COMPOSITIO MATHEMATICA

ALFRED LOEWY

Anschauliche Interpretation eines linearen homogenen Differentialsystems

Compositio Mathematica, tome 1 (1935), p. 188-192
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__1__188_0>

Anschauliche Interpretation eines linearen homogenen Differentialsystems

von

Alfred Loewy

Freiburg i.B.

In der Zeit von a bis b $(a < b)$ werden n Mengen beobachtet; die Anfangswerte dieser seien zur Zeit $x = a$ gegeben durch $c_1, c_2, \ldots, c_n$ und belaufen sich zur Zeit x, wobei $a \leqq x \leqq b$ ist, auf $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$. Die n Mengen sollen sich während der Beobachtungszeit in folgender Weise kontinuierlich gegenseitig beeinflussen: In der Zeit x bis $x + h$ erfahre die k-te Menge $(k = 1, 2, \ldots, n)$ infolge der Einwirkung der ersten Menge $y_1(x)$ eine Änderung um $y_1(x)\, a_{k1}(\tau)\, h$, der zweiten Menge $y_2(x)$ um $y_2(x) a_{k2}(\tau) h, \ldots$, der n-ten Menge $y_n(x)$ um $y_n(x) a_{kn}(\tau) h$, wobei τ zwischen x und $x + h \leqq b$ gelegen ist und die n^2 „Intensitäten" $a_{ki}(x)$ $(k, i = 1, 2, \ldots, n)$ im Intervalle von $a \leqq x \leqq b$ eindeutig definierte, stetige Funktionen der reellen Veränderlichen x bedeuten. Durch diese Änderungen, die jeweils proportional den vorhandenen wirksamen Mengen, der verflossenen Zeit h und den entsprechenden Intensitäten sein sollen, nimmt die k-te Menge zur Zeit $x + h$ den Wert an

$$y_k(x + h) = y_k(x) + y_1(x) a_{k1}(\tau)\, h + y_2(x) a_{k2}(\tau)\, h + \ldots + y_n(x) a_{kn}(\tau)\, h. \quad (1)$$

Durch Division mit h und Übergang zur Grenze ergibt sich infolge der Stetigkeit der Funktionen $a_{ki}(x)$, da

$$\lim_{h \to 0} \frac{y_k(x + h) - y_k(x)}{h} = \frac{dy_k(x)}{dx},$$

das lineare homogene Differentialsystem

$$\frac{dy_k(x)}{dx} = y_1(x) a_{k1}(x) + y_2(x) a_{k2}(x) + \ldots + y_n(x) a_{kn}(x)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Die gegebene Interpretation des Differentialsystems führt unmittelbar zu einer auschaulichen Herleitung seiner Integrale unter Benützung der von Volterra eingeführten und von SCHLESINGER[1]) ausgestalteten Integralmatrizen. x_p und x_{p+1} seien zwei Größen aus dem Intervall von a bis b, also $a \leqq x_p < x_{p+1} \leqq b$, und ξ_p bedeute einen Zwischenwert zwischen x_p und x_{p+1}, so daß $x_p \leqq \xi_p \leqq x_{p+1}$. Dann wird der Wert der k-ten Menge zur Zeit x_p gegeben durch $y_k(x_p)$ und zur Zeit x_{p+1} nach Formel (1) durch

$$\begin{aligned} y_k(x_p) + y_1(x_p)a_{k1}(\xi_p)(x_{p+1}-x_p) + y_2(x_p)a_{k2}(\xi_p)(x_{p+1}-x_p) + \dots \\ + y_n(x_p)a_{kn}(\xi_p)(x_{p+1}-x_p) = \\ = y_1(x_p)a_{k1}(\xi_p)(x_{p+1}-x_p) + y_2(x_p)a_{k2}(\xi_p)(x_{p+1}-x_p) + \dots \\ + y_k(x_p)\{a_{kk}(\xi_p)(x_{p+1}-x_p)+1\} + \dots + y_n(x_p)a_{kn}(\xi_p)(x_{p+1}-x_p). \end{aligned} \tag{2}$$

Wir führen unter Verwendung des Kroneckerschen Symbols $\delta_{ki} = 0$, wenn $k \neq i$ und $\delta_{kk} = 1$, die Matrix ein

$$\hat{\mathfrak{A}}_p = \| a_{ki}(\xi_p)(x_{p+1}-x_p) + \delta_{ki} \|.$$

Unter $[y(x_p)]$ verstehen wir die Matrix, die nur in der ersten Spalte die Elemente $y_1(x_p)$, $y_2(x_p)$, $\dots$, $y_n(x_p)$, sonst lauter Nullen enthält; dann sind die zur Zeit x_{p+1} auf Grund der Formel (2) bestimmten Mengen $y_k(x_{p+1})$ durch die erste Spalte der Elemente der Matrix $\hat{\mathfrak{A}}_p[y(x_p)]$ gegeben.

Wir teilen das Intervall von a bis x, wobei $a \leqq x \leqq b$ ist, durch Einschieben von Zwischenwerten $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p$; dabei sei $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{p-1} < x_p < x$ und $x_0 = a$, $x_{p+1} = x$ gesetzt. Dann ergibt sich durch wiederholte Anwendung des oben gewonnenen Matrizenausdrucks $\hat{\mathfrak{A}}_p[y(x_p)]$, wenn $c_1, c_2, \dots, c_n$ die Anfangswerte der n Mengen zur Zeit $x_0 = a$ sind, daß die zur Zeit x_{p+1} vorhandenen Mengen durch die erste Spalte der Elemente der Matrix $\hat{\mathfrak{A}}_p\hat{\mathfrak{A}}_{p-1}\dots\hat{\mathfrak{A}}_1\hat{\mathfrak{A}}_0[c]$, die das Produkt von $p+2$ Matrizen ist, bestimmt werden, wenn unter $[c]$ die quadratische Matrix verstanden wird, die nur in der ersten Spalte die Elemente $c_1, c_2, \dots, c_n$, sonst lauter Nullen enthält. Bei kontinuierlicher Einwirkung hat man die Zeitintervalle $x_1 - a$,

---

[1]) L. SCHLESINGER, Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, Leipzig und Berlin 1908 (erste und zweite Vorlesung) sowie sein Bericht über die Entwickelung der Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865, Leipzig und Berlin 1909 (S. 7). Eine neue und erweiterte Darstellung der Theorie der Integralmatrizen, die aber für das Folgende nicht benötigt wird, gibt L. SCHLESINGER in seinen Aufsätzen: Neue Grundlagen für einen Infinitesimalkalkül der Matrizen [Mathematische Zeitschrift **33** (1931), 33] sowie weitere Beiträge zum Infinitesimalkalkül der Matrizen [ebenda **35** (1932), 485].

$x_2 - x_1, \ldots, x_p - x_{p-1}, x_{p+1} - x_p$ nach Null konvergieren zu lassen und den Grenzwert $\lim \hat{\mathfrak{A}}_p \hat{\mathfrak{A}}_{p-1} \ldots \hat{\mathfrak{A}}_1 \hat{\mathfrak{A}}_0[c]$ unserer letzten Matrix zu betrachten. Die Elemente der ersten Spalte dieser Matrix $\lim \hat{\mathfrak{A}}_p \hat{\mathfrak{A}}_{p-1} \ldots \hat{\mathfrak{A}}_1 \hat{\mathfrak{A}}_0[c]$, die außer in ihrer ersten Spalte lauter Nullen enthält, liefern die Integrale $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ des Differentialsystems, die sich für den Beginn $x = a$ auf die Anfangswerte $c_1, c_2, \ldots, c_n$ reduzieren.

Die hier anschauungsmäßig hergeleitete Integration des linearen homogenen Differentialsystems stimmt mit der auf analytischem Wege gewonnenen der Herren Volterra und Schlesinger überein. Betrachtet man statt unserer Produktmatrix

$$\lim \hat{\mathfrak{A}}_p \hat{\mathfrak{A}}_{p-1} \ldots \hat{\mathfrak{A}}_1 \hat{\mathfrak{A}}_0[c],$$

die nur in der ersten Spalte von Null verschiedene Elemente enthielt, die Integralmatrix, die in unserer Bezeichnung lautet

$$\lim \hat{\mathfrak{A}}_p \hat{\mathfrak{A}}_{p-1} \ldots \hat{\mathfrak{A}}_1 \hat{\mathfrak{A}}_0,$$

so hat man eine Integralmatrix, bei der die Elemente jeder Spalte ein partikuläres System von Integralen des linearen homogenen Differentialsystems sind und sich aus unserer Produktmatrix jeweils für die Anfangswerte $c_1 = 1, c_2 = 0, \ldots, c_n = 0$ bzw. $c_1 = 0, c_2 = 1, \ldots, c_n = 0$ bzw. ... bzw. $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_n = 1$ ergeben. Die Änderung in der Aufeinanderfolge der Faktoren unserer Integralmatrix gegenüber der in Schlesingers Vorlesungen (S. 28) verwendeten ist dadurch bedingt, daß bei Schlesinger das Differentialsystem Koeffizienten besitzt, bei denen der erste und der zweite Index in umgekehrter Reihenfolge wie bei uns stehen, also bei ihm für unsere Spalten Zeilen zu treten haben.

In genau analoger Weise läßt sich auch die Integration des Differentialsystems mittels sukzessiver Approximation durch unendliche Reihen mit Koeffizienten, die durch iterierte Quadraturen gewonnen werden, interpretieren [1]). Für das lineare homogene Differentialsystem

$$\frac{dy_k(x)}{dx} = y_1(x)a_{k1}(x) + y_2(x)a_{k2}(x) + \ldots + y_n(x)a_{kn}(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

[1]) Vgl. wegen des folgenden Resultats G. Peano, Intégration par séries des équations différentielles linéaires [Mathematische Annalen **32** (1888)] sowie meinen Aufsatz: Die Integration eines linearen Differentialsystems und ihre finanztheoretische Bedeutung [Blätter für Versicherungs-Mathematik und verwandte Gebiete **1934**].

oder symbolisch geschrieben

$$\left[\frac{dy}{dx}\right] = \mathfrak{A}(x)[y],$$

wobei $\mathfrak{A}(x)$ die quadratische Matrix $\| a_{ki}(x) \|$ $(k, i = 1, 2, \ldots, n)$ bedeutet, lautet ein System von Integralen, das für $x = a$ die vorgegebenen Werte $(y_1)_{x=a} = c_1$, $(y_2)_{x=a} = c_2, \ldots, (y_n)_{x=a} = c_n$ annimmt, in Matrizenform

$$\begin{aligned}[y] = [c] + \int_a^x dx_1 \mathfrak{A}(x_1)[c] + \int_a^x dx_1 \mathfrak{A}(x_1) \int_a^{x_1} dx_2 \mathfrak{A}(x_2)[c] + \\ + \int_a^x dx_1 \mathfrak{A}(x_1) \int_a^{x_1} dx_2 \mathfrak{A}(x_2) \int_a^{x_2} dx_3 \mathfrak{A}(x_3)[c] + \qquad (3) \\ + \int_a^x dx_1 \mathfrak{A}(x_1) \int_a^{x_1} dx_2 \mathfrak{A}(x_2) \int_a^{x_2} dx_3 \mathfrak{A}(x_3) \int_a^{x_3} dx_4 \mathfrak{A}(x_4)[c] + \ldots;\end{aligned}$$

hierbei bedeuten $[y]$, $\left[\frac{dy}{dx}\right]$ und $[c]$ Matrizen, die nur in der ersten Spalte die Elemente $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bzw. $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ bzw. $c_1, c_2, \ldots, c_n$, sonst lauter Nullen enthalten, schließlich ist $\int_a^x dx_1\, \mathfrak{A}(x_1)\, \mathfrak{M}(x_1)$ die Matrix mit den Elementen

$$p_{ik}(x) = \int_a^x dx_1 \left\{ \sum_{s=1}^{s=n} a_{is}(x_1)\, m_{sk}(x_1) \right\}.$$

Die Größen $m_{ik}(x_1)$ sind die Elemente der i-ten Zeile, k-ten Spalte der Matrix $\mathfrak{M}(x_1)$, und für diese werden gemäß der unendlichen Reihe (3) aufeinanderfolgend die Einheitsmatrix, weiter die Matrizen

$$\int_a^{x_1} dx_2 \mathfrak{A}(x_2), \quad \int_a^{x_1} dx_2 \mathfrak{A}(x_2) \int_a^{x_2} dx_3 \mathfrak{A}(x_3),$$
$$\int_a^{x_1} dx_2 \mathfrak{A}(x_2) \int_a^{x_2} dx_3 \mathfrak{A}(x_3) \int_a^{x_3} dx_4 \mathfrak{A}(x_4), \ldots$$

einzusetzen sein.

Die Matrix der Formel (3) hat außer in der ersten Spalte nur Nullen. Die Elemente der ersten Spalte sind unendliche Reihen; die ersten Summanden dieser unendlichen Reihen sind die Anfangswerte $c_1, c_2, \ldots, c_n$, die zweiten Summanden

$$\int_a^x dx_1 \sum_{s=1}^{s=n} a_{ks}(x_1) c_s \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

sind die in der Zeit von a bis x durch die kontinuierliche Einwirkung sämtlicher anfänglich vorhandener Mengen hervorgerufenen Änderungen der ersten Summanden, die dritten Summanden

$$\int_a^x dx_1 \sum_{t=1}^{t=n} a_{kt}(x_1) \int_a^{x_1} dx_2 \sum_{s=1}^{s=n} a_{ts}(x_2) c_s \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

sind die sich in der Zeit von a bis x durch die kontinuierliche Einwirkung sämtlicher in den zweiten Summanden auftretender Mengen ergebenden Änderungen, und so geht es weiter fort.

(Eingegangen den 5. August 1933.)