B_n \to A_n$ *sont des morphismes de* **Z***-modules, pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *vérifiant :*

(i) $d_n i_n + i_{n-1}\overline{d}_n = 0$

(ii) $\overline{\overline{d}}_n\, p_n + p_{n-1} d_n = 0$

(iii) $q_n i_n = 1$, *pour tout* $n \in \mathbf{N}$

(iv) $p_n j_n = 1$

(v) $i_n q_n + j_n p_n = 1$.

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
A_n \arrow[d, "\overline{d}_n"'] \arrow[r, shift right, "i_n"'] & B_n \arrow[l, shift right, "q_n"'] \arrow[d, "d_n"] \arrow[r, shift left, "p_n"'] & C_n \arrow[l, shift left, "j_n"'] \arrow[d, "\overline{\overline{d}}_n"] \\
A_{n-1} \arrow[d] \arrow[r, shift right, "i_{n-1}"'] & B_{n-1} \arrow[l, shift right, "q_{n-1}"'] \arrow[d] \arrow[r, shift left, "p_{n-1}"'] & C_{n-1} \arrow[l, shift left, "j_{n-1}"'] \arrow[d] \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

3.2. REMARQUES. —

1) Remarquer que donner une suite exacte courte équivaut à donner $(\overline{\imath},\overline{p},\overline{\jmath},\overline{q})$, où $\overline{\imath} : (A_*,\overline{d}) \to (B_*,d)$, $\overline{p} : (B_*,d) \to (C_*,\overline{\overline{d}})$ sont des morphismes de chaînes et $\overline{\jmath},\overline{q}$ vérifient les conditions *(iii)–(iv)–(v)* de la définition. Il suffit pour cela de définir $\overline{\imath}_n = (-1)^n i_n$ et de même pour les autres morphismes de **Z**-modules. On a choisi cette définition parce qu'elle est plus commode pour les applications en vue.

2) Les conditions *(iii)–(iv)–(v)* de la définition impliquent que i_n est injective, p_n surjective et $\operatorname{Im} i_n = \operatorname{Ker} p_n$, pour tout n; autrement dit pour tout n on a une suite exacte courte de $\mathbf{Z}$-modules : $0 \to A_n \xrightarrow{i_n} B_n \xrightarrow{p_n} C_n \to 0$. Comme on travaille avec des $\mathbf{Z}$-modules libres, on aura que, pour tout n : $B_n = \operatorname{Im} i_n \oplus \overline{C}_n$, où $p_n | \overline{C}_n : \overline{C}_n \to C_n$ est ún isomorphisme.

3) La définition classique de suite exacte courte de complexes de chaînes est une suite $(A_*, \overline{d}) \xrightarrow{i} (B_*, d) \xrightarrow{p} (C_*, \overline{\overline{d}})$, où i, p sont des morphismes de chaînes tels que, pour tout n , i_n, p_n donnent une suite exacte courte de $\mathbf{Z}$-modules. Puisque nous travaillons avec des $\mathbf{Z}$-modules libres, chacune de ces suites exactes courtes est "split" et donc on sait qu'il existe j_n, p_n vérifiant les conditions *(iii)–(iv)–(v)* de la définition. Donc, compte tenu de la remarque 1), on voit de nouveau que la seule différence réelle entre la définition classique et la définition effective est qu'on exige que j, q soient données *explicitement.*

4) On appellera *homologie effective d'un multicomplexe* l'homologie effective de sa totalisation.

Dans tout ce paragraphe $(A_*, \overline{d})$, (B_*, d) , $(C_*, \overline{\overline{d}})$ sont des complexes de chaînes et (i, p, j, q) une suite exacte courte entre eux.

3.3. PROPRIÉTÉ. — *Le multicomplexe (bicomplexe)*

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
A_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "\overline{d}_n"'] & B_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "d_n"] & C_n \arrow[d, "\overline{\overline{d}}_n"] \\
A_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"'] \arrow[d] & B_{n-1} \arrow[r, "p_{n-1}"'] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[d] \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

a une homologie effective triviale.

Démonstration. — Ce diagramme est bien un bicomplexe, avec les degrés : $\operatorname{gr}(A_n) = n + 1$, $\operatorname{gr}(B_n) = n$, $\operatorname{gr}(C_n) = n - 1$.

On considère la flèche i_0 . Puisque $B_0 = \operatorname{Im} i_0 \oplus \overline{C}_0$ et que i_0 est injective, en réduisant la flèche i_0 on obtient un niveau multicomplexe

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
A_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d] & B_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d] \arrow[ddl, bend right] & C_1 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & \overline{C}_0 \arrow[r, "p_0|\overline{C}_0"'] & C_0 \\
0 & &
\end{tikzcd}$$

où il est évident que la flèche de correction est nulle. Alors par réduction successive des flèches $i_1, i_2, \ldots$, on obtient le multicomplexe :

$$\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow \\
\overline{C}_n & \xrightarrow{p_n|\overline{C}_n} & C_n \\
\downarrow & & \downarrow \\
\overline{C}_{n-1} & \xrightarrow[p_{n-1}|\overline{C}_{n-1}]{} & C_{n-1} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

où $\overline{C}_n$ vérifie $B_n = \operatorname{Im} i_n \oplus \overline{C}_n$ et où $p_n|\overline{C}_n$ est un isomorphisme; donc une nouvelle réduction donne le résultat désiré. ∎

3.4. Remarques. —

1) Il est facile de vérifier que l'application qui associe à un complexe de chaînes (C_*, d) son homologie effective $\{(HC_*, d), f, g, h, h'\}$ (comme on a indiqué au début du paragraphe) peut être considérée comme un foncteur de la catégorie des complexes de chaînes à homologie effective vers une catégorie d'équivalences d'homotopie (Remarquer qu'on maintient la convention de 1.16 d'utiliser d pour représenter l'opérateur bord de C_* et celui de HC_*). En particulier, on a un foncteur de la catégorie des complexes de chaînes à homologie effective vers celle des complexes de chaînes irréductibles, donné par : $(C_*, d) \mapsto (HC_*, d)$. Si m : $(C_*, d) \to (\overline{C}_*, \overline{d})$ est un morphisme de chaînes, on notera m^* : $(HC_*, d) \to (H\overline{C}_*, \overline{d})$ le morphisme induit. Remarquer que m^* est défini comme un composé de morphisme connus. De même, si i est un ensemble de morphismes de $\mathbf{Z}$-modules entre complexes vérifiant la condition *(i)* de la définition 3.1, on lui associe un autre ensemble i^* de morphismes de $\mathbf{Z}$-modules entre les homologies effectives des complexes vérifiant cette même condition.

2) Classiquement, si on a une suite exacte courte entre complexes de chaînes il y a une suite exacte longue décrivant des relations entre les groupes d'homologie des trois complexes. Pourtant, en général, si on connaît deux sur trois de ces homologies on ne peut pas en déduire la troisième homologie. Les propositions suivantes montrent que, en homologie effective, connaître deux sur trois des homologies effectives des complexes d'une suite exacte courte permet d'en déterminer la troisième.

3.5. Proposition. — *Soit $(i, p, \underline{\underline{j}}, q)$ une suite exacte courte entre les complexes de chaînes $(A_*, \overline{d})$, (B_*, d) , $(C_*, \overline{d})$. Si on connaît l'homologie effective de*

$(A_*, \overline{d})$, (B_*, d) , *celle de* $(C_*, \overline{\overline{d}})$ *est celle du bicomplexe :*

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & HA_n \arrow[rr, "i_n^*"] \arrow[d, "\overline{d}_n"'] & & HB_n \arrow[r] \arrow[d, "d_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & HA_{n-1} \arrow[rr, "i_{n-1}^*"'] \arrow[d] & & HB_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — On considère le bicomplexe (1) :

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[rr, "i_n"] \arrow[d, "\overline{d}_n"'] & & B_n \arrow[r] \arrow[d, "d_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[rr, "i_{n-1}"'] \arrow[d] & & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Comme dans la démonstration de 3.3, par réduction des flèches $i_0, i_1, \ldots$, on obtient un complexe :

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] \\
\overline{C}_n \arrow[d, "d_n | \overline{C}_n"] \\
\overline{C}_{n-1} \arrow[d] \\
\vdots
\end{tikzcd}$$

qui est canoniquement isomorphe à $(C_*, \overline{d})$.

On voit que si dans le bicomplexe (1) on fait une réduction d'un morphisme vertical (à droite ou à gauche) la flèche de correction est nulle.

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & B_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{A}' \arrow[r] \arrow[d] & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Donc, en réduisant toutes les flèches verticales on obtient :

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & HA_n \arrow[r] \arrow[d] & HB_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & HA_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & HB_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

d'où on déduit le résultat. ∎

3.6. Proposition. — *Soit (i,p,j,q) une suite exacte courte entre les complexes de chaînes $(A_*,\overline{d})$, (B_*,d) , $(C_*,\overline{\overline{d}})$. Alors, si on connaît l'homologie effective de (B_*,d) et $(C_*,\overline{\overline{d}})$, l'homologie effective de $(A_*,\overline{d})$ est celle du bicomplexe :*

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & HB_n \arrow[r, "p_n^*"] \arrow[d, "\overline{d}_n"'] & HC_n \arrow[r] \arrow[d, "d_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & HB_{n-1} \arrow[r, "p_{n-1}^*"'] \arrow[d] & HC_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Elle est analogue à celle de 3.5.

3.7. Proposition. — *Soit (i,p,j,q) une suite exacte courte entre les complexes de chaînes $(A_*,\overline{d})$, (B_*,d) , $(C_*,\overline{\overline{d}})$. Alors, si on connaît l'homologie effective de $(A_*,\overline{d})$ et $(C_*,\overline{\overline{d}})$, l'homologie effective de (B_*,d) est celle du bicomplexe :*

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] \arrow[dll] \\
HA_n \arrow[d, "\bar{d}_n"'] & \bar{f}_n & HC_n \arrow[d, "\bar{\bar{d}}_n"] \arrow[dll] \\
HA_{n-1} \arrow[d] & & HC_{n-1} \arrow[d] \arrow[dll, dash] \\
\vdots & & \vdots
\end{tikzcd}$$

où $\mathrm{gr}(HA_n) = \mathrm{gr}(HC_n) = n$ *et* $\bar{f}_n$ *est le composé*

$$HC_n \longrightarrow C_n \xrightarrow{-j_n} B_n \xrightarrow{d_n} B_{n-1} \xrightarrow{q_{n-1}} A_{n-1} \longrightarrow HA_{n-1} \ .$$

Démonstration. — Remarquer d'abord que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] \\
A_n \arrow[d, "\bar{d}_n"'] & f_n & C_n \arrow[d, "\bar{\bar{d}}_n"] \arrow[dll] \\
A_{n-1} \arrow[d] & f_{n-1} & C_{n-1} \arrow[d] \arrow[dll, dash] \\
\vdots & & \vdots
\end{tikzcd}$$

où $f_n = -q_{n-1} d_n j_n$ définit bien un bicomplexe. On va vérifier, par exemple, que $d_{n-1} f_n + f_{n-1}\, \bar{\bar{d}}_n = 0$. Si on applique i_{n-2} au premier terme de cette égalité et si on change le signe, on obtient :

$$\begin{aligned}
i_{n-2}\bar{d}_{n-1} q_{n-1} d_n j_n &+ i_{n-2} q_{n-2} d_{n-1} j_{n-1}\, \bar{\bar{d}}_n \\
&= d_{n-1} i_{n-1} q_{n-1} d_n j_n + d_{n-1} j_{n-1}\, \bar{\bar{d}}_n - j_{n-2} p_{n-2} d_{n-1} j_{n-1}\, \bar{\bar{d}}_n \\
&= -d_{n-1} j_{n-1} p_{n-1} d_n j_n + d_{n-1} j_{n-1}\, \bar{\bar{d}}_n - j_{n-2}\, \bar{\bar{d}}_{n-1}\, p_{n-1} j_{n-1}\, \bar{\bar{d}}_n \\
&= -d_{n-1} j_{n-1}\, \bar{\bar{d}}_n\, p_n j_n + d_{n-1} j_{n-1}\, \bar{\bar{d}}_n - j_{n-2}\, \bar{\bar{d}}_{n-1} \bar{\bar{d}}_n \\
&= -d_{n-1} j_{n-1}\, \bar{\bar{d}}_n + d_{n-1} j_{n-1}\, \bar{\bar{d}}_n = 0 \ ,
\end{aligned}$$

où dans cette suite d'égalités on a utilisé les propriétés *(i)–(v)* de la définition de suite exacte courte. Puisque i_{n-2} est injective on obtient l'égalité cherchée.

La totalisation de ce bicomplexe, dont l'opérateur de bord est

$$\begin{aligned}
\partial_n : A_n \oplus C_n &\to A_{n-1} \oplus C_{n-1} \\
(a, c) &\mapsto (\bar{d}_n a - q_{n-1} d_n j_n c, \bar{\bar{d}}_n\, c)
\end{aligned} ,$$

est canoniquement isomorphe à (B_*, d) par l'application

$$\begin{aligned}
A_n \oplus C_n &\to B_n \\
(a, c) &\mapsto -i_n(a) - j_n(c) \ .
\end{aligned}$$

Il suffit maintenant de remarquer, comme à la fin de la démonstration de 3.5, que les réductions des morphismes verticaux du bicomplexe n'introduisent pas de flèches de correction, et on obtient bien :

$$\begin{tikzcd} \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] \\ HA_n \arrow[d, "\bar{d}_n"'] & & HC_n \arrow[d, "\bar{\bar{d}}_n"] \arrow[dll, "\bar{f}_n"'] \\ HA_{n-1} \arrow[d] & & HC_{n-1} \arrow[d] \\ \vdots & & \vdots \end{tikzcd} .$$

■

4. Formule de Künneth et théorème des coefficients universels en homologie effective

Dans ce paragraphe, on va étudier en homologie effective les théorèmes correspondant à la formule de Künneth et à celle des coefficients universels en Algèbre Homologique classique; on verra que l'expression des résultats et leur démonstration sont sensiblement plus simples en homologie effective.

4.1. THÉORÈME Formule de Künneth en homologie effective. — *Soient* (A_*, d) , $(B_*, \bar{d})$ *deux complexes de chaînes à homologie effective. Alors :*

$$H(A \otimes B)_* = H(HA \otimes HB)_* .$$

Démonstration. — On considère le bicomplexe qui définit le produit tensoriel de complexes de chaînes :

$$\begin{tikzcd} & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\ \cdots \arrow[r] & A_p \otimes B_q \arrow[r, "d_p \otimes 1"] \arrow[d, "(-1)^p \otimes \bar{d}_q"'] & A_{p-1} \otimes B_q \arrow[r] \arrow[d, "(-1)^{p-1} \otimes \bar{d}_q"] & \cdots \\ & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\ \cdots \arrow[r] & A_p \otimes B_{q-1} \arrow[r, "d_p \otimes 1"] & A_{p-1} \otimes B_{q-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Soit maintenant $\bar{d}_q : B_q = B' \oplus B'' \to \overline{B}' \oplus \overline{B}''$ réductible, où $g = (d_q | B'')^{-1} : \overline{B}'' \to B''$ est un isomorphisme et $p : B_{q-1} \to \overline{B}'$, $i : B' \to B_q$ sont la projection et l'inclusion canonique, respectivement. Puisque $N_1 \otimes (N_2 \oplus N_3) \cong (N_1 \oplus N_2) \otimes (N_1 \oplus N_3)$, une réduction de $\overline{d}_q$ induit une réduction de la flèche verticale correspondante du bicomplexe :

$$\begin{tikzcd}
 & & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
 & \cdots \arrow[r] & A_p \otimes B' \arrow[r] \arrow[d] & A_{p-1} \otimes B_q \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A_{p+1} \otimes B_{q-1} \arrow[r] \arrow[urr, bend left] & A_p \otimes \overline{B}' \arrow[r] \arrow[d] & A_{p-1} \otimes B_{q-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Mais la flèche de correction est :

$$(d_p \otimes 1)(1 \otimes i)\big((-1)^p \otimes g\big)(d_{p+1} \otimes p) = (-1)^p d_p d_{p+1} \otimes ipg = 0 \,.$$

Donc par des réductions verticales de ce type on obtient :

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & A_p \otimes HB_q \arrow[r, "d_p \otimes 1"] \arrow[d, "(-1)^p \otimes \overline{d}_q"'] & A_{p-1} \otimes HB_q \arrow[r] \arrow[d, "(-1)^{p-1} \otimes \overline{d}_q"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A_p \otimes HB_{q-1} \arrow[r, "d_p \otimes"'] \arrow[d] & A_{p-1} \otimes HB_{q-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

On vérifie de même que les réductions horizontales de ce bicomplexe associées à celles des d_p donnent aussi des flèches de correction nulle. Donc par réductions horizontales de ce type on arrive à :

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & HA_p \otimes HB_q \arrow[r, "d_p \otimes 1"] \arrow[d, "(-1)^p \otimes \overline{d}_q"'] & HA_{p-1} \otimes HB_q \arrow[r] \arrow[d, "(-1)^{p-1} \otimes \overline{d}_q"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & HA_p \otimes HB_{q-1} \arrow[r, "d_p \otimes"'] \arrow[d] & HA_{p-1} \otimes HB_{q-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

dont la totalisation n'est autre que $(HA \otimes HB)_*$. ■

4.2. COROLLAIRE Théorème de coefficients universels en homologie effective. *Soit G un $\mathbb{Z}$-module et (K, F, j, p) une présentation de G . Soit P_* le complexe de* *chaînes* $0 \to K \xrightarrow{j} F \to 0$ *et* (C_*, d) *un complexe de chaînes à homologie effective. Alors :*

$$H(C_*; G) = H(HP \otimes HC)_* .$$

4.3. COROLLAIRE. Théorème de coefficients universels (cas libre). — *Soit* G *un* $\mathbf{Z}$*-module libre et* (C_*, d) *un complexe de chaînes à homologie effective. Alors :*

$$H(C_*; G) = H(G \otimes HC)_* .$$