

COMPOSITIO MATHEMATICA

JULIUS WOLFF

Sur la représentation conforme des bandes

Compositio Mathematica, tome 1 (1935), p. 217-222

http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__1__217_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur la représentation conforme des bandes

par

Julius Wolff

Utrecht

1. Soit B la bande $|y| < 1$ du plan de la variable complexe $z = x + iy$ et soit $w(z) = u(z) + iv(z)$ une fonction qui donne la représentation conforme de B sur un domaine D contenu dans B et ayant les propriétés suivantes:

1° D est limité par deux courbes de Jordan Γ_1 et Γ_2 qui s'étendent du point à l'infini $x = -\infty$ au point à l'infini $x = +\infty$ de B et qui ont pour $x \rightarrow +\infty$ respectivement la droite $y = 1$ et la droite $y = -1$ pour asymptotes.

2° il existe deux nombres m et q tels que, si P et Q sont deux points de Γ_1 ou de Γ_2 ayant même abscisse u plus grande que q , l'oscillation de l'abscisse sur l'arc fini PQ est plus petite que m^{-1} .

3° $u \rightarrow +\infty$ pour $x \rightarrow +\infty$.

THÉORÈME. *En indiquant par $\sigma(a)$ l'oscillation de $w - z$ sur le segment S_a ($x = a$, $|y| \leq 1$) de B , on a*

$$\limsup_{a \rightarrow +\infty} \sigma(a) \leq 2m.$$

2. Démontrons d'abord un lemme. Considérons la classe des fonctions $\omega(\zeta)$ holomorphes, univalentes et plus petites que 1 en valeur absolue dans le cercle unité $\Sigma(|\zeta| < 1)$. Chaque fonction $\omega(\zeta)$ représente Σ sur un domaine Δ contenu dans Σ et dépendant de la fonction. Soit α un point de la circonférence $|\zeta| = 1$. Appelons k_ρ l'arc de la circonférence $|\zeta - \alpha| = \rho$ qui est intérieur à Σ , $0 < \rho < 2$.

LEMME. *A tout nombre $\eta > 0$ il correspond un nombre δ tel que la borne inférieure μ des longueurs $\lambda(\rho)$ des images de k_ρ pour*

¹⁾ Cette hypothèse sur la frontière („Lineare Unbewaltheit“) a été utilisée par M. S. Warschawski dans la démonstration de quelques théorèmes importants, dont l'un est contenu comme conséquence dans notre théorème (Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung [Math. Zeitschr. 35 (1932), 322—456]).

$\delta^2 < \varrho < \delta$ est plus petite que η , quelle que soit la fonction $\omega(\zeta)$ de la classe. Ce nombre δ dépend de η , et non pas de la fonction $\omega(\zeta)$.

En effet, soient ϱ et φ les coordonnées polaires de ζ par rapport à α , donc $\zeta = \alpha + \varrho e^{\varphi i}$.

On a, Δ faisant partie de Σ

$$\iint_{\Sigma} \left| \frac{d\omega}{d\zeta} \right|^2 \varrho d\varrho d\varphi \leq \pi \quad (1)$$

D'autre part

$$\lambda(\varrho) = \int_{k_{\varrho}} \left| \frac{d\omega}{d\zeta} \right| \varrho d\varphi \leq \left\{ \pi \varrho \int_{k_{\varrho}} \left| \frac{d\omega}{d\zeta} \right|^2 \varrho d\varphi \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

De (1) et (2) il suit que pour $0 < \delta < 1$

$$\int_{\delta^2}^{\delta} \{ \lambda(\varrho) \}^2 \frac{d\varrho}{\varrho} < \pi^2 \quad (3)$$

donc

$$\mu^2 < \pi^2 \left(\log \frac{1}{\delta} \right)^{-1}.$$

On a par conséquent $\mu < \eta$ pour $\delta = e^{-\frac{\pi^2}{\eta^2}}$, ce qui démontre le lemme.

3. Nous aurons à faire usage de la représentation suivante

$$z = \frac{2}{\pi} \log \frac{1+\zeta}{1-\zeta}, \quad w = \frac{2}{\pi} \log \frac{1+\omega}{1-\omega} \quad (4)$$

les logarithmes ayant leurs valeurs principales. A la bande B correspond le cercle unité Σ du plan des ζ . Les images des points $z = 0, i$ et $-i$ sont les points $\zeta = 0, i$ et $-i$, les segments $-i, i$ se correspondent dans les deux plans et aux points $x = \pm \infty$ correspondent les points $\zeta = \pm 1$. La fonction $w(z)$ du No. 1 est transformée en une fonction $\omega(\zeta)$ appartenant à la classe considérée au No. 2.

Soit p un nombre réel tel que pour $x > p$ on ait $u > q$, le nombre q étant déterminé par l'hypothèse 2° du No. 1 et l'existence de p étant assurée par l'hypothèse 3°.

Pour $a > p$ posons

$$w(a+i) = b(a) + ic(a) \quad (5)$$

alors
$$b(a) > q \quad (6)$$

Considérons la fonction

$$w_a(z) = w(a+z) - b(a) \quad (7)$$

$w_a(z)$ représente B sur le domaine D_a , contenu dans B , qu'on obtient en appliquant à D la translation $w_a = w - b(a)$. La transformation (4), dans laquelle on remplace w et ω par w_a et ω_a , fait correspondre à la fonction (7) une fonction $\omega_a(\zeta)$, qui représente Σ sur un domaine Δ_a qui fait partie de Σ et qu'on obtient en appliquant (4) à D_a .

Traçons les deux circonférences C et C'

$$\left| \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right| = e^{\pi m} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right| = e^{-\pi m} \quad (8)$$

où m est le nombre figurant dans l'hypothèse 2°. Appelons K et K' leurs arcs intérieurs à Σ . Indiquons par Σ_1 la partie de Σ extérieure à ces deux circonférences.

4. Soit η un nombre positif. Appliquons le lemme du No. 2 en posant $\alpha = i$. A chaque valeur de a il correspond un nombre $\varrho(a)$ entre δ^2 et δ tel que la longueur de l'arc $\kappa_{\varrho(a)}$ en lequel $k_{\varrho(a)}$ est transformé par l'opération $\omega = \omega_a(\zeta)$ est plus petite que η . Le nombre δ dépend de η , mais ne varie pas avec a .

Je dis que l'arc $\kappa_{\varrho(a)}$ est entièrement dans Σ_1 dès que η est assez petit.

En effet, traçons les deux circonférences \bar{C} et \bar{C}'

$$\left| \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right| = e^{\frac{\pi m}{2}} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right| = e^{-\frac{\pi m}{2}} \quad (9)$$

et appelons \bar{K} et \bar{K}' leurs arcs intérieurs à Σ . Supposons dorénavant que η soit plus petit que la distance h_m de K à \bar{K} , qui égale celle de K' à \bar{K}' .

Si l'arc $\kappa_{\varrho(a)}$ n'était pas entièrement dans Σ_1 , il serait entièrement dans \bar{C} ou entièrement dans \bar{C}' , puisque sa longueur est plus petite que $\eta < h_m$.

Supposons d'abord $\kappa_{\varrho(a)}$ dans \bar{C} . Les extrémités L et M de $\kappa_{\varrho(a)}$ sont sur la courbe frontière f_1 de Δ_a , qui correspond à Γ_1 . Les formules (5) et (7) donnent

$$w_a(i) = w(a + i) - b(a) = ic(a),$$

donc

$$\omega_a(i) = i\gamma(a),$$

où $\gamma(a)$ est entre -1 et $+1$. La courbe frontière f_1 de Δ_a contient par conséquent un arc d'extrémités L et M et contenant le point $i\gamma(a)$. Cet arc contient un arc dont les extrémités sont sur \bar{K} et qui contient le point $i\gamma(a)$. En vertu de (4) on a pour ζ sur \bar{K}

$$x = \frac{2}{\pi} \log \left| \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \right| = m$$

et pour $\zeta = i\gamma(a)$ on a $x = 0$. Donc la frontière de D_a possède un arc dont les extrémités ont leurs abscisses égales à m et qui contient un point d'abscisse égale à zéro. Pour la frontière de D cela signifie l'existence d'un arc dont les extrémités ont leurs abscisses égales à $m + b(a) > q$ et qui contient un point d'abscisse $b(a)$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse 2° .

Supposons en second lieu $\varkappa_{\varrho(a)}$ dans \bar{C}' . En raisonnant comme ci-dessus on conclut que la frontière de D possède un arc dont les extrémités P et Q ont leurs abscisses égales à $-m + b(a)$ et qui contient un point R d'abscisse $b(a)$. Or, l'un des arcs RP et RQ se prolonge à l'infini $x \rightarrow +\infty$ ce qui met en évidence l'existence d'un arc dont les extrémités ont leurs abscisses égales à $b(a) > q$ et qui contient un point d'abscisse $-m + b(a)$, ce qui est encore en contradiction avec l'hypothèse 2° .

Donc $\varkappa_{\varrho(a)}$ est entièrement dans Σ_1 pour $\eta < h_m$.

5. Soit $G(m)$ un nombre tel que pour tout point de Σ_1

$$\left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = \left| \frac{4}{\pi |1 - \zeta^2|} \right| < G(m) \quad (10)$$

Les arcs circulaires k_δ et k_{δ^2} ont pour images dans B , en vertu de (4), deux arcs c_δ et c_{δ^2} qui aboutissent sur la droite $y = 1$ de part et d'autre du point i . L'arc $\varkappa_{\varrho(a)}$ étant dans Σ_1 l'inégalité (10) permet de conclure qu'à chaque valeur de a surpassant p on peut faire correspondre une courbe $c_{\varrho(a)}$ située entre c_δ et c_{δ^2} , aboutissant de part et d'autre du point i et qui est transformée par (7) en une courbe $\gamma_{\varrho(a)}$ de longueur $< \eta G(m)$. Les extrémités E et F de $\gamma_{\varrho(a)}$ sont sur la frontière de D_a , de part et d'autre du point $i\varrho(a)$. La courbe $c_{\varrho(a)}$ coupe l'axe imaginaire en un seul point $i\theta(a)$, correspondant au point d'intersection de l'arc de cercle $k_{\varrho(a)}$ avec l'axe imaginaire du plan des ζ .

Or, de l'hypothèse 2° il résulte que, pour a suffisamment grand, sur l'arc fini EF de la frontière de D_a l'abscisse est entre

$$u(a + i\theta(a)) - \eta G(m) - m - b(a)$$

et
$$u(a + i\theta(a)) + \eta G(m) + m - b(a).$$

Donc dans le domaine fini découpé dans B par la courbe $c_{\varrho(a)}$ la fonction $u(a + z) - b(a)$ est entre les mêmes limites, c'est-à-dire que $u(a + z)$ est entre

$$u(a + i\theta(a)) - \eta G(m) - m$$

et
$$u(a + i\theta(a)) + \eta G(m) + m.$$

Soit $i\theta$ le point d'intersection de c_{θ^2} avec l'axe imaginaire. θ ne dépend pas de a et on a toujours $\theta(a) \leq \theta$. Par conséquent sur le segment ($x = a, \theta \leq y \leq 1$) la fonction $u(z)$ est entre ces mêmes limites. Si donc $M(a)$ indique le maximum de $|u(z) - u(a + i\theta(a))|$ sur le segment ($x = a, \theta \leq y \leq 1$) on a

$$\limsup_{a \rightarrow +\infty} M(a) \leq \eta G(m) + m \quad (11)$$

Remarquons maintenant que la fonction harmonique et bornée $y - v(z)$ tend vers zéro pour $x \rightarrow +\infty$ sur chacune des droites $y = \pm 1$, en vertu des hypothèses 1° et 3°. Donc $y - v(z)$ tend vers zéro quelle que soit la manière dont x tend vers $+\infty$ dans B . Ceci permet d'écrire, $N(a)$ étant le maximum de

$$|w(z) - z - w(a + i\theta(a)) + (a + i\theta(a))|$$

sur le segment ($x = a, \theta \leq y \leq 1$)

$$\limsup_{a \rightarrow \infty} N(a) \leq \eta G(m) + m \quad (12)$$

6. Une conséquence de $y - v(z) \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow +\infty$ est que $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $1 - \frac{\partial v}{\partial y}$, donc aussi $1 - \frac{dw}{dz}$ tendent vers zéro, quelle que soit la manière dont x tend vers $+\infty$ dans la bande $|y| \leq \theta$. Il en résulte que l'oscillation de $w(z) - z$ sur le segment ($x = a, 0 \leq y \leq \theta$) tend vers zéro quand $a \rightarrow +\infty$.

La combinaison de ce résultat avec celui du No. 5 conduit à la conclusion suivante:

Si $H(a)$ est le maximum de $|w(z) - z - w(a) + a|$ sur le segment ($x = a, 0 \leq y \leq 1$), alors

$$\limsup_{a \rightarrow +\infty} H(a) \leq m + \eta G(m).$$

Le nombre η pouvant être choisi aussi petit qu'on veut, nous trouvons

$$\limsup_{a \rightarrow \infty} H(a) \leq m \quad (12)$$

Même énoncé pour le segment ($x = a, -1 \leq y \leq 0$), ce qui démontre le théorème.

7. Moyennant la transformation (4) l'inégalité (12) contient un théorème que M. S. Warschawski démontre dans son article cité (p. 361).

8. Si dans l'hypothèse 2° le nombre m peut être choisi aussi petit qu'on veut (q dépendant de m), alors

$$\sigma(a) \rightarrow 0 \text{ pour } a \rightarrow \infty.$$

Alors les images des transversales verticales très éloignées vers la droite dans la bande horizontale B sont à peu près des transversales verticales.

9. Au No. 6 nous n'avons pas seulement trouvé le théorème à démontrer, mais encore ceci:

a. $v(z) - y$ tend vers zéro, quelle que soit la manière dont z tend vers l'infini $x = +\infty$, même si l'on supprime l'hypothèse 2°.

b. Si dans l'hypothèse 2° m peut être remplacé par m_1 et m_2 sur Γ_1 et Γ_2 respectivement, alors, quel que soit le nombre θ entre -1 et $+1$, on a les inégalités suivantes pour les oscillations $\sigma_1(a)$ et $\sigma_2(a)$ de $w(z) - z$ sur les segments $x = a$, $\theta \leq y \leq 1$, et $x = a$, $-1 \leq y \leq \theta$

$$\limsup_{a \rightarrow \infty} \sigma_1(a) \leq m_1$$

$$\limsup_{a \rightarrow \infty} \sigma_2(a) \leq m_2.$$

10. Le théorème et les remarques des numéros 8 et 9 subsistent si l'on supprime l'hypothèse que D fait partie de B , sans modifier les hypothèses 1°, 2° et 3°. Car, D se trouvant alors dans une certaine bande $|v| < d$, il suffit de remplacer w par $\frac{w}{d}$ dans (4); les autres modifications à apporter au raisonnement sont immédiates.

(Reçu le 14 novembre 1933.)