COMPOSITIO MATHEMATICA

G. VALIRON

Sur une classe de fonctions entières admettant deux directions de Borel d'ordre divergent

Compositio Mathematica, tome 1 (1935), p. 193-206

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__1__193_0>

Sur une classe de fonctions entières admettant deux directions de Borel d'ordre divergent

par

G. Valiron

Paris

Etant donnée une fonction entière $f(z)$, d'ordre ϱ, j'ai appelé direction de Borel d'ordre ϱ divergent de $f(z)$ une direction $\varphi = \arg z = \text{const.}$ telle que, $r_n(x)$ désignant le module du $n^{\text{ième}}$ zéro de $f(z) - x$ situé dans un angle arbitraire de sommet origine et de bissectrice φ, la série

$$\sum r_n(x)^{-\varrho}$$

diverge pour tous les x finis sauf un au plus [1]. J'ai établi que, pour qu'il existe de telles directions, il faut et il suffit que $f(z)$ soit de la classe divergente de son ordre, c'est-à-dire que, $M(r, f)$ étant le maximum de $|f(re^{i\varphi})|$, $0 < \varphi \leqq 2\pi$, l'intégrale

$$\int^{\infty} r^{-\varrho-1} \log M(r, f) dr$$

diverge. Si $\varrho > \frac{1}{2}$, il existe au moins deux directions de Borel d'ordre ϱ divergent; s'il n'y en a que deux et si $\varrho > 1$, leur angle est $\frac{\pi}{\varrho}$. J'ai indiqué sans démonstration (loc. cit., p. 470) que les fonctions de Lindelöf rentrent dans cette classe [2].

Le but de ce petit mémoire, qui développe les résultats d'une Note aux Comptes Rendus [3], est de montrer qu'un grand nombre de fonctions du type moyen de l'ordre ϱ, formées d'une façon naturelle, rentrent également dans cette classe. Le résultat principal obtenu est celui-ci:

---

[1] Voir Journal de Math. **10** (1931), 457—480. Je signale qu'à la fin de l'énoncé IX, p. 471, on doit lire $\pi : 2\varrho$ au lieu de $\pi : \varrho$ et que p. 473, ligne 11, on doit lire max. de $\overset{+}{\log}$ au lieu de $\Sigma \overset{+}{\log}$, ligne 13, $O[r \log r]$ au lieu de $O[\log r]$.

[2] Pour les fonctions de Mittag-Leffler, la propriété est évidente.

[3] C. R. **196** (1933), 1458—1460.

IX. *Toute fonction*

$$L(z, \varrho, \theta) = P_{q-1}(z) + \sum_{n=q}^{\infty} n^{-\sigma n}\theta(n)\, z^n,$$

où $P_{q-1}(z)$ *est un polynome de degré* $q-1$, $\sigma = \frac{1}{\varrho} < 2$, *n'admet que les deux directions de Borel* $\varphi = \pm \frac{1}{2}\pi\varrho$ *pourvu que* $\theta(z)$ *vérifie les conditions suivantes:* $\theta(z)$ *est holomorphe pour* $x = \Re z \geqq 0$, $r = |z| > C > 0$, *on a uniformément pour* $x \geqq 0$ *et* $|z|$ *tendant vers* ∞

$$\lim \frac{\log|\theta(z)|}{r} = 0\ ;$$

pour $y > 0$, *on a*

$$\log |\theta(\pm iy)| < \varepsilon(y) y$$

avec

$$\lim_{y=\infty} \varepsilon(y) = 0\ , \qquad \lim_{y=\infty} \varepsilon(y) y = \infty\ ,$$

$$\int^{\infty} \frac{\varepsilon(y)}{y} dy < \infty\ .$$

La démonstration de cette proposition repose sur l'étude du module de $f(z)$ dans la voisinage des directions $\varphi = \pm \frac{1}{2}\pi\sigma$; elle utilise la méthode employée par M. Lindelöf dans son Livre sur le calcul des résidus et des propriétés de la représentation conforme. On peut obtenir des résultats moins complets par une méthode plus simple en se bornant à une étude de $|f(z)|$ sur ces directions elles-mêmes. Je donne d'abord ces résultats moins complets. La méthode fournissant l'énoncé donné ci-dessus se prête aisément aux généralisations aux cas des fonctions du type maximum ou du type minimum, ces généralisations feront l'objet d'un autre travail.

1. Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre fini ϱ positif et du type moyen de cet ordre, de sorte que

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r, f)}{r^{\varrho}} = A\ , \quad 0 < A < \infty.$$

Posons

$$L(r, \varphi) = \int_1^r r^{-\varrho-1} \overset{+}{\log} |f(re^{i\varphi})|\, dr$$

($\overset{+}{u}$ désigne u si $u \geqq 0$, et 0 si $u \leqq 0$). Partons de la fonction

$$(1) \qquad iz^{-\varrho-1} \log f(z)$$

et intégrons sur le contour Γ constitué par les deux arcs de cercles

$r=1$, $|\varphi| \leqq \frac{\pi}{2\varrho}$; $r=R$, $|\varphi| \leqq \frac{\pi}{2\varrho}$ et par les deux segments $z = te^{\pm i\frac{\pi}{2\varrho}}$, $1 \leqq t \leqq R$, auquel on adjoint les segments

$$z = te^{i\omega_n}, \quad r_n \leqq t \leqq R$$

issus des zéros $a_n = r_n e^{i\omega_n}$ de $f(z)$ situés dans Γ. L'intégrale obtenue est nulle. Il est entendu que dans (1), $z^{-\varrho-1}$ désigne la branche égale à $r^{-\varrho-1}$ au point $z=r$ prolongée sans sortir de Γ et que $\log f(z)$ est défini en prolongeant, sans sortir de Γ et sans traverser les segments qui y ont été ajoutés, à partir d'une valeur initiale. En tenant compte de ce que, pour une fonction du type moyen, on a, dans ces conditions,

$$\int_0^{2\pi} |\log f(re^{i\varphi})| \, d\varphi < A' r^\varrho, \quad A' \text{ fini},$$

et en prenant la partie réelle des intégrales obtenues, on trouve

$$L\left(R, \frac{\pi}{2\varrho}\right) + L\left(R, -\frac{\pi}{2\varrho}\right) - \frac{2\pi}{\varrho} \sum \frac{\cos \omega_n \varrho}{r_n^\varrho} > -\frac{2\pi}{\varrho} \sum \frac{\cos \omega_n \varrho}{R^\varrho} + h,$$

h étant une constante et les sommes étant étendues aux zéros appartenant à Γ. Comme le nombre de ces zéros est au plus égal au nombre $n(R)$ des zéros de $f(z)$ dont le module est inférieur à R et comme $n(R)/R^\varrho$ est borné, on voit que

$$\sum \frac{\cos \omega_n \varrho}{r_n^\varrho} < \frac{\varrho}{2\pi}\left[L\left(R, \frac{\pi}{2\varrho}\right) + L\left(R, -\frac{\pi}{2\varrho}\right)\right] + h',$$

h' restant borné lorsque $R \to \infty$. On arrive donc à la proposition suivante:

I. *Si $f(z)$ est du type moyen de l'ordre ϱ et si l'intégrale*

$$\int_1^\infty r^{-\varrho-1} \overset{+}{\log} |f(re^{i\varphi})| \, dr \tag{2}$$

converge pour $\varphi = \pm \frac{\pi}{2\varrho}$, la série

$$\sum \frac{\cos \omega_n \varrho}{r_n^\varrho}, \tag{3}$$

étendue aux zéros $r_n e^{i\omega_n}$ de $f(z)$ pour lesquels $|\omega_n| \leqq \frac{\pi}{2\varrho}$, est convergente.

On serait arrivé également au résultat en utilisant la formule (13) de mon mémoire cité en y prenant $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2\varrho}$, $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2\varrho}$.

Car le coefficient du terme en $\sin k\frac{\pi}{\varrho}$, $J'(\varphi_0)$, est alors négatif et l'on a

$$J(\varphi_0, k) < \frac{A}{k-\varrho}$$

de sorte que $J(\varphi_0, k) \sin \left|\frac{k\pi}{\varrho}\right|$ reste borné si k tend vers ϱ.

Si l'on suppose que

$$H(\varphi, f) = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\overset{+}{\log} |f(re^{i\varphi})|}{r^\varrho}$$

est nul pour $\frac{\pi}{2\varrho} \leqq \varphi \leqq 2\pi - \frac{\pi}{2\varrho}$, $(\varrho > \frac{1}{2})$, on sait que, en vertu d'un théorème de M.M. Lindelöf et Phragmén [4]), on a

$$H(\varphi, f) = A \cos \varphi\varrho \quad \text{pour } |\varphi\varrho| < \frac{\pi}{2}.$$

Moyennant cette hypothèse supplémentaire, la proposition I a été établie par Miss Cartwright dans un mémoire encore inédit.

II. *Si l'on suppose que l'intégrale* (2) *converge pour*

$$\frac{\pi}{2\varrho} \leqq \varphi \leqq 2\pi - \frac{\pi}{2\varrho}, \tag{4}$$

les seules directions de Borel d'ordre ϱ *divergent de* $f(z)$ *sont*

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2\varrho}.$$

Car il n'y en a pas à l'intérieur de l'angle (4) d'après le théorème X de mon mémoire cité et il n'y en a pas dans l'angle $|\varphi| < \frac{\pi}{2\varrho}$ d'après I tandis que tout angle d'ouverture $2\pi - \frac{\pi}{2\varrho}$ doit en contenir une.

2. La méthode donnée par M. Lindelöf pour former des fonctions entières d'ordre ϱ tendant vers 0 lorsqu'on s'éloigne indéfiniment dans tout angle extérieur à $|\varphi| \leqq \frac{\pi}{2\varrho}$ permet d'obtenir des fonctions vérifiant II. Pour toutes les fonctions formées par cette méthode, $|f(z)|$ restera inférieur à $|z|^k$, k fini, lorsqu'on s'éloignera indéfiniment dans tout angle intérieur à (4), de sorte que (2) convergera à l'intérieur de (4), il suffira d'étudier (2) sur les directions limites.

[4]) Acta math. 31 (1908), 381—406.

Considérons d'abord la fonction de Lindelöf

$$L(z)=\sum_0^\infty n^{-n\sigma}z^n\,,\qquad \sigma=\frac{1}{\varrho}<2\,.$$

Pour z appartenant à l'angle

$$\tfrac{1}{2}\pi\sigma<\varphi<2\pi-\frac{\pi}{2}\sigma$$

on a, d'après M. Lindelöf,

$$L(z)=1-\int_\Gamma\frac{z^u u^{-u\sigma}}{e^{2i\pi u}-1}\,du\,,\tag{5}$$

Γ étant formé des demi-droites $u=it$, $t\geqq\frac{1}{2}$ et $t\leqq-\frac{1}{2}$ et du demi-cercle $|u|=\frac{1}{2}$, $\Re u\geqq 0$. L'intégrale prise sur la portion de Γ pour laquelle $\Re(-iu)<10$ est holomorphe et moindre que $K\sqrt{r}$, K fini, pourvu que $\varphi<2\pi-\frac{1}{2}\pi\sigma$. Considérons

$$-\int_{10i}^{i\infty}\frac{z^u u^{-u\sigma}}{e^{2i\pi u}-1}du=\int_{10i}^{i\infty}z^u u^{-u\sigma}du-\int_{10i}^{i\infty}\frac{e^{2i\pi u}z^u u^{-u\sigma}}{e^{2i\pi u}-1}du\,.$$

La seconde intégrale est holomorphe et bornée pour $\varphi>\frac{\pi\sigma}{2}-2\pi+\varepsilon$, $\varepsilon>0$. La première s'écrit

$$i\int_{10}^{\infty}r^{it}t^{-it\sigma}e^{t\left(\frac{\pi\sigma}{2}-\varphi\right)}dt\,;$$

pour $\varphi\geqq\frac{1}{2}\pi\sigma$ son module est inférieur à

$$er^\varrho+\left|\int_{er^\varrho}^{\infty}e^{t\left(\frac{\pi\sigma}{2}-\varphi\right)}\{\cos t(\sigma\log t-\log r)-i\sin t(\sigma\log t-\log r)\}\,dt\right|.$$

En posant $t(\sigma\log t-\log r)=\nu$, on ramène l'intégrale restante à l'intégrale classique

$$\int_{\sigma er^\varrho}^{\infty}\frac{\cos\nu-i\sin\nu}{\varphi(\nu)}\,d\nu$$

où $\varphi(\nu)$ est croissante, non bornée et supérieure à 2σ pour $\varphi\geqq\frac{1}{2}\pi\sigma$. Cette intégrale est donc bornée uniformément. Comme $L(z)$ est une fonction réelle, on arrive au résultat suivant:

III. *Dans l'angle* (4), *le module de* $L(z)$ *est inférieur à* $A(r^\varrho+1)$, *A étant un nombre fixe.*

La proposition II s'applique donc. Pour obtenir le résultat relatif aux directions de Borel, on peut aussi remarquer que pour la fonction

$$L_2(z) = \sum_{1}^{\infty} n^{-\sigma n - 2} z^n$$

la formule analogue à (5) fournit une intégrale absolument convergente dans l'angle (4), $L_2(z)$ est bornée dans cet angle. Comme

$$L(z) = 1 + z\frac{d}{dz}\left\{ z\frac{d}{dz}L_2(z) \right\},$$

$|L(z-1)|$ est inférieur à Br^2 dans l'angle (4) ce qui entraîne le résultat en vue.

3. En se plaçant à ce dernier point de vue on généralise facilement. Considérons la fonction

$$(6) \qquad L(z, \varrho, \theta) = P_{q-1}(z) + \sum_{q}^{\infty} \left(\frac{z}{n^\sigma}\right)^n \theta(n), \qquad \sigma = \frac{1}{\varrho},$$

où $P_{q-1}(z)$ est un polynome de degré $q-1$ et $\theta(z)$ une fonction holomorphe dans le domaine $\Re z \geqq 0$, $|z| \geqq r_0 > 0$.

Supposons que dans le domaine d'holomorphie envisagé de $\theta(z)$, on ait

$$(7) \qquad \log |\theta(z)| < r^k, \quad k < 1, \quad r = |z| > r_1.$$

A l'intérieur de l'angle (4), $L(z, \varrho, \theta)$ ne diffère que par un polynome de

$$(8) \qquad -\int_L \frac{z^u u^{-u\sigma}\theta(u)}{e^{2i\pi u} - 1} du,$$

L désignant ici un contour constitué par les demi-droites $u = it$, $t \geqq c$, $t \leqq -c$ et par le demi-cercle $\Re u \geqq 0$, $|u| = c$, $c > r_0$, $c > 1$, c non entier. Prenons

$$z = re^{i\tau}, \quad \tau = \frac{\pi\sigma}{2} + \frac{\beta}{r}, \quad \beta > 0.$$

La portion de (8) relative à $\Re(-iu) < 2c$ est encore inférieure à Kr^{2c} et le reste a son module inférieur à

$$2\int_{2c}^{\infty} e^{-\frac{y\beta}{r}} e^{y^k} dy.$$

En décomposant l'intervalle d'intégration en deux au moyen du point défini par $y\beta = 2ry^k$, on voit que cette intégrale est inférieure à

$$\frac{4r}{\beta} + 2\left(\frac{2r}{\beta}\right)^{\frac{1}{1-k}} e^{\left(\frac{2r}{\beta}\right)^{\frac{k}{1-k}}}.$$

Comme on peut procéder de même pour

$$z = re^{(2\pi-\tau)i},$$

on obtient ce résultat:

IV. *$L(z, \varrho, \theta)$ étant définie par* (6), *$\theta(z)$ holomorphe pour $\Re z \geqq 0$, $|z| \geqq r_0 > 0$ vérifiant* (7), *on a dans l'angle* (4)

$$\log | L(z-h, \varrho, \theta) | < A(h) r^{\frac{k}{1-k}}, \quad h > 0.$$

Si $k < \frac{\varrho}{1+\varrho}$ et si $\theta(z)$ est telle que la fonction soit de type moyen, les directions $\varphi = \pm \frac{\pi}{2\varrho}$ sont les seules directions de Borel d'ordre ϱ divergent.

4. Nous remplacerons ici la condition (7) par les suivantes: Dans le secteur $\Re z \geqq 0$, $|z| \geqq r_0 > 0$, $\log|\theta(z)|/r$ tend vers 0 lorsque $r \to \infty$ et pour $0 < a \leqq |\varphi| \leqq \frac{\pi}{2}$, $a < \frac{\pi}{2}$, on a

(9) $$\log | \theta(z) | < \varepsilon(r) r,$$

$\varepsilon(y)$ étant une fonction décroissante tendant vers 0 telle que

(10) $$\int^{\infty} \varepsilon(y) \frac{dy}{y}$$

converge.

A l'intérieur de (4), $L(z, \varrho, \theta)$ diffère par un polynome de

$$-\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{z^u u^{-u\sigma} \theta(u)}{e^{2i\pi u} - 1} du, \qquad q-1 < \alpha < q.$$

Prenons par exemple

$$z = re^{i\tau}, \qquad \tau = \tfrac{1}{2}\pi\sigma + \eta, \qquad \eta > 0$$

et $u = v + iw$, $v > 0$, $w > 0$ et assez grand, et $10v < w$. On a alors

(11) $$\left| \frac{z^u u^{-u\sigma} \theta(u)}{e^{2i\pi u} - 1} \right| < e^{\varepsilon(w) w} \left(\frac{r^{\varrho}}{w\sqrt{e}} \right)^{\sigma v} e^{-\eta w}.$$

Le produit par v du second membre tend vers 0 lorsque $w \to \infty$.

On peut donc remplacer l'intégration sur la demi-droite $v = \alpha$, $w > \beta > 0$ par l'intégration sur une ligne brisée d'équations

$$w_n \leqq w \leqq w_{n+1}, \quad v = v_n, \qquad v_n \sigma = w_n \varepsilon(w_n)$$
$$v_n \leqq v \leqq v_{n+1}, \quad w = w_{n+1}, \quad w_{n+1} = 2w_n$$

$n = n_0$, $n_0 + 1, \ldots$, qui se raccorde avec $v = \alpha$ si $v_{n_0} = \alpha$. Dans ces conditions l'intégrale a encore un sens pour $\eta = 0$ et le second membre de (11) atteint alors son maximum. La borne ainsi obtenue pour $|L(z, \varrho, \theta)|$ sera de la forme

$$Kr^h + \sum e^{\sigma v_{n+1}} \left[(w_{n+1} - w_n) \left(\frac{r^\varrho}{w_n \sqrt{e}} \right)^{\sigma v_n} + (v_{n+1} - v_n) \left(\frac{r^\varrho}{w_{n+1} \sqrt{e}} \right)^{\sigma v_n'} \right],$$

v_n' étant égal à v_n ou à v_{n+1}. On suppose ici que $w\varepsilon(w)$ est croissant et croît indéfiniment. Comme on a

$$\sigma v_{n+1} < w_{n+1} \varepsilon(w_n) = 2w_n \varepsilon(w_n) = 2\sigma v_n,$$

$$v_{n+1} - v_n < \tfrac{1}{2} v_{n+1} < \frac{w_n}{\sigma} \varepsilon(w_n),$$

la somme précédente est inférieure à

$$3 \sum w_n \left(\frac{r^\varrho e \sqrt{e}}{w_n} \right)^{\sigma v_n}. \tag{12}$$

Dans (12), la somme des termes pour lesquels $w_n > e\sqrt{e}\, r^\varrho$ est inférieure à Kr^ϱ, K restant fini lorsque $r \to \infty$. Le logarithme de la somme des termes pour lesquels $w_n < r^{\varrho/2}$ est moindre que $Kr^{\varrho/2} \log r$, le logarithme de la somme des termes tels que

$$r^{\varrho/2} \leqq w_n \leqq r^\varrho / (\log r)^3$$

est au plus

$$K' \frac{r^\varrho}{(\log r)^3} \log r\, \varepsilon \left(\frac{r^\varrho}{(\log r)^3} \right) < K'' \frac{r^\varrho}{(\log r)^2},$$

enfin le logarithme de la somme des termes restants est au plus égal à

$$e r^\varrho \varepsilon \left(\frac{r^\varrho}{(\log r)^3} \right) + K''' \log r.$$

On arrive ainsi à la proposition suivante:

V. *Si $\theta(z)$ vérifie l'inégalité* (9) *dans les conditions indiquées plus haut, $\varepsilon(y) y$ étant indéfiniment croissante, $\varepsilon(y)$ décroissante, on a dans l'angle* (4)

$$\log |L(z, \varrho, \theta)| < A \left[\frac{r^\varrho}{(\log r)^2} + r^\varrho \varepsilon \left(\frac{r^\varrho}{(\log r)^3} \right) \right], \quad r > r_0, \quad A < \infty.$$

Si donc (10) *est vérifiée, l'intégrale* (2) *converge dans l'angle* (4) *et II s'applique.*

5. On peut remplacer les conditions imposées à $\theta(z)$ par d'autres moins restrictives sans changer la conclusion relative aux directions de Borel. Procédons comme au no. 3, mais prenons

$$\log z = \log r + i\left[\tfrac{1}{2}\pi\sigma + 2\varepsilon(r^\tau)\right], \qquad 0 < \tau \leqq \varrho ,$$

$\varepsilon(y)$ étant décroissante et tendant vers 0 lorsque $y \to \infty$. On aura ici à chercher la limite de

$$I = \int_{y_0}^{\infty} e^{[\varepsilon(y) - 2\varepsilon(r^\tau)]y} dy .$$

On décompose ici l'intervalle d'intégration en deux par le point $y = r^\tau$, ce qui donne

$$I < r^\tau e^{\varepsilon(r^\tau) r^\tau} + \int_{r^\tau}^{\infty} e^{-\varepsilon(r^\tau) y} dy$$

$$< r^\tau e^{\varepsilon(r^\tau) r^\tau} + \frac{1}{\varepsilon(r^\tau)}$$

et le second terme du troisième membre est inférieur au premier si l'on suppose que $y\varepsilon(y) \to \infty$. Par suite:

VI. *Si $\theta(z)$ holomorphe pour $\Re z \geqq 0$, $r = |z| \geqq c$ est telle que $\log|\theta(z)|/r$ tende uniformément vers 0 lorsque $r \to \infty$ et si*

$$\log|\theta(\pm iy)| < \varepsilon(y) y , \qquad y > y_0 > 0 ,$$

$\varepsilon(y)$ décroissante tendant vers 0 et $\varepsilon(y)y \to \infty$ lorsque $y \to \infty$, on a

$$\log|L(z, \varrho, \theta)| < 2r^\tau \varepsilon(r^\tau) , \qquad r > r_0 , \qquad 0 < \tau \leqq \varrho$$

lorsque z appartient au domaine D

$$\frac{\pi}{2\varrho} + 2\varepsilon(r^\tau) \leqq \varphi \leqq 2\pi - \frac{\pi}{2\varrho} - 2\varepsilon(r^\tau) .$$

D'autre part la proposition I se généralise comme suit:

VII. *Soit Γ une courbe simple du plan des z, symétrique par rapport à l'axe réel, ne coupant qu'en deux points, sous un angle supérieur à $\alpha > 0$, les cercles $r = |z| > R_0$, et soit Δ le domaine situé à droite de Γ. Supposons qu'il existe une fonction $\zeta = U(z)$ holomorphe dans Δ, et sur Γ sauf sur l'axe réel, donnant la représentation conforme de Δ sur l'angle $|\arg \zeta| \leqq \frac{\pi}{2\varrho}$ et telle que, dans Δ et sur Γ,*

$$\lim_{|z|=\infty} \frac{U(z)}{z} = 1 , \qquad \frac{1}{m} < |U'(z)| < m < \infty.$$

Dans ces conditions, si $z = re^{\pm i\varphi}$ sont les deux points d'intersection du cercle $|z| = r > r_0$ et de Γ et si, $f(z)$ étant une fonction entière d'ordre ϱ du type moyen, l'intégrale

$$(13) \qquad \int_{r_0}^{\infty} (\overset{+}{\log} |f(re^{i\varphi})| + \overset{+}{\log} |f(re^{-i\varphi})|)\, r^{-\varrho-1}dr$$

converge, il en est de même de la série

$$(14) \qquad \sum \frac{\cos(\omega_n \varrho + \varepsilon_n)}{r_n^{\varrho}}$$

étendue aux zéros $a_n = r_n e^{i\omega_n}$ de $f(z)$ intérieurs à Δ, ε_n tendant vers 0 lorsque $r_n \to \infty$ et $|\omega_n \varrho + \varepsilon_n|$ étant inférieur à $\frac{\pi}{2}$.

Il suffit en effet d'appliquer le raisonnement du no. 1 à la fonction

$$i \log f(z) \cdot d\frac{1}{[U(z)]^{\varrho}}$$

pour obtenir

$$(15) \qquad \sum \Re \frac{1}{U(a_n)^{\varrho}} \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma'} \overset{+}{\log} |f(z)|\, d\frac{-i}{U(z)^{\varrho}} + h, \quad h < +\infty,$$

Γ' étant la portion de Γ correspondant à $|z| > R_0$, portion sur laquelle $i / U(z)^{\varrho}$ est réel, positif au dessus et négatif au dessous de l'axe réel. En égard aux propriétés de $U(z)$, $U'(z)$ et de Γ, on a

$$d\frac{-i}{U(z)^{\varrho}} \backsim |U'(z)dz| \frac{1}{r^{\varrho+1}} < \frac{m}{r^{\varrho+1}} \frac{dr}{\sin\alpha},$$

la convergence de (13) entraîne donc celle du second membre de (15). D'autre part, le module de $U(a_n)$ est asymptotiquement égal à r_n et son argument, pris entre $-\frac{\pi}{2\varrho}$ et $\frac{\pi}{2\varrho}$, est asymptotiquement égal à celui de a_n ; la série du premier membre de (15) est donc bien de la forme (14).

6. La condition (13) est vérifiée pour $L(z, \varrho, \theta)$ si la courbe Γ de l'énoncé VII est contenue dans le domaine D de VI correspondant à $\tau = \varrho$ et si la condition (10) est vérifiée. D'autre part, il découle des beaux résultats de M. Warschawski [5]) que la condition (10) suffit pour que l'on puisse trouver Γ intérieure à D à partir d'une valeur de r, les conditions de l'énoncé VII étant

[5]) Math. Zeitschr. 35 (1932), 361—456.

vérifiées sauf que $V(z)$ serait seulement continue sur Γ, ce qui pourrait suffire pour établir VII.

Mais on peut opérer directement en suivant la méthode que j'ai employée dans une note précédente [6]). En faisant une représentation conforme convenable on peut supposer $\varrho = 1$ et l'on doit démontrer ceci:

VIII. *$\varepsilon(y)$ étant positive et décroissante pour $y > Y_0$, l'intégrale (10) étant convergente, considérons les deux arcs de courbe*

$$x = -\varepsilon(|y|)\,|y|\,, \qquad |y| > Y_0\,. \tag{16}$$

Il existe une courbe Γ et un domaine Δ vérifiant les conditions de l'énoncé VII, avec $\varrho = 1$, Δ contenant les portions des arcs de courbe (16) *pour lesquelles $|y|$ est assez grand.*

D'après le n°. 2 de ma note citée, on peut trouver une fonction $g(t)$ impaire, positive pour $t > 0$, nulle pour $t = 0$, décroissante si $t > \gamma$, dérivable à droite et à gauche, $g'(t)$ vérifiant la condition

$$|g'(t)\,t| < |g(t)|\,,$$

qui soit supérieure à $3\varepsilon\left(\frac{t}{3}\right)$ si $t > T_0 > Y_0$ et telle que

$$\int_1^{\infty} \frac{g(t)}{t}\,dt \tag{17}$$

soit encore convergente. On prendra pour $U(z)$ la fonction inverse de

$$z = V(\zeta) = \zeta + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(A+\zeta)\,g(t)}{A+\zeta-it}\,dt\,, \tag{18}$$

A étant positif et assez grand. On peut recommencer le calcul du n°. 1 de ma note citée mais en simplifiant la limitation de la dernière intégrale qui est donnée par

$$\left|\int_{-\frac{1}{2}|\zeta|}^{\frac{1}{2}|\zeta|} \frac{u\,g(u+\zeta)}{A^2+u^2}\,du\right| < g\left(\tfrac{1}{2}|\zeta|\right)\int_0^{\frac{1}{2}|\zeta|} \frac{2u\,du}{A^2+u^2} = g\left(\tfrac{1}{2}|\zeta|\right)\log\frac{A^2+\frac{\zeta^2}{4}}{A^2}\,.$$

Le dernier membre tend vers 0 avec $\frac{1}{\zeta}$ puisque la convergence de (17) entraîne

$$\lim_{t=\infty} g(t)\log t = 0\,.$$

On vérifie ainsi, sans faire appel à l'existence de $g'(t)$, que la

---

[6]) Bulletin sc. math. 56 (1932), 208—211.

courbe Γ décrite par le point $z = x + iy$ défini par (18) lorsque ζ décrit l'axe imaginaire, laisse à sa droite les courbes (16) à partir d'une valeur de $|y|$. Les équations de Γ sont

$$
(19) \qquad \begin{cases} x = -\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{At\, g(t)}{A^2 + (\xi - t)^2}\, dt \\[2ex] y = \xi + \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} [\xi(\xi - t) + A^2]\, \frac{g(t)\, dt}{A^2 + (\xi - t)^2}\,. \end{cases}
$$

Lorsque $\xi \to \infty$, $y \,/\, \xi$ tend vers 1.

On a

$$
x' = \int_{-\infty}^{+\infty} At\, g(t)\, \frac{d}{d\xi}\left[\frac{-1}{A^2 + (\xi - t)^2}\right] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} At\, g(t) d\, \frac{1}{A^2 + (\xi - t)^2}
$$

et, en intégrant par parties,

$$
x' = A \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\, g'(t) + g(t)}{A^2 + (t - \xi)^2}\, dt.
$$

Donc, en égard aux propriétés de $g(t)$, en désignant par μ le maximum de $g(t)$ pour $t > 0$,

$$
|x'| < 4 \int_0^{\infty} \frac{A\, g(t)}{A^2 + (t - |\xi|)^2} dt < 4 \int_\lambda^{\infty} \frac{A g(t)\, dt}{A^2 + (|\xi| - t)^2} +
$$

$$
+ 4 \frac{\lambda\mu}{A} < 4 g(\lambda)\, \pi + 4 \frac{\lambda\mu}{A}\,, \quad \lambda > \gamma.
$$

On peut choisir λ, puis A pour que le dernier membre soit inférieur à un nombre donné, par exemple $\frac{1}{2}$. Remarquons en outre que si $|\xi| \to \infty$, $|x'| \to 0$.

De même

$$
y' = 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, \frac{d}{d\xi}\left(\frac{(\xi - t)\xi + A^2}{A^2 + (\xi - t)^2}\right) dt =
$$

$$
= 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, \frac{d}{d\xi}\left(\frac{t(\xi - t)}{A^2 + (\xi - t)^2}\right) dt = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} t\, g(t)\, d\, \frac{\xi - t}{A^2 + (\xi - t)^2}
$$

donne

$$
y' - 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} [t\, g'(t) + g(t)]\, \frac{\xi - t}{A^2 + (\xi - t)^2}\, dt
$$

et

$$|y' - 1| < 4 \int_0^\infty g(t) \frac{|\xi - t|}{A^2 + (\xi - t)^2} dt = 4I.$$

I tend uniformément vers 0 lorsque $\xi \to \infty$ donc est moindre que $\frac{1}{2}$ si $|\xi| > \delta$. Si $|\xi| \leqq \delta$, on a

$$\frac{|\xi - t|\, t}{A^2 + (\xi - t)^2} < 1 + \frac{\delta}{2A}$$

donc, si $A > 1$,

$$I < \frac{1}{A^2} \int_0^v g(t)\,(t + \delta) dt + (1 + \delta) \int_v^\infty \frac{g(t)}{t} dt .$$

On peut prendre v, puis A, pour que l'on ait encore $I < \frac{1}{2}$. Finalement, si A est assez grand, on a

$$|x'| < \tfrac{1}{2}, \quad |y' - 1| < \tfrac{1}{2} .$$

La courbe Γ est donc simple, la fonction $V(\zeta)$ représente conformément le demi-plan $\Re\zeta \geqq 0$ sur la portion Δ du plan des z située à droite de Γ, Γ ne coupe qu'en deux points les cercles $|z| = \text{const} = R$ dès que R est assez grand.

Lorsque ζ décrit la droite $\Re\zeta = 0$, $V(\zeta) / \zeta$ tend vers 1. D'ailleurs, si B est assez grand, $V(\zeta) + B$ ne prend pas les valeurs réelles négatives lorsque $\Re\zeta \geqq 0$, la branche de $\sqrt{V(\zeta) + B}$ qui est positive pour ζ réel positif ne prend pas les valeurs de partie réelle négative, $\sqrt{V(\zeta) + B} \,/\, \sqrt{\zeta}$ ne prend pas les valeurs réelles négatives et est borné pour $\Re\zeta = 0$, donc aussi pour $\Re\zeta \geqq 0$, $V(\zeta) / \zeta$ est donc borné pour $\Re\zeta \geqq 0$ et $|\zeta| > 1$ et tend vers 1 lorsque $\zeta \to \infty$ avec $\Re\zeta = 0$, donc tend uniformément vers 1 lorsque $\zeta \to \infty$ dans le demi-plan $\Re\zeta \geqq 0$. Par suite, lorsque z s'éloigne indéfiniment dans Δ, $U(z) / z$ tend uniformément vers 1.

En ce qui concerne $V'(\zeta)$, on a vu que si $\Re\zeta = 0$, $|V'(\zeta)|$ est compris entre deux nombres positifs; il en est de même pour $0 < \Re\zeta < h$, h fixe, puisque $V'(i\xi + k)$, k réel positif, ξ réel, se déduit de $V'(i\xi)$ en changeant A en $A + k$. Comme $V(\zeta) / \zeta$ est borné pour $\Re\zeta \geqq k > 0$, $V'(\zeta) / \zeta$ l'est aussi, donc aussi $|V'(\zeta)|$ puisqu'il en est ainsi pour $\Re\zeta = k$. Mais on a remarqué que y' et x' tendent respectivement vers 1 et 0 lorsque $\zeta = i\xi$ tend vers l'infini, $V'(\zeta)$ tend donc vers 1 dans ces conditions et l'on en déduit qu'il en est de même si $|\zeta| \to \infty$,

$\Re\zeta \geqq 0$. Par suite, non seulement $|U'(z)|$ reste compris entre deux nombres positifs fixes, mais $U'(z)$ tend uniformément vers 1 lorsqu'on s'éloigne indéfiniment dans $\varDelta$ ou sur Γ.

La proposition VIII est ainsi établie et, comme il a été dit plus haut, le théorème IX de l'introduction en découle. Ce théorème IX permet d'atteindre les fonctions telles que par exemple

$$\log \theta(z) = \frac{z}{(\log_n z)^{\mu}}, \quad \mu > 0, \quad n \text{ entier } > 0,$$

auxquelles V ne s'applique pas.

(Reçu le 14 septembre 1933.)