COURS DE L'INSTITUT FOURIER

JULIO RUBIO
FRANCIS SERGERAERT

3. Homologie effective des fibrés simpliciaux

Cours de l'institut Fourier, tome 20 (1986), p. 71-85
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1986__20__71_0>

3. Homologie effective des fibrés simpliciaux

9. Suites spectrales. Théorème de Serre

9.1. DÉFINITIONS. — *Un* $\mathbf{Z}$*-module bigradué est une famille* $E = \{E_{p,q}\}$, *où* $E_{p,q}$ *est un* $\mathbf{Z}$*-module et* $p, q \in \mathbf{Z}$. *Une différentielle* $d : E \to E$ *de degré* $(-r, r-1)$ *d'un* $\mathbf{Z}$*-module bigradué* E *est une famille de morphismes de* $\mathbf{Z}$*-modules* $d \equiv d_{p,q} : E_{p,q} \to E_{p-r,q+r-1}$, *pour chaque* $p, q \in \mathbf{Z}$, *telle que* $d_{p,q} \circ d_{p+r,q-r+1} = 0$. *L'homologie d'un* $\mathbf{Z}$*-module bigradué* E *avec une différentielle* d *de degré* $(-r, r-1)$ *est le* $\mathbf{Z}$*-module bigradué* $H(E) \equiv H(E,d) = \{H_{p,q}(E)\}$, *où* $H_{p,q}(E) = \operatorname{Ker} d_{p,q} / \operatorname{Im} d_{p+r,q-r+1}$. *Les morphismes entres* $\mathbf{Z}$*-modules bigradués sont définis d'une façon naturelle (avec degré* $(0,0)$*).*

9.2. DÉFINITION. — *Une suite spectrale* E *est un ensemble de données* $\{E^r, d^r, \varphi^r\}_{r\in\mathbf{N}}$, *où* E^r *est un* $\mathbf{Z}$*-module bigradué vérifiant* $E^r_{p,q} = 0$ *si* $p < 0$ *ou* $q < 0$*;* d^r *est une différentielle de* E^r *de degré* $(-r, r-1)$ *et* $\varphi^r = H(E^r, d^r) \to E^{r+1}$ *est un isomorphisme de* $\mathbf{Z}$*-modules bigradués. On notera simplement* $E = \{E^r_{p,q}\}$.

9.3. REMARQUE. — On peut définir des suites spectrales plus générales : les E^r peuvent être des modules sur un anneau quelconque et $E^r_{p,q}$ peut être non nul si $p < 0$ ou $q < 0$. Les suites spectrales vérifiant $E^r_{p,q} = 0$ si p ou $q < 0$ sont appelées *suites spectrales "premier quadrant"*.

9.4. PROPRIÉTÉ. — *Si* $E = \{E^r_{p,q}\}$ *est une suite spectrale, alors* $E^r_{p,q}$ *et* $E^{r+1}_{p,q}$ *sont isomorphes comme* $\mathbf{Z}$*-modules, pour tout* $r > \max(p, q+1)$

Démonstration. — La propriété résulte du fait que $E^r_{p,q} = 0$, si $p, q < 0$.

9.5. DÉFINITION. — *De la dernière propriété, il résulte la définition pour toute suite spectrale* $\{E^r_{p,q}\}$ *d' un nouveau* $\mathbf{Z}$*-module bigradué* E^∞ *défini par* $E^\infty_{p,q} = E^r_{p,q}$ *si* r *vérifie l'inégalité* $r > \max\{p, q+1\}$.

9.6. DÉFINITIONS. — *Une filtration* $\{F_{p,q}\}_{n\in\mathbf{N}}$ *d'un* $\mathbf{Z}$*-module gradué* $F = \{F_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *est une famille de* $\mathbf{Z}$*-modules* $F_{p,q}$ *telle que pour tout* $n \in \mathbf{N}$ *une suite*

$$0 = F_{-1,n+1} \subset F_{0,n} \subset F_{1,n-1} \subset \cdots \subset F_{n-1,1} \subset F_{n,0} = F_n$$

est définie. On dit qu'une suite spectrale $\{E^r_{p,q}\}$ *converge vers un* $\mathbf{Z}$*-module gradué* F *si* F *a une filtration* $\{F_{p,q}\}$ *tel que* $E^\infty_{p,q}$ *est isomorphe à* $F_{p,q}/F_{p-1,q+1}$, *pour tout* $p, q \in \mathbf{N}$. *Une filtration* $\{F_{p,q}\}$ *d'un* $\mathbf{Z}$*-module gradué différentiel* (F, d) *(voir la définition 7.10) doit vérifier en outre que* $d_{p+q}(F_{p,q}) \subset F_{p-1,q}$ *et on définit* $H(F_{p,q}) = \operatorname{Ker}(d_{p+q}|F_{p,q})/d_{p+q+1}(F_{p+1,q})$. *Alors, si* $i : F_{p,q} \hookrightarrow F$ *est l'inclusion canonique, la famille des* $i_*[H(F_{p,q})]$ *définit une filtration de* $H(F)$, *appelée filtration de* $H(F)$ *induite par* $\{F_{p,q}\}$.

9.7. THÉORÈME. — *Si* $\{F_{p,q}\}$ *est une filtration d'un* $\mathbf{Z}$*-module gradué différentiel* F *, il existe une suite spectrale* $\{E^r_{p,q}\}$ *qui converge vers* $H(F) = \{H_n(F)\}$ *avec la filtration de* $H(F)$ *induite par* $\{F_{p,q}\}$ *. Cette suite* $\{E^r_{p,q}\}$ *est appelée suite spectrale associée à la filtration* $\{F_{p,q}\}$ *.*

Démonstration. — Voir les théorème XI.3.1 et XI.3.3 de [ML].

Avec ces définitions et résultats, on peut donner une idée de la construction de la *suite spectrale de Serre*, qui met en rapport l'homologie de l'espace total d'une fibration et celles de l'espace de base et de la fibre.

9.8. THÉORÈME. Théorème de Serre. — *Soit* $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ *une fibration de Serre, où* B *est simplement connexe. On peut alors définir une suite spectrale* $\{E^r_{p,q}\}$ *qui converge vers* $\{H_n(E)\}$ *telle que :*

a) $E^0_{p,q} = C_p(B) \otimes C_q(F)$ *et* d^0 *est la différentielle induite par celle de* $C_*(F)$ *.*

b) $E^1_{p,q} = C_p(B) \otimes H_q(F)$ *et* d^1 *est la différentielle induite par celle de* $C_*(B)$ *.*

c) $E^2_{p,q} = H_p(B; H_q(F))$ *.*

Esquisse de démonstration. — La référence originale est [S]. On doit considérer que $C_*(F)$, $C_*(E)$ et $C_*(B)$ sont les complexes de chaînes associés à des *cubes singuliers* (il est bien connu que la théorie d'homologie résultante est isomorphe à l'homologie singulière). Alors la suite spectrale $\{E^r_{p,q}\}$ est celle associée, comme dans le théorème 9.7, à une filtration $\{F_{p,q}\}$ de $\{C_{p+q}(E)\}$ définie par : $F_{p,q} = \{$ $\mathbf{Z}$-module libre engendré par les $(p+q)$-cubes singuliers de E tels que l'image par la projection p ne dépend pas des q dernières coordonnées $\} \subset C_{p+q}(E)$. ∎

EXEMPLE. Calcul de $H_4\big(K(\mathbf{Z}_2, 2)\big)$. — On va donner un exemple d'utilisation de la suite spectrale de Serre pour calculer les groupes d'homologie; dans cet exemple on trouvera les ambiguïtés dans les problèmes d'extension qui apparaissent fréquemment dans les suites spectrales.

On supposera ici qu'on connaît la suite spectrale de Serre en cohomologie (très analogue à celle en homologie, mais toutes les flèches doivent être renversées) et les théorèmes de coefficients universels : celui énoncé dans le théorème 8.22 et aussi celui qui affirme l'existence d'un isomorphisme :

$$H^n(K; G) \simeq H^n(K) \otimes G \oplus \mathrm{Tor}\big(H^{n+1}(K); G\big) .$$

Ce dernier théorème de coefficients universels est rarement donné dans les manuels d'Algèbre Homologique (référence ?), mais il peut être déduit de la relation plus connue :

$$H_n(L \otimes G) \simeq H_n(L) \otimes G \oplus \mathrm{Tor}\big(H_{n-1}(L); G\big)$$

(c'est le théorème V.11.1 de [ML], par exemple), en prenant $L_{-n} = \mathrm{Hom}(K_n; \mathbf{Z})$ et compte-tenu que $\mathrm{Hom}(K_n; \mathbf{Z}) \otimes G \simeq \mathrm{Hom}(K_n; G)$.

On considère d'abord la fibration $F \hookrightarrow E \to X$, où $F = K(\mathbf{Z}_2, 1)$, $E = E(\mathbf{Z}_2, 2)$, $X = K(\mathbf{Z}_2, 2)$. La fibre F est l'espace projectif $P^\infty\mathbf{R}$, donc son homologie et sa cohomologie sont de torsion (les groupes d'homologie sont $\mathbf{Z}_2$ ou 0, si $n > 0$) . On peut maintenant regarder la suite spectrale d'homologie de cette fibration et l'appliquer au foncteur $- \otimes \mathbf{Q}$, où $\mathbf{Q}$ est le corps des nombres rationnels. Toutes les propriétés de suite spectrale sont conservées (on obtient une autre suite spectrale qui converge vers l'homologie à coefficients dans $\mathbf{Q}$ de l'espace total). Donc, $H_n(F)$ étant de torsion et $H_n(E)$ acyclique, on a $H_n(F;\mathbf{Q}) = H_n(E;\mathbf{Q}) = 0$, il en résulte que $H_n(X;\mathbf{Q}) = 0$ et on a démontré que tous les groupes (sauf le 0-ième) de X sont de torsion.

Par les théorèmes de coefficients universels :

$$H^5(X) \cong \mathrm{Hom}\big(H_5(X);\mathbf{Z}\big) \oplus \mathrm{Ext}\big(H_4(X);\mathbf{Z}\big) .$$

Mais $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_p;\mathbf{Z}) = 0$ et $\mathrm{Ext}(\mathbf{Z}_p;\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}_p$, donc $H^5(X) \cong H_4(X)$, car $H_5(X)$ et $H_4(X)$ sont de torsion. On va calculer $H^5(X)$ en utilisant la suite spectrale de Serre en cohomologie pour notre fibration.

Puisque $K(\mathbf{Z}_2, 1) = P^\infty\mathbf{R}$, $H^n(F)$ est :

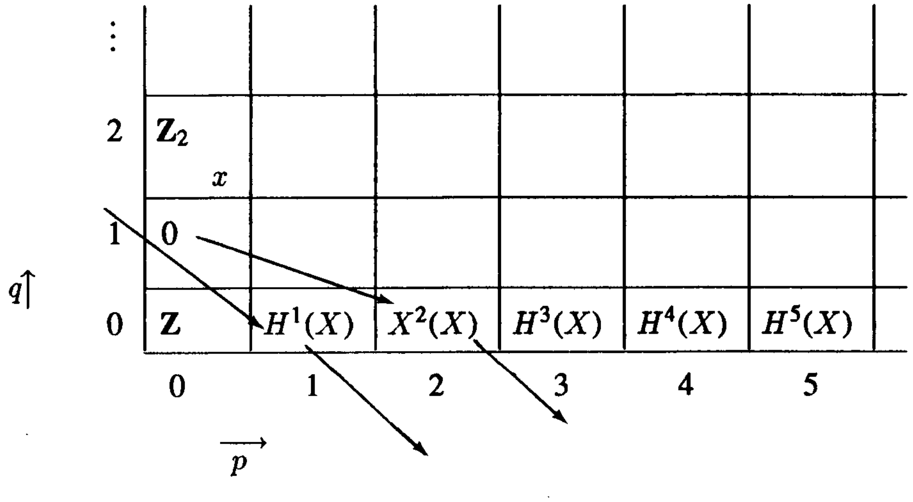
H	0	1	2	3	4	5	6	
	$\mathbf{Z}$	0	$\mathbf{Z}_2$	0	$\mathbf{Z}_2$	0	$\mathbf{Z}_2$	...
générateur	1		x		x^2		x^3	

Dans la suite spectrale on a :

$$E_2^{0,q} = H^0\big(X;H^q(F)\big) \underset{\text{car } X \text{ est connexe}}{=} H^q(F) = H^q(P^\infty\mathbf{R})$$

$$E_2^{p,0} = H^p\big(X;H^0(F)\big) = H^p\big(K(\mathbf{Z}_2;2)\big)$$

Donc à ce niveau, on a :



On voit par examen du diagramme que $H^1(X)$ reste stable, donc $H^1(X) \cong E_3^{1,0} \cong E_3^{1,0} \cong E_4^{1,0} \cong \cdots \cong E_\infty^{1,0}$. Mais E est acyclique, donc $H^1(X) = 0$. D'une façon tout à fait analogue on voit que $H^2(X) = 0$.

Par coefficients universels on a

$$H^1(X;G) = H^1(X) \otimes G \oplus \mathrm{Tor}\big(H^2(X);G\big) = 0 ,$$

pour tout G; donc $E_2^{1,q} = H^1\big(X; H^q(F)\big) = 0$.

En plus, $E_2^{p,1} = H^p\big(X, H^1(F)\big) = 0$.

Ainsi un diagramme plus complet au niveau 2 serait :

	$\vdots$				
$\mathbf{Z}_2$ x	0				
0	0	0	0	0	$\cdots$
$\mathbf{Z}$ 1	0	0	$H^3(X)$	$H^4(X)$	$H^5(X)$

$q\uparrow$ $\quad \overrightarrow{p}$

Dans ce diagramme on voit que $E_2^{0,2} \cong \mathbf{Z}_2$ reste stable, autrement dit $E_3^{0,2} \cong \mathbf{Z}_2$. Mais à partir de $n \geqslant 4$, toutes les flèches qui arrivent au ou partent du terme $(0,2)$ sont nulles, donc puisque $E_\infty^{0,2} = 0$ (E est acyclique), c'est que $d_{0,2}^3 : \mathbf{Z}_2 \to E_3^{3,0}$ est un isomorphisme. D'autre part, on peut voir dans le diagramme que $E_2^{3,0} = H^3(X)$ reste stable, donc $E_3^{3,0} \cong H^3(X)$ et on a démontré que $H^3(X) = \mathbf{Z}_2$.

On voit aussi que $E_2^{4,0} = H^4(X)$ reste stable. Donc $E_3^{4,0} \cong H^4(X)$. Mais $d_3^{1,2} : E_3^{1,2} = 0 \to H^4(X)$, donc $E_4^{4,0} \cong H^4(X)$. On a aussi $d_4^{0,3} : E_4^{0,3} = 0 \to H^4(X)$ et $E_5^{4,0} \cong H^4(X)$; mais à partir de $n > 5$ toutes les flèches qui arrivent au ou partent du terme $(4,0)$ sont nulles; donc $H^4(X) \cong E_\infty^{4,0} = 0$. On a $\mathrm{Tor}(\mathbf{Z}_2;\mathbf{Z}_2) \cong \mathbf{Z}_2$ et on déduit :

$$\begin{aligned} E_2^{2,2} &= H^2\big(X; H^2(F)\big) = H^2(X;\mathbf{Z}_2) \\ &\cong H^2(X) \otimes \mathbf{Z}_2 \oplus \mathrm{Tor}\big(H^3(X);\mathbf{Z}_2\big) \\ &\cong \mathrm{Tor}(\mathbf{Z}_2;\mathbf{Z}_2) \cong \mathbf{Z}_2 \ , \end{aligned}$$

car $H^2(X) = 0$ et $H^3(X) \cong \mathbf{Z}_2$.

D'une façon analogue : $E_2^{2,4} = \mathbf{Z}_2$.

Le nouveau diagramme est :

$\mathbf{Z}_2$ x^2	0				
0	0	$E_2^{2,3}$			
$\mathbf{Z}_2$ x	0	$\mathbf{Z}_2$	$E_2^{3,2}$	$\mathbf{Z}_2$	
0	0	0	0	0	0
$\mathbf{Z}$	0	0	$\mathbf{Z}_2$	0	$H^5(X)$

On a $E_2^{2,3} = H^2(X; H^3(F)) = 0$, car $H^3(F) = 0$. Donc $E_2^{0,4} = \mathbf{Z}_2$ reste stable : $E_3^{0,4} \cong \mathbf{Z}_2$. On voit sur le diagramme que $E_3^{3,2} \cong E_2^{3,2}$. On a donc une flèche $d_3^{0,4} : \mathbf{Z}_2 \to E_3^{3,2}$. On veut connaître qui est $d_3^{0,4}(x^2)$, où x est le générateur de $H^2(F)$.

Les différentielles de la suite spectrale de Serre sont des dérivations (elles sont compatibles avec la structure d'anneau de cohomologie) (voir le théorème III.5.11 de [B-T]) :

$$d_3^{0,4}(x^2) = 2d_3^{0,2}(x) \cdot x = 0 ,$$

car $d_3^{0,2}(x) \in E_3^{3,0} \cong E_2^{3,0} \cong \mathbf{Z}_2$.

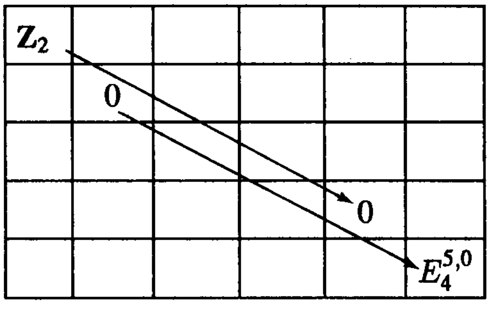
Ainsi $d_3^{0,4} = 0$ et donc $E_4^{0,4} \cong E_3^{0,4} \cong \mathbf{Z}_2$.

On voit dans le diagramme que $E_2^{2,2} = \mathbf{Z}_2$ et $E_2^{5,0} = H^5(X)$ restent stables, donc $E_3^{2,2} \cong \mathbf{Z}_2$ et $E_3^{5,0} \cong H^5(X)$ et on a une flèche :

$$d_3^{2,2} : \mathbf{Z}_2 \longrightarrow H^5(X) .$$

Puisque $E_\infty^{2,2} = 0$ et que la différentielle $d_3^{2,2}$ est la dernière possibilité pour tuer $E_3^{2,2}$ (voir le dernier diagramme) c'est que $\operatorname{Ker} d_3^{2,2} = 0$. Donc on a $E_4^{5,0} \cong H^5(X)/\mathbf{Z}_2$.

Au niveau 4 on obtient :



On voit que $E_5^{0,4} \cong E_4^{0,4} \cong \mathbf{Z}_2$ et $E_5^{5,0} \cong E_4^{5,0} \cong H^5(X)/\mathbf{Z}_2$. Mais la flèche

$$d_5^{0,4} : E_5^{0,4} \longrightarrow E_5^{5,0}$$

est la dernière possibilité pour tuer $E_5^{0,4}$ et $E_5^{5,0}$, donc $d_5^{0,4}$ est un isomorphisme et on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_2 \longrightarrow H^5(X) \longrightarrow \mathbf{Z}_2 \longrightarrow 0 .$$

Il en résulte que $H^5(X) = \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ ou $H^5(X) = \mathbf{Z}_4$. Quelle est la bonne solution? Ceci est un exemple typique des ambiguïtés qui apparaissent dans les suites spectrales et les suites exactes. Dans ce cas particulier on va pouvoir surmonter cette difficulté en utilisant une technique *particulière*.

On sait que $H^4(X) = 0$. D'une façon analogue, en considérant la suite spectrale à coefficients dans $\mathbf{Z}_2$, on peut démontrer que $H^4(X; \mathbf{Z}_2) \cong \mathbf{Z}_2$. Le théorème des coefficients universels donne :

$$H^4(X; \mathbf{Z}_2) = H^4(X) \otimes \mathbf{Z}_2 \oplus \operatorname{Tor}\bigl(H^5(X); \mathbf{Z}_2\bigr) = \operatorname{Tor}\bigl(H^5(X); \mathbf{Z}_2\bigr) .$$

Par ailleurs $\mathrm{Tor}(\mathbf{Z}_q; G) \cong \{a \in G; ga = 0\}$ et Tor est un foncteur additif, donc $\mathrm{Tor}(\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2; \mathbf{Z}_2) \cong \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ et $\mathrm{Tor}(\mathbf{Z}_4; \mathbf{Z}_2) \cong \mathbf{Z}_2$. On en déduit que $H^5(X) \cong \mathbf{Z}_4$ et donc

$$\boxed{H_4\big(K(\mathbf{Z}_2, 2)\big) \cong \mathbf{Z}_4}$$

10. Le cas simplicial. Théorème de Brown

Brown [B] développe une technique (en définissant les cochaînes de torsion) qui permet d'obtenir une démonstration du théorème de Serre pour les fibrés simpliciaux. Pour cela, on utilise un multicomplexe intermédiaire permettant de mener à bien les calculs en homologie effective. On explique dans cette section les idées de Brown pour les appliquer au cas effectif dans la section suivante.

10.1. DÉFINITIONS. — *Un $\mathbf{Z}$-module gradué différentiel G est appelé algèbre graduée différentielle si un morphisme produit $\pi : G_* \otimes G_* \to G_*$, une identité et une augmentation vérifiant les propriétés duales de la définition de coalgèbre dans 7.10 sont définis. Si F est un $\mathbf{Z}$-module gradué différentiel, si G est une algèbre graduée différentielle et si F est un G-module avec un produit externe μ , alors on dit que F est un G-module différentiel si $d\mu = \mu\overline{d}$, où d est la différentielle de F est $\overline{d}$ est celle induite dans $G \otimes F$ par celles de G et F .*

10.2. DÉFINITIONS. — *Soit B une coalgèbre graduée différentielle, avec un coproduit Δ et G une algèbre graduée différentielle, avec un produit π . Une cochaîne $t : B \to G$ est une famille de morphismes de $\mathbf{Z}$-modules $t : B_n \to G_{n-1}$. Si $t : B \to G$ est une cochaîne, on définit une famille de morphismes $t \cup t : B_n \to G_{n-2}$ par la composition $\pi \circ (t \otimes t) \circ \Delta : B \to B \otimes B \to G \otimes G \to G$. Alors une cochaîne de torsion est une cochaîne $t : B \to G$ vérifiant la condition d'intégrabilité : $dt = t\overline{d} + t \cup t$, d étant la différentielle de G et $\overline{d}$ celle de B .*

Soit maintenant F un G-module muni d'un produit externe μ et soit $t : B \to G$ une cochaîne ; on définit une famille de morphismes $t\cap : (B \otimes F)_n \to (B \otimes F)_{n-1}$ par la composition

$$B \otimes F \xrightarrow{\Delta \otimes 1} B \otimes B \otimes F \xrightarrow{1 \otimes t \otimes 1} B \otimes G \otimes F \xrightarrow{1 \otimes \mu} B \otimes F .$$

10.3. THÉORÈME. — *Soit B une coalgèbre différentielle, F un G-module différentiel et $t : B \to G$ une cochaîne de torsion. Alors, si $d_t = d + t\cap$ (d est la différentielle canonique du produit tensoriel), $(B \otimes F, d_t)$ est un $\mathbf{Z}$-module gradué différentiel.*

Démonstration. — On vérifie (voir [M], page 141) que la condition d'intégrabilité entraîne $d_t^2 = 0$ et donc que d_t est une différentielle. ■

On va appliquer maintenant ces définitions et ces résultats au cas des ensembles simpliciaux et de leurs complexes de chaînes associés. Rappelons (proposition 7.13) que si X est un ensemble simplicial, alors $C(X)$ est une coalgèbre graduée différentielle.

10.4. PROPOSITION. — *Soit G un groupe simplicial. Alors :*

i) $C(G)$ a une structure d'algèbre graduée différentielle.

ii) Si une action de G sur un ensemble simplicial Fest définie, $C(F)$ a une structure naturelle de $C(G)$-module différentiel.

Démonstration. —

ii) Si $\widetilde{\pi}$ est le produit de G , le produit π cherché est le composé

$$C(G) \otimes C(G) \xrightarrow{g} C(G \times G) \xrightarrow{C(\widetilde{\pi})} C(G) ,$$

où g est l'application d'Eilenberg–Mac Lane (voir la définition de g dans [M], page 133).

i) Si $\widetilde{\mu}$ est l'action de G sur F, on définit le produit externe de $C(F)$ par $\mu = C(\widetilde{\mu}) \circ g$, g étant l'application d'Eilenberg–Mac Lane

$$C(G) \otimes C(F) \xrightarrow{g} C(G \times F) .$$

■

Dans tout ce paragraphe $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ est un fibré simplicial, de groupe G, d'application de torsion τ , $|B|$ simplement connexe et B de Kan. On va définir deux filtrations, l'une du module gradué $C(E)$, l'autre de $C(B) \otimes C(F)$ de façon que les multicomplexes associés aient des totalisations ayant même type d'homotopie.

1ère filtration.

10.5. DÉFINITION. — *Un n-simplexe $x \in E_n$ est de degré filtrant q s'il existe $\alpha \in \Delta^{\mathrm{sur}}(\underline{n}, \underline{q})$ et $y \in B_q^*$ tels que $p(x) = \alpha^*(y)$.*

10.6. REMARQUES. —

a) Cette définition correspond, en langage simplicial, au fait qu'un n-cube ne dépend pas de ses $n - q$ dernières coordonnées (voir la démonstration de 9.8).

b) Remarquer que le degré filtrant de $\partial_i x$ est toujours plus petit ou égal à celui de x .

On définit $C_{p,q}^0(E)$ comme le $\mathbf{Z}$-module libre engendré par les $(p+q)$-simplexes de E de degré filtrant p . Evidemment $\{C_{p,q}^0(E)\}$ est une filtration de $C(E)$. Si $x \in C_{p,q}^0(E)$, on a (voir la remarque 10.6 b)) $dx \in \oplus_{i=0}^p C_{p-i,q+i-1}^0(E)$ et on peut définir $d_{p,q}^{0,r}(x)$ comme la composante de dx se trouvant dans $C_{p-r,q+r-1}^0(E)$. On a ainsi défini un multicomplexe $\left(C^0_{p,q}(E), d^{0,r}_{p,q}\right)_{0\leqslant r\leqslant p}$ qu'on appelle *multicomplexe initial du fibré*. La totalisation de ce multicomplexe est $C(E)$.

2ème filtration.

Noter que des propositions 7.13 et 10.4, on déduit que $C(B)$, $C(G)$ et $C(F)$ vérifient les conditions du théorème 10.3 et, donc, si une cochaîne de torsion $t : C(B) \to C(G)$ est donnée, on obtient un complexe de chaînes associé $\left(C(B) \otimes C(F), d_t\right)$. Considérons la filtration canonique de $C(B) \otimes C(F)$, c'est-à-dire $\{C_p(B) \otimes C_q(F)\}$. Si $b \otimes f \in C_p(B) \otimes C_q(F)$, alors $t \cap (b \otimes f) \in \oplus^p_{r=0} C_{p-r}(B) \otimes C_{q+r-1}(F)$ et on peut donc comme dans la première filtration définir :

$$d^{0,r}_t : C_p(B) \otimes C_q(F) \longrightarrow C_{p-r}(B) \otimes C_{q+r-1}(F) \ , \ 0 \leqslant r \leqslant p \, .$$

Un multicomplexe $\left(C_p(B) \otimes C_q(F), d^{0,r}_t\right)_{0\leqslant r\leqslant p}$ est ainsi défini et sa totalisation est $\left(C(B) \otimes C(F), d_t\right)$.

10.7. THÉORÈME. Théorème de Brown. — *Il existe une cochaîne de torsion $t : C(B) \to C(G)$ telle que les complexes $C(E)$ et $\left(C(B) \otimes C(F), d_t\right)$ ont même type d'homotopie.*

Commentaires sur la démonstration. —

1) Le théorème 10.7 est le même, au langage près, que le théorème 31.7 de [M].

2) Une définition par récurrence des $t_n : C_n(B) \to C_{n-1}(G)$ se trouve dans le théorème 31.3 de [M]. On définit t à partir de l'application de torsion τ du fibré simplicial.

3) La démonstration utilise les suites spectrales associées aux filtrations $\{C^0_{p,q}(E)\}$ et $\{C_p(B) \otimes C_q(F)\}$ (voir le théorème 9.7).

10.8. PROPRIÉTÉ. — *Soit B un ensemble simplicial minimal, $|B|$ étant simplement connexe, alors B a un unique sommet et tous ses 1-simplexes sont dégénérés.*

Démonstration. — Elle se déduit du lemme 9.2 de [M] et des propriétés qui seront démontrées dans le chapitre 5. ∎

10.9. PROPRIÉTÉ. — *Tout ensemble simplicial de Kan X a un sous-ensemble simplicial Y qui est minimal et tel que $|Y|$ et $|X|$ ont même type d'homotopie.*

Démonstration. — On trouve dans [M] page 36 la définition explicite de Y. Le théorème 9.5 de [M] et quelques propriétés du chapitre 5 expliquent pourquoi $|X|$ et $|Y|$ ont même type d'homotopie. ∎

La propriété 10.9 dit que, à type d'homotopie près, on peut considérer tout ensemble de Kan comme minimal et l'énoncé de la proposition suivante est donc de portée générale.

10.10 PROPOSITION. — *Soit $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ un fibré simplicial où B est minimal et $|B|$ simplement connexe. Soit t la cochaîne de torsion donnée par le théorème 10.7 et soit $\left(C_p(B) \otimes C_q(F), d_t^{0,r}\right)$ le multicomplexe associé. Alors : $d_{p,q}^{0,0} = 1 \otimes (d_F)_q$ et $d_{p,q}^{0,1} = (d_B)_p \otimes 1$, où d_F , d_B sont les différentielles de $C(F), C(B)$.*

Démonstration. — Remarquer que, dans ces conditions, $C_1(B) = 0$ (considérer le complexe de chaînes normalisé et appliquer la propriété 10.8). On vérifie que dans ce cas les composantes $(\cap t)^{0,0} : C_p(B) \otimes C_q(F) \to C_p(B) \otimes C_{q-1}(F)$ et $(\cap t)^{0,1} : C_p(B) \otimes C_q(F) \to C_{p-1}(B) \otimes C_q(F)$ sont nulles. ■

10.11. REMARQUES FINALES. —

a) Dans [Sz], Szczarba a défini explicitement la cochaîne de torsion t comme une fonction de l'application de torsion τ et, en plus, il a donné *explicitement* l'équivalence d'homotopie entre $C(t)$ et($\left(C(B) \otimes C(F), d_t\right)$. Une autre bonne référence pour trouver des définitions explicites de ces applications est [Sh].

b) Des propriétés développées pour démontrer le théorème de Brown, on peut déduire que les suites spectrales associées aux deux filtrations définies sont isomorphes (voir [M], corollaire 32.1) et qu'elles jouent le rôle de la suite spectrale de Serre dans le cadre simplicial (voir [M], paragraphe 32). Il est en fait démontré dans [B] que les trois suites spectrales sont isomorphes.

c) Une première approche pour obtenir la version "effective" de la suite spectrale de Serre dans le cadre simplicial serait de prendre le multicomplexe initial du fibré simplicial (puisqu'il correspond à la filtration définie par Serre) et d'essayer de le réduire jusqu'à le mettre en rapport avec les homologies effectives de B et de F (l'*homologie effective d'un ensemble simplicial* est, bien sûr, l'homologie effective du complexe de chaînes associé). Mais ce multicomplexe ne peut être réduit directement. La remarque a) va nous permettre d'affirmer que $C(E)$ et $\left(C(B) \otimes C(F), d_t\right)$ sont homotopiquement équivalents d'après la définition 1.3 et, donc (voir 1.16), que l'homologie effective de E est celle de $\left(C(B) \otimes C(F), d_t\right)$. Puisque la remarque b) affirme que la suite spectrale de Serre peut être construite à partir de la filtration $\{C_p(B) \otimes C_q(E)\}$, il est logique d'espérer que la version effective de la suite spectrale de Serre soit trouvée par réduction du multicomplexe $\left(C(B) \otimes C(F), d_t^{0,r}\right)$. Cette idée est développée dans la section suivante.

11. Homologie effective d'un fibré principal

Dans ce paragraphe $F \hookrightarrow E \to B$ est un fibré simplicial, où B est minimal et $|B|$ est simplement connexe. Soit $\left(C(B) \otimes C(F), d_t^{0,r}\right)$ le multicomplexe associé à la cochaîne de torsion t du théorème 10.7 et vérifiant les propriétés de la proposition 10.10 : $d_{t,p,q}^{0,1} = (d_B)_p \otimes 1$, $d_{t,p,q}^{0,0} = 1 \otimes (d_F)_q$.

11.1. THÉORÈME. — *Le multicomplexe* $\left(C(B)\otimes C(F), d_t^{0,r}\right)$ *peut être réduit d'une façon canonique à un multicomplexe* $(HB_*\otimes HF_*, d^{2,r})$ *, où* $d_{p,q}^{2,r} : HB_p\otimes HF_q \to HB_{p-r}\otimes HF_{q+r-1}$, $0 \leqslant r \leqslant p$, $d_{p,q}^{2,0} = 1\otimes(\overline{d}_F)_q$, $d_{p,q}^{2,1} = (\overline{d}_B)_p\otimes 1$ *, où* $(HB_*, \overline{d}_B)$ *,* $(HF_*, \overline{d}_F)$ *sont les complexes de chaînes irréductibles de l'homologie effective de* B *,* F *respectivement.*

Démonstration. — Pour simplifier, toutes les différentielles seront notées d sans distinction.

Considérons le multicomplexe $\left(C(B)\otimes C(F), d^{0,r}\right)$ et remarquons qu'une réduction de flèche dans $C(F)$ induira une réduction de flèche verticale $d^{0,0} = 1\otimes d_F$ du multicomplexe. De plus, cette réduction ne modifie pas "vraiment" les flèches horizontales $d^{0,1}$ du multicomplexe (voir la définition 2.6). Sur les flèches $d^{0,r}$, où $r \geqslant 2$, des corrections peuvent apparaître, mais ce fait ne modifie pas notre démonstration (en fait, les flèches $d^{0,2}$ ne sont pas non plus modifiées). Donc, par réduction de toutes les flèches verticales, on trouve un autre multicomplexe : $\left(C(B)\otimes HF_*, d^{1,r}\right)$, où $d_{p,q}^{1,r} : C_p(B)\otimes HF_q \to C_{p-r}(B)\otimes HF_{q+r-1}$, $0 \leqslant r \leqslant p$, $d_{p,q}^{1,0} = 1\otimes dq$, $d_{p,q}^{1,1} = d_p\otimes 1$ (de plus, $d_{p,q}^{1,2}$ est essentiellement égal à $d_{p,q}^{0,2}$, mais ceci ne présente pas d'intérêt particulier).

On va maintenant faire la réduction de la flèche $d_{p,q}^{1,1}$ de ce multicomplexe, à partir d'une réduction de la flèche d_p de $C(B)$:

$$\begin{array}{ccc}
C_{p-1}(B)'' & \xrightarrow{g} & C_p(B)'' \\
\uparrow p & & \downarrow i \\
C_{p-1}(B) & \xrightarrow{d_p} & C_p(B) \\
\uparrow i' & & \downarrow p' \\
C_{p-1}(B)' & \xrightarrow{d_p} & C_p(B)'
\end{array}$$

(Dans ce diagramme on a utilisé les notations définies pour les réductions au chapitre 1).

Un examen direct du multicomplexe nous montre que les seules flèches "vraiment" modifiées par la réduction de $d_{p,q}^{1,1}$ sont $d_{p+1,q-1}^{1,1}$ et $d_{p-1,q+1}^{1,1}$ (voir la définition 2.6 de nouveau). On va démontrer que, après cette réduction, $d_{p+1,q-1}^{1,1}$ n'est pas essentiellement modifiée :

$$\begin{tikzcd}
 & C_{p-1}(B)''\otimes HF_q \arrow[r, "g\otimes 1"] & C_p(B)''\otimes HF_q \arrow[d, hook, "i\otimes 1"] & \\
 & C_{p-1}(B)\otimes HF_q \arrow[u, "p\otimes 1"] \arrow[d, "d^{1,0}_{p-1,q}"'] & C_p(B)\otimes HF_q \arrow[l, "d^{1,1}_{p,q}=d_p\otimes 1"'] \arrow[d, "d^{1,0}_{p,q}"] & \\
 {} & C_{p-1}(B)\otimes HF_{q-1} \arrow[l] & C_p(B)\otimes HF_{q-1} \arrow[l, "d^{1,1}_{p,q-1}"] \arrow[d, "p'\otimes 1"] & C_{p+1}(B)\otimes HF_{q-1} \arrow[l, "d^{1,1}_{p+1,q-1}"] \arrow[ull, bend right, "d^{1,2}_{p+1,q-1}"'] \arrow[dl] \\
 & C_{p-1}(B)'\otimes HF_{q-1} \arrow[ul] \arrow[u, hook] \arrow[ul, phantom, "\circlearrowleft"'] & C_p(B)'\otimes HF_{q-1} \arrow[l] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] &
\end{tikzcd}$$

Après la réduction, la nouvelle flèche $d^{1,1}_{p+1,q-1}$ doit être (définition 2.6) : $(p'\otimes 1)d^{1,1}_{p+1,q-1} - \varphi$, où φ est le composé :

$$C_{p+1}(B)\otimes HF_{q-1} \xrightarrow{d^{1,2}_{p+1,q-1}} C_{p-1}(B)\otimes HF_q \xrightarrow{p\otimes 1} C_{p-1}(B)''\otimes HF_q \longrightarrow$$
$$\xrightarrow{g\otimes 1} C_p(B)''\otimes HF_q \xrightarrow{i\otimes 1} C_p(B)\otimes HF_q \xrightarrow{d^{1,0}_{p,q}=1\otimes d_q}$$
$$\longrightarrow C_p(B)\otimes HF_{q-1} \xrightarrow{p'\otimes 1} C_p(B)'\otimes HF_{q-1} \ .$$

Autrement dit $\varphi = (p'\circ i\circ g\circ p\otimes d_q)\circ d^{1,2}_{p+1,q-1}$, mais par définition $p'\circ i = 0$, donc $\varphi = 0$ et $d^{1,1}_{p+1,q-1}$ n'est pas modifié (remarquer que, dans ce processus, quelques autres flèches $d^{1,r}$, où $r\geqslant 2$, ont pu être modifiées, mais ceci n'altère pas le résultat).

Un raisonnement analogue montre que la correction faite sur $d^{1,1}_{p-1,q+1}$ est nulle et il est donc possible de continuer le processus de réduction horizontale de la façon indiquée. Cette réduction horizontale nous donne le multicomplexe annoncé dans l'énoncé du théorème. ∎

11.2. COROLLAIRE; Théorème de Serre en homologie effective. — *Soit $F\hookrightarrow E\to B$ un fibré simplicial , où F est minimal et $|B|$ est simplement connexe. Si on suppose connue l'homologie effective de F et celle de B, alors l'homologie effective de E est celle du multicomplexe $(HB\otimes HF, d^{2,r})$.*

On va maintenant appliquer le théorème de Serre en homologie effective au cas du calcul des groupes d'homotopie des CW-complexes finis comme indiqué à la fin du paragraphe 8.

11.3. DÉFINITION. — *Un ensemble simplicial X est fini si X_n est un ensemble fini pour tout n et s'il existe $d\in\mathbf{N}$ tel que $X^*_m = \emptyset$ si $m > d$.*

11.4. REMARQUE. — Les techniques développées dans le paragraphe 1 (réduction flèche à flèche, proposition 1.15), vont nous permettre d'affirmer que l'homologie effective d'un complexe fini est calculable.

Supposons maintenant connue l'homologie effective des $K(\pi, n)$ (qui ne sont pas, en général, finis), on obtient :

11.5. COROLLAIRE. Théorème de Brown sur la calculabilité des groupes d'homotopie. — *Si X est un ensemble simplicial fini et si $|X|$ est simplement connexe, alors les groupes d'homotopie de $|X|$ sont calculables.*

Démonstration. — Remarquer que, à cause de la propriété 10.9, on peut se restreindre au cas où X est minimal.

On reprend maintenant les idées et les notations de la méthode permettant de "tuer" les groupes d'homotopie exposée dans la section 8 : $p = \min\{r; H_r(X) \neq 0\}$, $\pi = H_p(X)$; on a un fibré simplicial $K(\pi, p-1) \hookrightarrow X' \to X$ et $\pi_{p+1}(|X|) = H_{p+1}(X')$; par la remarque 11.4 et la supposition faite avant l'énoncé, en appliquant le théorème de Serre en homologie effective on peut calculer l'homologie de X' et donc $\pi_{p+1}(|X|)$. Le pas fondamental de la démonstration est que, bien que X' soit *non*-fini, le théorème de Serre nous permet d'affirmer la calculabilité de l'homologie effective de X' , et ce fait nous permet, avec un processus de récurrence, de calculer les groupes $\pi_r(|X|)$; où $r > p+1$. ∎

11.6. REMARQUES FINALES. —

1) Des résultats du chapitre 5 montreront que le dernier corollaire prouve la calculabilité des groupes d'homotopie de n'importe quel CW-complexe simplement connexe et fini.

2) Les techniques utilisées ne nous donnent pas seulement une autre démonstration du théorème de Brown, mais également une méthode pour le calcul sur machine des groupes d'homologie et d'homotopie. Le prochain chapitre traite ce dernier thème.

Références pour le Chapitre 3

[ML] MAC LANE S. — *Homology*, Springer-Verlag, 1967.

[S] SERRE J.P. — *Homologie singulière des espaces fibrés*, Ann.of Math., **54** n° 3 (1951), 425–505.

[B] BROWN E.H. — *Twisted tensor products I*, Ann. of Math., **69** (1959), 223–246.

[M] MAY J.P. — *Simplicial objects in algebraic topology*, Van Nostrand, 1967.

[Sz] SZCSARBA R.H. — *The homology of twisted cartesian products*, Trans. A.M.S., **100** (1961), 197–216.

[Sh] SHIH WEISHU. — *Homologie des espaces fibrés*, Publ. Math. I.H.E.S., n° 13, 1962.

[B-T] BOTT R., TU L.W. — *Differential forms in algebraic topology*, Springer-Verlag, 1982.