COURS DE L'INSTITUT FOURIER

JULIO RUBIO
FRANCIS SERGERAERT

0. Introduction

Cours de l'institut Fourier, tome 20 (1986), p. 7-13
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1986__20__7_0>

0. Introduction

Ce travail expose une technique algorithmique pour le calcul des groupes d'homotopie des espaces topologiques.

Le début de la théorie des groupes d'homotopie remonte la définition du groupe fondamental d'un espace topologique donnée par Poincaré [P] à la fin du siècle dernier. Puis, vers 1935, Hurewicz [H] a défini les groupes d'homotopie d'ordre supérieur et il a démontré son célèbre théorème :

THÉORÈME DE HUREWICZ. *Si* $n \geqslant 2$ *et* $\pi_i(X) = 0$ *pour* $0 \leqslant i \leqslant n-1$, *alors l'homomorphisme de Hurewicz* $\pi_n(X) \to H_n(X)$ *est un isomorphisme.*

Cette correspondance entre groupes d'homologie et groupes d'homotopie laissait penser aux chercheurs de cette époque que pour une variété V de dimension n on devrait avoir $\pi_k(V) = 0$ si $k > n$

Cette croyance fut contredite par Hopf [H] qui construisit une application ι_H $\pi_{2n-1}(S^n) \to \mathbf{Z}$ et qui montra que pour $n = 2$ cette application est un isomorphisme: autrement dit, il montra que $\pi_3(S^2) \cong \mathbf{Z}$.

Le premier à réussir un progrès sur Hopf fut Freudenthal [F] :

THÉORÈME DE SUSPENSION DE FREUDENTHAL. — *Le foncteur de suspension induit un morphisme* $S : \pi_n(S^r) \to \pi_{n+1}(S^{n+1})$ *qui est un isomorphisme si* $n < 2r-1$ *et un épimorphisme si* $n = 2r-1$.

Il démontrait de plus que le noyau de $S : \pi_3(S^2) \to \pi_4(S^3)$ est l'ensemble des éléments dont l'image par "l'application de Hopf" est pair, donc $\pi_4(S^3) \cong \mathbf{Z}_2$.

Par ailleurs, la suite exacte d'homotopie associée à la fibration de Hopf η : $S^3 \to S^2$ induit un isomorphisme entre les groupes d'homotopie de dimension 4. Donc $\pi_4(S^2) \cong \mathbf{Z}_2$, où un générateur de ce groupe est le représentant du composé $H \quad SH : S^4 \to S^2$, où S est le foncteur de suspension.

Il a fallu attendre ensuite plus de 10 ans pour que la thèse de Serre [S] permette de calculer quelques groupes d'homotopie supplémentaires. La technique de Serre repose sur sa fameuse suite spectrale. La suite spectrale de Serre est un mécanisme assez complexe décrivant des relations entre l'homologie de la fibre, de la base et de l'espace total d'un fibré. Dans les meilleurs cas, connaissant l'homologie de deux de ces espaces, on peut en déduire l'homologie du troisième. Pourtant, en général, dans la suite spectrale de Serre restent des "ambiguïtés" de natures variées, qu'il est souvent très difficile sinon pratiquement impossible de lever.

Cartan et Serre [C–S] ont développé, à partir des techniques de Serre, une méthode pour "tuer" les groupes d'homotopie qu'on peut exposer de la façon suivante. Soit X un espace topologique simplement connexe dont le premier groupe d'homologie non–nul soit $H_n(X)$. Du théorème de Hurewicz il résulte que $\pi_i(X) = 0$ si $i < n$ et $\pi_n(X) \cong H_n(X)$. Appelons $\pi = H_n(X) = \pi_n(X)$. Par le théorème des coefficients universels en cohomologie on sait que, dans ces conditions, $H^n(X\ ;\ \pi) \cong \mathrm{Hom}(H_n(X)\ ;\ \pi)$. Donc, dans $H^n(X\ ;\ \pi)$ il existe une classe distinguée, notée $[X]$, qui est associée par cet isomorphisme à id $\in \mathrm{Hom}(H_n(X)\ ;\ \pi)$. Par ailleurs, on sait qu'il existe un isomorphisme $H^n(X\ ;\ \pi) \cong [X, K(\pi, n)]$, où $[\ ,\ ]$ est le groupe des classes d'homotopie des applications continues et $K(\pi, n)$ est un espace d'Eilenberg–MacLane du type (π, n) .

Ainsi, à notre classe universelle $[X]$, correspond une application $f : X \rightarrow K(\pi, n)$, bien définie à homotopie près. De plus, $f_* : \pi_n(X) \rightarrow \pi$ est l'identité et on peut considérer, à homotopie près, que f est une fibration. L'examen de la suite exacte d'homotopie de cette fibration, compte–tenu de la simplicité des $\pi_i(K(\pi, n))$, prouve que, si X_{n+1} est la fibre :

$$\pi_i(X_{n+1}) \cong \pi_i(X) \text{ pour } i \geqslant n+1$$

et

$$\pi_i(X_{n+1}) = 0 \text{ pour } i \leqslant n\ .$$

Il résulte du théorème de Hurewicz que $\pi_{n+1}(X) = \pi_{n+1}(X_{n+1}) = H_{n+1}(X_{n+1})$, et, donc, on a réduit le problème du calcul du second groupe d'homotopie non nul au calcul d'un groupe d'homologie, travail théoriquement plus simple. De plus, si on connaît l'homologie de X_n et celle de $K(\pi, n-1)$, on peut espérer en déduire l'homologie de X_{n+1} (grâce à la suite spectrale de Serre, car dans cette construction apparaît d'une façon canonique une fibration $K(\pi, n-1) \hookrightarrow X_{n+1} \rightarrow X$). Alors, par récurrence, on pourrait calculer $\pi_{n+2}(X_{n+2}) = \pi_{n+2}(X)$, $\cdots$. Cette méthode est exposée avec plus de détails dans le paragraphe 8 de ce travail et est habituellement appelée "Tour de Whitehead".

On voit qu'on se heurte pourtant à deux difficultés. La première est qu'il faut connaître l'homologie de $K(\pi, n)$. C'est un problème qui a beaucoup intéressé les mathématiciens des années 50–54. Une première méthode, imaginée par Eilenberg et MacLane [E–M], consistait à remarquer qu'il existe un "fibré universel" $E(\pi, n) \rightarrow K(\pi, n)$, de fibre $K(\pi, n-1)$, où l'espace total est contractile. Donc on connaît l'homologie de $E(\pi, n)$ et, en appliquant un processus de récurrence et la suite spectrale de Serre, on pourrait espérer trouver l'homologie de $K(\pi, n)$. En fait cette méthode bute sur les ambiguïtés qu'on a évoquées plus haut, et ces ambiguïtés empêchèrent plusieurs années Eilenberg et MacLane de résoudre complètement la question. Elle fut résolue par H. Cartan [C], en utilisant une méthode d'esprit très analogue à celui de "l'homologie effective", théorie qui est developpée dans Chapitre 1 de ce travail.

La deuxième difficulté est encore de même nature. Connaissant entièrement l'homologie de $K(\pi, n)$ et celle de X , il n'est pas en général possible, avec la suite spectrale de Serre de déterminer entièrement l'homologie de X_{n+1} . C'est d'ailleurs cette difficulté–là qui a toujours empêché, même aujourd'hui, de pouvoir calculer, par exemple, n'importe quel groupe d'homotopie de sphères.

Un mathématicien américain, E. Brown, a pourtant réussi, en utilisant la méthode de Serre, à montrer que les groupes d'homotopie d'un ensemble simplicial fini et simplement connexe sont finiment calculables. La technique de Brown consiste à utiliser la méthode de Serre dans une traduction de topologie combinatoire, théoriquement exprimable sur une machine de Türing ou dans tout langage de programmation équivalent. Cette méthode de topologie combinatoire est celle des ensembles simpliciaux qui permet de décrire tout CW–complexe fini, à homotopie près, à l'aide d'un ensemble fini de données. Un cas est alors assez facile, c'est celui où tous les groupes d'homologie de X sont finis. Il résulte de l'un des nombreux théorèmes de la thèse de Serre [S] qu'alors tous les groupes d'homotopie de X sont aussi finis. Par ailleurs, si π est un groupe fini, on peut construire un modèle simplicial de $K(\pi, n)$ qui est aussi fini en chaque dimension. Alors le "fibré universel" $K(\pi, n-1) \hookrightarrow E(\pi, n) \rightarrow K(\pi, n)$ est lui aussi fini en chaque dimension et donc la méthode de Serre peut être reproduite telle quelle à l'aide de complexes finis. A chaque étape on a un complexe X_n fini en chaque dimension, dont il est possible de calculer l'homologie, et on peut poursuivre.

Mais cette méthode ne fonctionne pas par exemple pour les groupes d'homotopie des sphères puisque $\pi_n(S^n) = \mathbf{Z} = H_n(S^n)$ n'est pas fini. Brown arrive pourtant à montrer qu'il est possible de définir des sous–complexes finis ayant toute l'information sur les groupes d'homotopie, permettant d'obtenir malgré tout le résultat désiré. Cette technique est si complexe que, à notre connaissance, aucun groupe d'homotopie n'a été calculé, ni même "vérifié", de cette façon.

Beaucoup d'autres méthodes ont été imaginées depuis pour tourner ces difficultés, notamment la suite spectrale de Adams [A]. Ces méthodes ont apporté beaucoup de progrès, mais pourtant elles finissent toutes par buter sur le même genre de difficulté : ambiguïtés dans les suites exactes et les suites spectrales.

On définit dans ce travail une autre sorte d'homologie, appelée "homologie effective", qui consiste essentiellement, quand on calcule l'homologie d'un complexe de chaînes, à garder plus d'information que celle qui reste habituellement en homologie. Cette information est exactement celle qui est nécessaire pour tourner les "ambiguïtés" évoquées plus haut.

Si A est un sous–complexe d'un complexe de chaînes B , on a une suite exacte courte $A \hookrightarrow B \hookrightarrow (B, A)$. Si on connaît deux sur trois des trois homologies effectives de A , B , (B, A) , on peut en déduire, entièrement et par un procédé algorithmique, la troisième homologie. Ceci n'est pas vrai en homologie ordinaire : on obtient une suite exacte

$$\cdots \rightarrow H_p(A) \rightarrow H_p(B) \rightarrow H_p(B, A) \rightarrow H_{p-1}(A) \rightarrow \cdots$$

qui laisse des ambiguïtés. Par exemple, supposons que $H_p(A) = H_{p-1}(B) = 0$, $H_p(B) = H_{p-1}(A) = \mathbf{Z}_2$; on a alors une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathbf{Z}_2 \rightarrow H_p(B, A) \rightarrow \mathbf{Z}_2 \rightarrow 0 \ ;$$

et avec cette seule information, on ne peut déterminer si $H_p(B, A)$ est égal à $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ ou à $\mathbf{Z}_4$.

Le même phénomène se produit aussi pour les suites spectrales : connaissant l'homologie effective de la base et de la fibre d'un fibré simplicial, il est possible d'en déduire l'homologie effective de l'espace total. Par exemple si on connaît l'homologie effective de $K(\pi, n-1)$ et de X, on peut en déduire *entièrement* l'homologie effective de X_{n+1} . Il en résulte une démonstration beaucoup plus simple du théorème de Brown sur la calculabilité des groupes d'homotopie des ensembles simpliciaux finis simplement connexes. De plus, cette nouvelle démonstration devrait pouvoir être utilisée telle quelle sur machine pour calculer véritablement des groupes d'homotopie; bien que ceci, sujet de recherches en cours, ne soit pas encore fait.

L'homologie effective présente un autre intérêt : beaucoup d'énoncés et démonstrations de l'algèbre homologique classique sont sensiblement simplifiés. Par exemple, le théorème de Künneth en homologie ordinaire donne une suite exacte courte :

$$0 \to \sum_{p+q=r} H_p(A) \otimes H_q(B) \to H_r(A \times B) \to \sum_{p+q=r-1} \mathrm{Tor}\big(H_p(A), H_q(B)\big) \to 0 \; .$$

Alors qu'en homologie effective (voir le paragraphe 4) le résultat, correctement interprété, s'énonce beaucoup plus simplement :

$$H(A \times B)_* = H(HA_* \otimes HB_*) \; .$$

Références pour l'Introduction

[P] POINCARÉ H.. — *Analysis Situs*, J. Ecole Poly., **1** (1895), 1–121.

[H] HUREWICZ W.. — *Beiträge zur Topologie der Deformationen*, Verh. Nederl. Akad. Wetensch;, **38** (1935), 112–119, 521–588; **39** (1936), 117–126, 215–224.

[Ho] HOPF H.. — *Über die Abbildungen der Dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*, Math. Ann., **104** (1931), 637–665.

[F] FREUDENTHAL H.. — *Über die Klassen von Sphärenabbildungen*, Comp. Math., **5** (1937), 299–314.

[S] SERRE J.-P.. — *Homologie singulière des espaces fibrés*, Ann. of Math., **54** (1951), 425–505.

[C–S] CARTAN H. et SERRE J.-P.. — *Espaces fibrés et groupes d'homotopie, I, II*, C. R. Acad. Sci. Sér. I Math., **234** (1952), 288–290, 393–395.

[E–M] EILENBERG S. et MACLANE S.. — *On the groups* $H(\Pi, n)$, *I, II*, Ann. of Math., **58** (1953), 55–106; **60** (1954), 49–139.

[C] CARTAN H.. — *Algèbres d'Eilenberg–MacLane et Homotopie*, Séminaire Ecole Normale Sup. Paris, 1955.

[B] BROWN E.. — *Finite computability of Postnikov complexes*, Ann. of Math., **65**, n° 1 (1957), 1–20.

[A] ADAMS J.-F.. — *On the structure and applications of the Steenrod algebra*, Comment. Math. Helv., **32** (1958), 180–214.