G. GONZALEZ-SPRINBERG

Théorie de Zariski-Lipman et amas toriques

Cours de l'institut Fourier, tome S24 (1993), p. 49-55
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1993__S24__49_0>

Journées Singulières et Jacobiennes
GRENOBLE
26–28 mai 1993 (49–55)

Théorie de Zariski-Lipman et amas toriques

G. GONZALEZ-SPRINBERG

Le sujet de ce laïus est une partie d'un travail en collaboration avec Antonio Campillo et Monique Lejeune-Jalabert.

1. Rappels et notations toriques.

Soit $N \cong \mathbb{Z}^d$ un réseau de dimension $d \geq 2$, $N^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ le réseau dual. Soit Σ un éventail dans $N_Q := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, K un corps ; on note X_Σ la *variété torique* (sur le corps K) associée à Σ, munie de façon naturelle de l'action d'un tore algébrique $T \cong (K^*)^d$. Il existe une bijection canonique entre les orbites de T dans X_Σ et les cônes de Σ ; chaque cône $\tau \in \Sigma$ correspond à une T-orbite $\mathbf{O}_\tau$ isomorphe à $\mathrm{Spec}(K[\tau^\perp \cap N^*])$, où $\tau^\perp$ dénote l'ensemble des éléments de N^* qui s'annulent sur τ. On a $\dim \mathbf{O}_\tau = \mathrm{codim}\, \tau$, et $\mathbf{O}_\tau \subset \overline{\mathbf{O}}_{\tau'}$, si et seulement si $\tau' \subset \tau$, où $\overline{\mathbf{O}}_{\tau'}$, est l'adhérence de $\mathbf{O}_{\tau'}$, ([TE], [0]).

Soit $\Delta = \langle B \rangle$ un cône régulier de dimension d dans $N_{\mathbb{Q}}$, où $B = \{v_1, \ldots, v_d\}$ est une *base ordonnée* de N qui engendre Δ, *i.e.* l'ensemble de vecteurs extrémaux de Δ est B. Soit $X_0 \cong K^d$ la variété torique (affine) associée à l'éventail Σ_0 des faces de Δ, Q_0 la T-orbite de dimension 0 de X_0 et $\sigma_1 : X_1 \to X_0$ l'éclatement de Q_0. La variété X_1 est la variété torique associée à l'éventail Σ_1, subdivision minimale de Σ_0 qui contient l'arête portant $u = \Sigma v_i$. Pour chaque entier i, $1 \leq i \leq d$, soit B_i la base ordonnée de N obtenue en remplaçant v_i par u dans la base B, et soit $\Delta_i := \langle B_i \rangle$ le cône régulier engendré par B_i. Le diviseur exceptionnel $B_0 := \sigma_1^{-1}(Q_0)$ contient la T-orbite dense définie par l'arête portant u. Chaque T-orbite de dimension 0 de X_1 correspond à un cône Δ_i de Σ_1, $1 \leq i \leq d$.

2. Constellations et chaînes toriques.

DÉFINITION 1. — Une *constellation torique* de dimension d de points infiniment voisins d'origine Q_0 est une suite $(Q_0, \ldots, Q_n) = C$ telle que chaque Q_j est une T-orbite 0-dimensionnelle dans la variété torique X_j obtenue en éclatant Q_{j-1} dans X_{j-1}, $1 \leq j \leq n$. Une *chaîne torique* est une constellation torique C telle que Q_j appartient au diviseur exceptionnel B_{j-1} de l'éclatement de Q_{j-1}, $1 \leq j \leq n$.

Le choix du point Q_1 d'une chaîne torique C équivaut à celui d'un entier a_1, $1 \leq a_1 \leq d$, qui détermine un cône Δ_{a_1} de l'éventail Σ_1. La subdivision Σ_2 de Σ_1 correspondant à l'éclatement de Q_1 est obtenue en remplaçant Δ_{a_1} (et ses faces) par les cônes $\Delta_{a_1 i} := \langle B_{a_1 i}\rangle$ (et leurs faces), $1 \leq i \leq d$, où $B_{a_1 i}$ est la base ordonnée de N obtenue en remplaçant dans B_{a_1} le i-$^{\text{ième}}$vecteur par Σv, $v \in B_{a_1}$. Le choix de $Q_2 \in B_1$ équivaut à celui d'un entier a_2, $1 \leq a_2 \leq d$, qui détermine un cône (régulier) $\Delta_{a_1 a_2}$. Par récurrence sur n, on obtient un codage des chaînes et des constellations toriques, avec les notations précédentes :

PROPOSITION 2. — *Soit B une base ordonnée de N.*

(a) Soit n un entier non négatif. L'application qui à chaque suite d'entiers $(a_1, \dots, a_n)$, telle que $1 \leq a_i \leq d$ pour $1 \leq i \leq n$, associe la chaîne torique $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$, où Q_0 est la T-orbite correspondant au cône $\Delta = \langle B\rangle$, et pour $1 \leq i \leq d$, Q_i est celle de X_i correspondant au cône $\Delta_{a_1 \cdots a_i}$ de l'éventail Σ_i, est une bijection entre l'ensemble des suites de n entiers compris entre 1 et d et celui des chaînes toriques avec $n+1$ points.

(b) Il existe une bijection naturelle entre l'ensemble des constellations toriques de dimension d et celui des arbres d-naires avec racine et avec les arêtes pondérés par des entiers positifs $\leq d$, tels que deux arêtes avec source commune aient des poids différents.

La partie *(b)* résulte de *(a)* et du fait que chaque sommet du graphe combinatoire orienté (arbre d-naire avec racine, *i.e.* tel que chaque sommet a au plus d sommets adjacents suivants, associé de façon naturelle à une constellation torique de dimension d), est relié à la racine par une chaîne unique d'arêtes descendantes.

Soit $C = (Q_0, \dots, Q_n)$ une constellation torique. Pour chaque $Q = Q_i$ on dénote par B_Q (ou B_i) le diviseur exceptionnel de l'éclatement $\sigma_{i+1} : X_{i+1} \longrightarrow X_i$ de Q_i, et par E_Q (ou E_i) (resp. E_Q^* (ou E_i^*)), sa transformée stricte (resp. sa transformée totale) sur chaque X_h, $i+1 < h \leq n+1$, de même que B_Q (ou B_i).

DÉFINITION 3. — On dit que Q_j est *proche* de Q_i, et on note $Q_j \longrightarrow Q_i$ (ou $j \longrightarrow i$) si $Q_j \in E_i$.

On obtient la caractérisation suivante des relations de proximité pour les points d'une chaîne torique (et par suite aussi pour une constellation torique) en utilisant le codage de la Proposition 2 :

PROPOSITION 4. — *Soit $(Q_0, \dots, Q_n)$ la chaîne torique associée à une suite d'entiers $(a_1, \dots, a_n)$, et soient j et k deux indices, $0 \leq j < k \leq n$. Alors Q_k est proche de Q_j si et seulement si $a_{j+1} \notin \{a_i \mid j+2 \leq i \leq k\}$.*

Démonstration. — Le diviseur exceptionnel B_j correspond à l'arête ℓ_j qui porte le a_{j+1}-ième vecteur de la base ordonnée $B_{a_1 \cdots a_{j+1}}$, donc le point Q_k est proche de Q_j si et seulement si ℓ_j est une arête de $\Delta_{a_1 \cdots a_k}$, d'où l'énoncé.

3. Idéaux monomiaux à support fini et amas toriques.

Soit $X = X_0 \cong K^d$ la variété torique affine associée à un cône régulier Δ dans $N_{\mathbb{Q}}$, $0 = Q_0$ sa T-orbite de dimension 0. Un idéal $I \subset \mathcal{O}_{X,0}$ est *monomial* s'il est T-stable ; il est à *support fini* s'il devient localement principal après une suite (finie) d'éclatements de points (points base de I).

DÉFINITION 5. — On appelle *amas* (torique) une constellation (torique) pondérée $A = (C, \underline{m})$, où $\underline{m} = \{m_Q | Q \in C\}$, chaque m_Q étant un entier non négatif.

On associe à chaque idéal monomial à support fini I l'amas torique $A_I = (C_I, \underline{m}_I)$, où $C_I = (Q_0, \ldots, Q_n)$ est la constellation minimale telle que $I\mathcal{O}_Z$ soit inversible (où Z est la variété obtenue en éclatant tous les points de C_I, *i.e.* les points base de I), et où $\underline{m}_I = (m_0, \ldots, m_n)$ avec $m_0 = \mathrm{ord}_{Q_0}(I)$ et $m_i = \mathrm{ord}_{Q_i}(F_i)$, F_i étant la transformée faible de I (voir [L], [C.G.L 1]) au voisinage de Q_i, $1 \leq i \leq n$. On dit qu'un *amas* (torique) est *idéaliste* s'il est l'amas associé à un idéal (monomial) à support fini.

LEMME 6. — *Soit $A = (C, \underline{m})$ un amas torique, tel que $m_i \neq 0$, $\forall i$, $\pi : Z \to X$ le morphisme composé des éclatements de tous les points de C, et $D := \sum_Q m_Q E_Q^*$ le diviseur dans Z à support exceptionnel associé à A. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) l'amas A est idéaliste,

(ii) le diviseur $-D$ est π-engendré,

(iii) l'inégalité $D \cdot V \leq 0$ est vérifiée pour l'adhérence V de chaque T-orbite de dimension un, dans Z, exceptionnelle pour π.

Démonstration. — Si I est un idéal (torique) à support fini tel que $A = A_I$, on peut supposer que I est complet (*i.e.* intégralement clos) quitte à prendre sa clôture intégrale. Alors on a $I\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_Z(-D)$, I est le germe en 0 de $\pi_*\mathcal{O}_Z(-D)$, et l'application $\pi^*\pi_*\mathcal{O}_Z(-D) \to \mathcal{O}_Z(-D)$ est surjective si et seulement si $\mathcal{O}_Z(-D)$ est π-engendré (*i.e.* engendré par ses sections globales au voisinage de $\pi^{-1}(Q_0)$), d'où l'équivalence entre (i) et (ii). Celle entre (ii) et (iii) résulte du lemme p. 47 de [TE]. ∎

Soit C une constellation (torique). On appelle *galaxie* de C l'ensemble des amas (toriques) idéalistes dont les constellations sont contenues dans C.

Le théorème suivant détermine les galaxies toriques et pour chaque amas torique idéaliste A_I donne une construction explicite du polygone de Newton de la clôture intégrale de l'idéal monomial I.

Soit Γ l'arbre avec arêtes pondérées associé à la constellation torique C de dimension d. Soient a, b, t des entiers non négatifs, avec $1 \leq a \leq d$, $1 \leq b \leq d$, $a \neq b$. Soit $Q \in C$; on note $Q(a, b^t)$ le point de C, infiniment voisin de Q, correspondant au sommet de Γ relié à celui correspondant à Q par une chaîne croissante d'arêtes avec poids $(a, b, \ldots, b)$ où b apparaît t fois (Prop. 2). Si $t = 0$, on le note $Q(a)$. Étant donné un amas torique $A = (C, \underline{m})$, on définit l'entier

$$M_Q(a, b) := \sum_{t \geq 0} m_{Q(a, b^t)} .$$

La somme est finie car C est un ensemble fini ; l'entier m_P est nul si $P \notin C$.

Pour chaque $Q \in C$, on note A_Q le sous-amas de A dont la constellation est formée de Q et des points de C infiniment proches de Q, avec les mêmes poids que ceux de A. Avec les notations précédentes, on a :

THÉORÈME 7. — *Soit $A = (C, \underline{m})$ un amas torique de dimension d.*

(i) L'amas A est idéaliste si et seulement si, pour chaque $Q \in C$ et pour chaque couple d'entiers différents a et b tels que $1 \leq a, b \leq d$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$(*) \qquad M_Q(a, b) + M_Q(b, a) \leq m_Q .$$

(ii) Soit Q un point non terminal de la constellation C. Si l'amas A_Q (resp. $A_{Q(j)}$) est associé à l'idéal monomial I (resp. au transformé faible I_j de I), on a

$$G = \bigcup_{1 \leq j \leq d} T_j^{-1}(G_j)$$

où G (resp. G_j) est l'ensemble des sommets du polygone de Newton de I (resp. de I_j), et où $T_j : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}^d$ est l'application de transformation faible $(n_1, \ldots, n_d) \mapsto (n_1, \ldots, n_{j-1}, (\sum_{1 \leq i \leq d} n_i) - m_Q, n_{j+1}, \ldots, n_d)$. Si $Q(j) \notin C$, on pose $I_j = (1)$ et $G_j = \{0\}$.

Idée de la démonstration. — L'inégalité $(*)$ est nécessaire pour que A soit idéaliste. En effet, soit W la droite projective, dans B_Q, qui porte $Q(a)$ et $Q(b)$. Alors $D \cdot V = (\sum_{P \to Q} e_P(W) \cdot m_P) - m_Q$, où $e_P(W)$ est la multiplicité en P de la transformée stricte de W, notée V dans Z. Or $\sum_{P \to Q} e_P(W) \cdot m_P = M_Q(a, b) + M_Q(b, a)$, et par suite $(*)$ résulte du lemme 6.

Inversement, si l'inégalité $(*)$ est vérifiée, alors on a $D \cdot V \leq 0$ pour l'adhérence V de chaque T-orbite exceptionnelle de dimension 1, car V est la transformée stricte d'une droite W comme celle définie avant. Alors A est idéaliste par le lemme 6.

L'assertion (ii) résulte de l'expression de la transformée faible d'un monôme $\underline{x}^{\underline{n}} = \pi x_i^{n_i}$, où $\underline{x}$ est le système de coordonnées au voisinage de Q induit par la base B (si $\underline{y}$ est celui au voisinage de $Q(j)$, alors la transformée faible de $\underline{x}^{\underline{n}}$ est le monôme $\underline{y}^{T_j(\underline{n})}$), et de la contraction de l'idéal au voisinage de Q dont l'existence repose sur les inégalités $(*)$. ∎

REMARQUE 8.

(a) L'assertion (*ii*) précédente fournit un algorithme effectif pour construire l'idéal complet dont l'amas associé soit un amas torique donné, satisfaisant les inégalités $(*)$. En effet, on construit son polygone de Newton par récurrence descendante à partir de la puissance m_P de l'idéal maximal de l'anneau local à chaque point terminal $P \in C$. Ceci montre encore la suffisance des inégalités $(*)$ et donne une démonstration constructive du théorème de contraction de Lipman [L], dans le cas torique.

(b) Les inégalités $(*)$, appelées *inégalités de proximité*, généralisent en dimension ≥ 3, dans le cas torique, celles considérées par Enriques et Chisini en dimension 2 [EC].

COROLLAIRE 9. — *Soit B une base ordonnée de N et $C = (Q_0, \dots, Q_n)$ la chaîne torique déterminée par une suite d'entiers $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $1 \leq a_i \leq d$, $1 \leq i \leq n$. Alors l'amas $A = (C, \underline{m})$ est idéaliste si et seulement si les inégalités suivantes sont satisfaites :*

$$m_{n-1} \geq m_n \geq 0$$
$$m_{i-1} \geq m_i \text{ si } a_i = a_{i+1} \text{ et } 1 \leq i < n$$
$$m_{i-1} \geq m_i + m_{i+1} + \cdots + m_{i+r_i} \text{ si } a_i \neq a_{i+1} \text{ et } 1 \leq i < n$$

où $r_i := \max\{r | a_{i+1} = a_{i+2} = \cdots = a_{i+r}\}$.

Ce corollaire résulte du théorème 7 (*i*) et du codage des chaînes toriques de la proposition 2.

Étant donnés deux idéaux complets à support fini (c.s.f.) I et J, on définit leur $*$-produit par la clôture intégrale de leur produit. Chaque chaîne C de points infiniment voisins (non nécessairement torique) est la constellation de points base d'un idéal (complet à support fini) unique tel que ses poids soient positifs et minimaux pour l'ordre lexicographique inverse ; un tel idéal est $*$-simple (on l'appelle *$*$-simple spécial*) et on le note $I(Q)$, où Q est le dernier point de C. Tout idéal c.s.f. s'écrit de façon unique comme produit d'idéaux $*$-simple spéciaux, avec des exposants entiers non nécessairement positifs [L]. La galaxie d'une constellation, munie du $*$-produit, forme un semigroupe dont le produit correspond à l'addition des poids pour chaque point. Dans le cas torique on a le résultat suivant, avec les notations du corollaire 9.

THÉORÈME 10. — *Soit C la chaîne torique associée à la suite $\underline{a}$.*

(i) L'amas $(C, \underline{p})$ associé à l'idéal $*$-simple spécial de C est donné par :

$$p_{n-1} = p_n = 1,$$
$$p_{i-1} = p_i \text{ si } a_i = a_{i+1} \text{ et } 1 \leq i < n,$$
$$p_{i-1} = r_i p_i + p_{i+r_i} \text{ si } a_i \neq a_{i+1} \text{ et } 1 \leq i < n, \text{ où } r_i := \max\{r \mid a_{i+1} = \cdots = a_{i+r}\}.$$

En écrivant la suite $\underline{a}$ sous la forme $(\alpha_1^{r_1}, \dots, \alpha_t^{r_t})$, où $\alpha_i^{r_i}$ dénote α_i, r_i fois, avec $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$, $1 \leq i \leq t$, alors la suite $\underline{p}$ s'écrit $(\mu_1^{r_1}, \dots, \mu_t^{r_t}, \mu_{t+1})$, où $\mu_{t+1} = \mu_t = 1$ et $\mu_{j-1} = r_j \mu_j + \mu_{j+1}$, $1 < j \leq t$.

(ii) Si I est un idéal c.s.f. dont les points base sont contenus dans C, avec amas associé $(C_I, \underline{m})$, alors les exposants de sa factorisation en $*$-produit d'idéaux $*$-simples spéciaux $I = \overset{*}{\prod\limits_{0\leq i\leq n}} I(Q_i)^{b_i}$ sont donnés par

$$\begin{aligned} b_n &= m_n, b_{n-1} = m_{n-1} - m_n, \\ b_{i-1} &= m_{i-1} - m_i \text{ si } a_i = a_{i+1} \text{ et } 1 \leq i < n \\ b_{i-1} &= m_{i-1} - r_i m_i - m_{i+r_i} \text{ si } a_i \neq a_{i+1} \text{ et } 1 \leq i < n \ . \end{aligned}$$

(iii) La galaxie de C est un semigroupe isomorphe à un cône régulier de $\mathbb{Z}^{n+1}$, de dimension $n+1$, dont les vecteurs extrémaux sont les poids des amas associés aux idéaux $*$-simples spéciaux. Par suite les exposants de la factorisation d'un idéal c.s.f. en $*$-produit d'idéaux $*$-simples spéciaux sont positifs.

Démonstration. — L'assertion (i) résulte du corollaire 9 et elle implique (ii) par un calcul direct. L'assertion (iii) résulte du fait que les inégalités de proximité qui déterminent les poids de la galaxie forment un système triangulaire dont la matrice associée est de déterminant 1. ∎

REMARQUE 11. — Le dernier théorème généralise, pour les idéaux monomiaux c.s.f. en dimension quelconque, celui sur la factorisation des idéaux complets en dimension 2 de Zariski [Z-S].

EXEMPLE 12.

Soit $C_{\underline{a}}$ la constellation torique de dimension 3 associée à la suite $\underline{a} = (3, 1^2, 2, 1^3)$. Alors les poids de l'amas associé à l'idéal complet $*$-simple spécial dont la constellation est $C_{\underline{a}}$ est $\underline{p} = (14, 5^2, 4, 1^4)$. Cet idéal est la clôture intégrale de $I(C_{\underline{a},\underline{p}}) = (X^{14}, Y^{14}, Z^{19}, Y^5Z^9, X^2Y^3Z^{10}, X^2Z^{16})$. La galaxie de $C_{\underline{a}}$ est isomorphe au cône régulier de dimension 8, de $\mathbb{Z}^8$, engendré par

$$\begin{aligned} &\underline{p}_0 = (1, 0^7), \quad \underline{p}_1 = (1^2, 0^6), \quad \underline{p}_2 = (2, 1^2, 0^5), \quad \underline{p}_3 = (3, 1^3, 0^4), \\ &\underline{p}_4 = (5, 2^2, 1^2, 0^3), \quad \underline{p}_5 = (8, 3^2, 2, 1^2, 0^2), \quad \underline{p}_6 = (11, 4^2, 3, 1^3, 0) \quad \text{et} \quad \underline{p}_7 = \underline{p} \, . \end{aligned}$$

Références

[C.G.L 1] A. CAMPILLO, G. GONZALEZ-SPRINBERG, M. LEJEUNE-JALABERT. *Amas, idéaux à support fini et chaînes toriques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **315** (1992), 987–990.

[C.G.L 2] A. CAMPILLO, G. GONZALEZ-SPRINBERG, M. LEJEUNE-JALABERT. *Clusters, proximity inequalities and Zariski-Lipman complete ideal theory*, Prépub. de l'Institut Fourier, 40 p., 1993.

[Ca] E. CASAS. — *Infinitely near imposed singularities and singularities of polar curves*, Math. Ann. **287** (1990), 429–454.

[E.C] F. ENRIQUES, O. CHISINI. — *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, **libro IV**,1915.

[L] J. LIPMAN. — *On complete ideals in regular local rings*, Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honor of M. Nagata, 203–231, 1987.

[O] T. ODA. — *Convex bodies and algebraic geometry*, Ergeb. Math. Grenzberb, **15**, Springer-Verlag, 1988.

[TE] G. KEMPF, F. KNUDSEN, D. MUMFORD, B. SAINT-DONAT. — *Toroidal Embeddings 1, Springer-Verlag*, **LNM 339**, 1973.

[Z.S] O. ZARISKI, P. SAMUEL. — *Commutative Algebra II*, Appendix **5**, Van Nostrand, 1960.

– ◊ –

Gérard GONZALEZ-SPRINBERG
Université de Grenoble I
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
associé au CNRS (URA 188)
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
email: gonsprin@fourier.grenet.fr