HENRI CARTAN

Sur l'itération des transformations conformes ou pseudo-conformes

Compositio Mathematica, tome 1 (1935), p. 223-227
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__1__223_0>

Sur l'itération des transformations conformes ou pseudo-conformes

par

Henri Cartan

Strasbourg

Dans un Mémoire [1]) consacré à l'étude des groupes de transformations *pseudo-conformes* (c'est-à-dire définies par n fonctions *analytiques* de n variables *complexes*), j'ai eu l'occasion d'établir qu'un groupe de transformations pseudo-conformes ne peut pas contenir de sous-groupes arbitrairement petits, et, à ce sujet, j'ai annoncé sans démonstration le théorème suivant [2]):

Théorème 1. *Soit, dans l'espace de n variables complexes, un polycylindre Σ de centre O et de rayon R, et soit ϱ un nombre positif quelconque inférieur à R. Si une transformation T est pseudo-conforme dans Σ, ainsi que toutes ses puissances $T^2, \ldots, T^k, \ldots$, et si l'écart de T et de chacune de ses puissances est, dans Σ, au plus égal à ϱ, alors T est nécessairement la transformation identique.*

Cet énoncé demande quelques explications et précisions. Par *distance* de deux points, de coordonnées complexes $z_1, \ldots, z_n$ et $z_1', \ldots, z_n'$, nous entendons la plus grande des n quantités

$$| z_i' - z_i | \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Par *polycylindre de centre P et de rayon r*, nous entendons l'ensemble des points de l'espace dont la *distance* au point P est inférieure à r. En particulier, pour $n = 1$ (transformations *conformes*), les polycylindres ne sont autres que les *cercles* du plan.

Par *écart* d'une transformation T dans un polycylindre Σ, nous entendons la borne supérieure de la *distance* d'un point M à son transformé $T(M)$ lorsque M décrit Σ.

Pour achever de donner un sens précis à l'énoncé du théorème 1, il nous reste à expliquer ce que signifie la phrase: „T et toutes

---

1) Sur les groupes de transformations analytiques [doit paraître dans la Collection d'Exposés mathématiques publiés à la mémoire de J. Herbrand; Paris, Hermann].

2) Paragraphe 8 du mémoire cité.

ses puissances sont pseudo-conformes et d'écart au plus égal à ϱ dans Σ". Par définition, cela signifie: 1° que T est pseudo-conforme et d'écart au plus égal à ϱ dans Σ; 2° qu'il existe une transformation pseudo-conforme dans Σ, d'écart au plus égal à ϱ dans Σ, transformation que nous désignerons par T^2 et qui satisfait à la condition suivante: pour tout point M de Σ dont le transformé $T(M)$ est intérieur à Σ, le point $T^2(M)$ doit coïncider avec le transformé, par T, du point $T(M)$; 3° d'une façon générale, supposons définies de proche en proche les transformations $T^2, T^3, \ldots, T^{k-1}$; alors il doit exister une transformation T^k, pseudo-conforme et d'écart au plus égal à ϱ dans Σ, telle que les points $T^k(M)$ et $T(T^{k-1}(M))$ coïncident chaque fois que $T^{k-1}(M)$ est intérieur à Σ; — et cela, pour toutes les *valeurs positives de l'entier k.*

Si l'on désigne par Σ' le polycylindre de centre O et de rayon $R-\varrho$, il est clair que le point $T^k(M)$ est intérieur à Σ quel que soit M intérieur à Σ' et quel que soit l'entier k. En outre, on vérifie facilement la relation

$$T^k(T^j(M)) = T^{k+j}(M)$$

pour tout M intérieur à Σ'.

Cela posé, il suffit, pour établir le théorème 1, de démontrer le théorème plus général suivant:

Théorème 2. Soient toujours Σ un polycylindre de centre O et de rayon R, et ϱ un nombre positif quelconque inférieur à R. Soit Σ' le polycylindre de centre O et de rayon $R-\varrho$. *Soit T une transformation pseudo-conforme et d'écart au plus égal à ϱ dans Σ; supposons que la transformation*

$$T(T(M)),$$

qui est pseudo-conforme dans Σ', se laisse prolonger analytiquement dans Σ, et désignons par T^2 cette nouvelle transformation; supposons que l'écart de T^2 dans Σ soit au plus égal à ϱ, et que la transformation

$$T^2(T^2(M)),$$

qui est pseudo-conforme dans Σ', se laisse prolonger analytiquement dans Σ, et désignons par T^4 cette nouvelle transformation; d'une façon générale, supposons définies de proche en proche les transformations $T^2, T^4, \ldots, T^{2^{k-1}}$, d'écarts au plus égaux à ϱ dans Σ, et supposons que la transformation

$$T^{2^{k-1}}(T^{2^{k-1}}(M)),$$

qui est pseudo-conforme dans Σ', se laisse prolonger analytiquement dans Σ; désignons par T^{2^k} cette nouvelle transformation, et supposons son écart au plus égal à ϱ dans Σ. Dans ces conditions, si l'on peut continuer si grand que soit l'entier k, T est nécessairement la transformation identique.

Pour établir ce théorème, il suffit de démontrer que la transformation T laisse fixe le centre O du polycylindre Σ. En effet, si nous admettons ce résultat, nous pouvons démontrer le théorème 2 de la façon suivante: soit P un point de Σ dont la distance à O soit inférieure à $\frac{R-\varrho}{2}$; P est centre d'un polycylindre Σ_P de rayon $\frac{R+\varrho}{2}$, intérieur à Σ; en appliquant à ce polycylindre et à la transformation T le résultat qui vient d'être admis, on trouve que T laisse fixe le centre P du polycylindre Σ. On a donc

$$T(P) = P,$$

et cela quel que soit le point P dont la distance à O est inférieure à $\frac{R-\varrho}{2}$, d'où il suit (T étant analytique) que T est la transformation identique.

Il nous reste donc seulement à démontrer que si T satisfait aux conditions du théorème 2, T laisse fixe le centre O du polycylindre Σ. Or cela résulte du théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Soit toujours Σ un polycylindre de centre O et de rayon R. Soit S une transformation pseudo-conforme dans Σ, et d'écart au plus égal à ϱ ($\varrho < R$) dans Σ. On a l'inégalité*

$$(1) \qquad |S(S(O))-O| \geqq \left(2-\frac{\varrho}{R}\right)\cdot|S(O)-O|.\ ^{3)}$$

Il suffira d'appliquer cette inégalité successivement aux transformations $T, T^2, \ldots, T^{2^k}, \ldots$ pour obtenir

$$|T^{2^k}(O)-O| \geqq \left(2-\frac{\varrho}{R}\right)^k\cdot|T(O)-O|;$$

le premier membre devant rester borné, et la quantité $\left(2-\frac{\varrho}{R}\right)^k$ augmentant indéfiniment avec k, il faut que

$$T(O) = O,$$

ce qui démontre le théorème 2.

En définitive, il nous reste seulement à démontrer le théorème 3.

---

[3]) La notation $|M_1 - M_2|$ désigne la *distance* des points M_1 et M_2.

Nous pouvons d'ailleurs supposer, pour simplifier, $R = 1$. Posons

$$S(M) - M = \varrho \cdot U(M)\ ^{4)};$$

on aura, lorsque M est intérieur à Σ,

$$|U(M)| \leqq 1.$$

L'inégalité (1) à établir s'écrit alors

$$|U(S(O)) + U(O)| \geqq (2 - \varrho) \cdot |U(O)|. \tag{2}$$

Or, soit $f_i(M)$ celle des n fonctions composantes de $U(M)$ dont le module, au point O, est égal à $|U(O)|$. On peut supposer $f_i(O)$ réel et positif (ou nul), car on peut toujours se ramener à ce cas en multipliant la i-ème coordonnée de l'espace par un nombre convenable ayant pour module l'unité.

Cela étant, soit

$$f_i(O) = u \qquad\qquad (0 \leqq u \leqq 1).$$

Si $u = 1$, alors $f_i(M) \equiv 1$, d'où il suit que la i-ème composante de

$$U(S(O)) + U(O)$$

est égale à 2, c'est-à-dire à $2\,|U(O)|$; on a donc, dans ce cas,

$$|U(S(O)) + U(O)| = 2\,|U(O)|,$$

et l'inégalité (2) est vraie *a fortiori.*

Supposons donc $0 \leqq u < 1$. Alors, d'après le lemme de Schwarz, on a

$$\left|\frac{f_i(M) - u}{1 - u f_i(M)}\right| \leqq |M - O|,$$

ce qui donne, pour $M = S(O)$,

$$\left|\frac{f_i(S(O)) - u}{1 - u f_i(S(O))}\right| \leqq \varrho u;$$

on en déduit facilement

$$|f_i(S(O)) + f_i(O)| \geqq u + \frac{u(1-\varrho)}{1 - \varrho u^2} \geqq u(2 - \varrho),$$

et, *a fortiori,*

---

[4]) Notation abrégée pour désigner n égalités; $U(M)$ désigne n fonctions holomorphes des coordonnées du point M, respectivement égales aux quotients, par ϱ, des différences des coordonnées (de même nom) de $S(M)$ et de M. Par $|U(M)|$, nous entendons le module de la plus grande des n fonctions désignées par la notation $U(M)$.

$$|U(S(O))+U(O)| \geqq u(2-\varrho),$$

ce qui n'est autre chose que l'inégalité (2).

C. Q. F. D.

Pour terminer, signalons que tout ce qui précède reste valable si l'on remplace les polycylindres par des *hypersphères*, à condition d'appeler *distance* de deux points $(z_1, \ldots, z_n)$ et $(z'_1, \ldots, z'_n)$ la quantité

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z'_i - z_i|^2}.$$

(Reçu le 10 novembre 1933.)