G. F. C. GRISS

Die Differentialinvarianten eines kovarianten symmetrischen Tensors vierter Stufe im binären Gebiet

Compositio Mathematica, tome 1 (1935), p. 238-247
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__1__238_0>

Die Differentialinvarianten eines kovarianten symmetrischen Tensors vierter Stufe im binären Gebiet

von

G. F. C. Griss

Doetinchem (Niederlande)

In der Theorie der totalisotropen Flächen hat Herr Pinl das Problem gestellt, die Differentialinvarianten eines kovarianten symmetrischen Tensors vierter Stufe im binären Gebiet zu bestimmen [1]). Dieses Problem soll hier vollständig erledigt werden, und die Resultate wird Herr Pinl geometrisch verwenden.

§ 1. *Die Kovarianten zweiter Stufe des Tensors* $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Das volle Komitantensystem des Tensors vierter Stufe:

$$(1)\quad f = g_{\alpha\beta\gamma\delta}x_\alpha x_\beta x_\gamma x_\delta = g_0x_1^4 + 4g_1x_1^3x_2 + 6g_2x_1^2x_2^2 + 4g_3x_1x_2^3 + g_4x_2^4$$

ist bekanntlich [2])

$$(2)\qquad i = \theta_1 = (gg')^4 = 2(g_0g_4 - 4g_1g_3 + 3g_2^2)$$

$$(3)\qquad j = \theta_2 = (gg')^2(g'g'')^2(g''g)^2 = 6\begin{vmatrix} g_0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ g_2 & g_3 & g_4 \end{vmatrix},$$

wobei $\Delta = H = (gg')^2 g_x^2 g_x'^2$ die Hessesche Kovariante mit den Komponenten

$2(g_0g_2 - g_1^2)$, $g_0g_3 - g_1g_2$, $\frac{1}{3}(g_0g_4 + 2g_1g_3 - g_2^2)$, $g_1g_4 - g_2g_3$, $2(g_2g_4 - g_3^2)$

und $t = T = (gg')^2(g''g')g_x''^3 g_x^2 g_x'$ die Cayleysche Kovariante bedeutet. Man kann T^2 in

$$(4)\qquad T^2 = -\frac{\theta_2^2}{6}\Big(f + \frac{H}{k_1}\Big)\Big(f + \frac{H}{k_2}\Big)\Big(f + \frac{H}{k_3}\Big)$$

---

[1]) M. Pinl, Quasimetrik auf totalisotropen Flächen (Zweite Mitteilung) [Proceedings Amsterdam **36** (1932), Nr. 5].

[2]) Gordan-Kerschensteiner, Vorlesungen über Invariantentheorie [Leipzig (1887) § 15], vgl. auch [1]).

zerlegen[3]) und die Kombinanten $f+\frac{H}{k_r}$ $(r=1, 2, 3)$ sind vollständige Quadrate; die drei Werte k_r sind Wurzeln von

$$k^3-\tfrac{1}{2}\theta_1 k-\tfrac{1}{3}\theta_2=0. \tag{5}$$

Setzen wir

$$f+\frac{H}{k_1}=\varphi^2,\quad f+\frac{H}{k_2}=\psi^2 \text{ und } f+\frac{H}{k_3}=\chi^2, \tag{6}$$

so sind φ, ψ und χ drei quadratische (konjugierte) Kovarianten vom Gewicht Null, also Tensoren zweiter Stufe. Da sie für das folgende grundlegend sind, werden wir uns jetzt näher mit ihnen beschäftigen.

Wir berechnen ihre Diskriminanten a, b und c, welche relative Invarianten vom Gewicht 2 sind. Die Invariante $i=\theta_1$ der Kombinante $f+\frac{H}{k_1}$ ist[4])

$$i_{\varphi^2}=\theta_1+2\frac{\theta_2}{k_1}+\frac{1}{6}\frac{\theta_1^2}{k_1^2},$$

dabei $i_{\varphi^2}=\frac{8}{3}a^2$, also vermöge (5)

$$\frac{8}{3}a^2=\theta_1+2\frac{\theta_2}{k_1}+\frac{1}{6}\frac{\theta_1^2}{k_1^2}=\frac{(\theta_1-6k_1^2)^2}{6k_1^2}$$

oder

$$a=\frac{3}{2}k_1-\frac{1}{4}\frac{\theta_1}{k_1},\quad b=\frac{3}{2}k_2-\frac{1}{4}\frac{\theta_1}{k_2} \text{ und } c=\frac{3}{2}k_3-\frac{1}{4}\frac{\theta_1}{k_3}. \tag{7}$$

Bildet man die symmetrischen Grundfunktionen $a+b+c$ usw., so findet man, daß a, b und c folgender Gleichung genügen:

$$16\,\theta_2 z^3-6\,\theta_1^2 z^2+3(\theta_1^3-6\,\theta_2^2)=0. \tag{8}$$

Wir unterscheiden jetzt verschiedene Fälle, welche hauptsächlich mit den von Herrn Pinl erwähnten Typen übereinstimmen. Bei Anwendung der Methode von Emmy Noether[5]) wäre dies zwar nicht nötig, aber die Berechnungen würden viel umständlicher sein.

1. Sind die drei Wurzeln der Gleichung (5) verschieden und nicht Null, so ist $\theta_2\neq 0$ und $\theta_3=\theta_1^3-6\theta_2^2\neq 0$, also $abc\neq 0$;

---

[3]) l. c. [2]), § 17.

[4]) l. c. [2]), § 16.

[5]) Emmy Noether, Invarianten beliebiger Differentialausdrücke [Nachrichten Göttingen 1918].

θ_1 und θ_2 sind durch a, b und c, folglich durch a und b ausdrückbar. Darum sind vermöge

$$f = \frac{k_1\varphi^2 - k_2\psi^2}{k_1 - k_2} \tag{9}$$

die Koeffizienten von f durch diejenigen von φ und ψ auszudrücken. *In diesem allgemeinen Fall (Typus VII) hat man also die Differentialinvarianten von zwei kovarianten konjugierten Tensoren zweiter Stufe, deren Diskriminanten nicht verschwinden, zu bestimmen.*

2. Ist eine (und nur eine) der Wurzeln von (5) Null, z.B. $k_3 = 0$, so ist $\theta_2 = 0$ und $\theta_1 \neq 0$; es ist $f = \frac{1}{2}(\varphi^2 + \psi^2)$ und auch $\frac{H}{\sqrt{\theta_1}}$ ist eine quadratische Form mit nichtverschwindender Diskriminante (Typus V).

3. Sind zwei der Wurzeln von (5) gleich, z.B. $k_2 = k_3$, so ist $\theta_3 = 0$ und $b = c = 0$. Es gibt nur eine quadratische Form φ mit nichtverschwindender Diskriminante, während $\psi \equiv \chi$ das Quadrat einer Linearform ist (Typus IV).

4. Ist insbesondere $\psi \equiv \chi \equiv 0$, so ist f ein Quadrat (Typus II).

5. Sind schließlich die drei Wurzeln von (5) gleich und zwar Null, so ist $\theta_1 = 0$ und $\theta_2 = 0$; es gibt keine quadratischen Kovarianten (Typen III und I).

§ 2. *Die Differentialinvarianten im allgemeinen Fall.*

Wir haben die Differentialinvarianten der beiden Tensoren

$$\varphi = a_{ik}\,du^i\,dv^k \quad \text{und} \quad \psi = b_{ik}\,du^i\,dv^k \tag{10}$$

zu bestimmen, für welche, weil die Formen konjugiert [6]) sind,

$$(ab)^2 = a_0 b_2 - 2a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0 \tag{11}$$

gilt. Nennen wir die kontravarianten Komponenten von a_{ik} und b_{ik} in üblicher Weise a^{ik} und b^{ik}, so können wir für (11) auch schreiben:

$$a_{ik} b^{ik} = 0 \qquad \text{oder} \qquad a^{ik} b_{ik} = 0. \tag{11'}$$

Wir setzen jetzt:

$$A_{r,ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ri}}{\partial u_k} + \frac{\partial a_{rk}}{\partial u_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial u_r}\right) \text{ und } B_{r,ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{ri}}{\partial u_k} + \frac{\partial b_{rk}}{\partial u_i} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial u_r}\right), \tag{12}$$

$$A^s_{ik} = a^{rs} A_{r,ik} \quad \text{und} \quad B^s_{ik} = b^{rs} B_{r,ik} \tag{13}$$

---

[6]) l. c. [2]) § 17, § 11 und § 13.

und

$$C^s_{ik} = A^s_{ik} - B^s_{ik}. \tag{14}$$

Es gilt dann der

Reduktionssatz[7]*: Die Differentialinvarianten erster Ordnung sind wegen*

$$a_{ik((\alpha))} = a_{ir} C^r_{k\alpha} + a_{kr} C^r_{i\alpha} \text{ und } -b_{ik(\alpha)} = \dots \tag{15}$$

projektive Invarianten von

$$a_{ik},\ b_{ik} \text{ und } C^r_{ik},$$

wobei

$$w_r = b^{sl} a_{sk} C^k_{lr} = 0, \tag{16}$$

was man aus (11′) durch kovariante Ableitung findet.

Zur weiteren Bestimmung der Invarianten bilden wir:

$$C_i = C^s_{rs} = \frac{\partial}{\partial u_r}\left(l\sqrt{\frac{a}{b}}\right) \text{ und } d^r = a^{ik} C^r_{ik}. \tag{17}$$

Man kann C^r_{ik} durch c_r und d^r ausdrücken, so daß das System a_{ik}, b_{ik} und C^r_{ik} durch a_{ik}, b_{ik}, c_r und d^r zu ersetzen ist, oder durch:

$$a_{ik},\ b_{ik},\ c_r \text{ und } d_r = a_{rs} d^s.$$

Mit Hilfe zweier Vektoren kann man im binären Gebiet[8] eine algebraische Basis bilden:

$$\begin{cases} I_1 = a^{ik} c_i c_k & I_2 = b^{ik} c_i c_k \\ I_3 = a^{ik} c_i d_k & I_4 = b^{ik} c_i d_k \\ I_5 = a^{ik} d_i d_k & I_6 = b^{ik} d_i d_k. \end{cases} \tag{18}$$

I_3 und I_4 sind aber auch durch die übrigen Invarianten und die absolute Invariante I_0 nullter Ordnung ausdrückbar. Eine kleinste Basis von Differentialinvarianten erster Ordnung wird somit gebildet von I_1, I_2, I_5 und I_6.

Zur Bestimmung der Differentialinvarianten zweiter und höherer Ordnung hat man die kovarianten Ableitungen von C^r_{ik} bezüglich φ zu adjungieren, sowie die Gaußschen Krümmungen von φ und ψ usw.

Wir setzen jetzt F in der kanonischen Form (VII) voraus:

$$F = g_0 du_1^4 + 6 g_2 du_1^2 du_2^2 + g_4 du_2^4; \tag{19}$$

---

[7]) R. Weitzenböck, Invariantentheorie [Groningen (1923), XIII, § 20].

[8]) G. F. C. Griss, Differentialinvarianten von Systemen von Vektoren, Diss. Amsterdam [Groningen (1925), Kap. VI, § 1].

φ und ψ reduzieren sich, bis auf absolutinvariante Faktoren, auf

(20) $$\varphi = 2a_{12}du_1du_2 \quad \text{und} \quad \psi = b_{11}du_1^2 + b_{22}du_2^2,$$

wobei

(21) $$a_{12} = \sqrt{g_2}, \quad b_{11} = \sqrt{g_0} \quad \text{und} \quad b_{22} = \sqrt{g_4}.$$

Man berechnet leicht A^r_{ik}, B^r_{ik} und C^r_{ik} und findet weiter:

(22) $$\begin{cases} c_i = -\dfrac{\partial}{\partial u_i}\left(l\sqrt[4]{\dfrac{g_0g_4}{g_2^2}}\right) \\ d_1 = -\dfrac{\partial}{\partial u_1}(l\sqrt[4]{g_4}) \text{ und } d_2 = -\dfrac{\partial}{\partial u_2}(l\sqrt[4]{g_0}). \end{cases}$$

Hieraus findet man unmittelbar die Invarianten I_1, I_2, I_5 und I_6. Auch die Krümmungen sind leicht anzugeben:

(23) $$\begin{cases} A = -\dfrac{1}{\sqrt{g_1}} \dfrac{\partial^2 l\sqrt{g_1}}{\partial u_1 \partial u_2} \\ B = -\dfrac{1}{\sqrt{g_0g_4}}\left\{\dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{g_0}} \dfrac{\partial\sqrt[4]{g_4}}{\partial u_1}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{g_4}} \dfrac{\partial\sqrt[4]{g_0}}{\partial u_2}\right)\right\}. \end{cases}$$

Einfachere Ausdrücke für die Invarianten findet man aber, wenn man auch die dritte Kovariante zweiter Stufe (wieder bis auf einen absolutinvarianten Faktor) heranzieht:

(24) $$\chi = b_{11}du_1^2 - b_{22}du_2^2.$$

Es ist:

(25) $$\sqrt{\tfrac{1}{2}(\psi+\chi)} = \sqrt[4]{g_0}\,du_1 \quad \text{und} \quad \sqrt{\tfrac{1}{2}(\psi-\chi)} = \sqrt[4]{g_4}\,du_2.$$

Mittels (22) und (25) bildet man jetzt folgende Invarianten:

(26) $$\begin{cases} i_1 = \dfrac{1}{\sqrt[4]{g_4}} \dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(l\sqrt[4]{\dfrac{g_0g_4}{g_2^2}}\right), & i_2 = \dfrac{1}{\sqrt[4]{g_0}} \dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(l\sqrt[4]{\dfrac{g_0g_4}{g_2^2}}\right), \\ i_3 = \dfrac{1}{\sqrt[4]{g_4}} \dfrac{\partial}{\partial u_2}(l\sqrt[4]{g_0}), & i_4 = \dfrac{1}{\sqrt[4]{g_0}} \dfrac{\partial}{\partial u_1}(l\sqrt[4]{g_4}). \end{cases}$$

Das System I_0, i_1, i_2, i_3 und i_4 ist eine kleinste Basis von Differentialinvarianten erster Ordnung, weil es, wie man leicht zeigt, mit dem System I_0, I_1, I_2, I_5 und I_6 äquivalent ist.

§ 3. *Die Differentialinvarianten in den Spezialfällen.*

1. Wenn die absolute Invariante nullter Ordnung von u_i unabhängig ist oder verschwindet, so verschwinden i_1 und i_2, und es bleiben nur I_0, i_3 und i_4.

2. Auch wenn $\theta_2 = 0$, sind i_3 und i_4 die Invarianten erster Ordnung.

3. Im Fall $\theta_3 = 0$ aber ist zwar φ noch immer ein quadratischer Tensor mit nichtverschwindender Determinante, aber ψ ist ein Quadrat. Man hat also

$$\varphi = a_{ik} du^i du^k \text{ und } \sqrt{\psi} = b_i du^i \tag{27}$$

mit der Relation:

$$(ab)^2 = a_0 b_2^2 - 2a_1 b_1 b_2 + a_2 b_1^2 = 0. \tag{28}$$

Diese Relation sagt aus, daß a_{ik} in zwei Vektoren *zerlegbar* ist, deren einer b_i ist. Wir können also $a_{ik} = b_i c_k$ setzen und haben nunmehr die Differentialinvarianten von b_i und c_i zu bestimmen. Man findet nur die Rotationen p_{ik} und q_{ik} und $a = \frac{1}{2}(aa')^2 = a_0 a_2 - a_1^2$. Es gibt also zwei absolute Differentialinvarianten erster Ordnung $\frac{p_{ik}}{\sqrt{a}}$ und $\frac{q_{ik}}{\sqrt{a}}$. Zur Bestimmung der Differentialinvarianten höherer Ordnung kann man kovariante Ableitungen bilden entweder mit den a_{ik} oder mit Hilfe der zwei Vektoren b_i und c_i [9]). Benutzen wir die Normalform

$$F = g_0 du_1^4 + 6g_2 du_1^2 du_2^2,$$

so ist (bis auf konstante Faktoren)

$$a_{11} = a_{22} = 0, \quad b_2 = 0, \quad a_{12} = \sqrt{g_2} \text{ und } b_1 = \sqrt[4]{g_0},$$

also

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \sqrt[4]{\frac{g_2^2}{g_0}}$$

und

$$p_{12} = \frac{\partial b_1}{\partial u_2}, \quad q_{12} = -\frac{\partial c_2}{\partial u_1}, \quad a = -a_{12}^2.$$

Die Differentialinvarianten erster Ordnung sind:

$$i_1 = \frac{1}{\sqrt{g_2}} \frac{\partial \sqrt[4]{g_0}}{\partial u_2} \text{ und } i_2 = \frac{1}{\sqrt{g_2}} \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\sqrt[4]{\frac{g_2^2}{g_1}}\right). \tag{29}$$

---

[9]) l. c. [8]), Kap. VI, § 2.

4. Die gegebene Differentialform ist für $\psi \equiv 0$ ein Quadrat. Es gelten also die bekannten Entwicklungen bei der quadratischen Differentialform. Es gibt keine Differentialinvarianten erster Ordnung, die Differentialinvariante zweiter Ordnung ist die Gaußsche Krümmung usw.

5. Wenn $\theta_1 = 0$ und $\theta_2 = 0$, so ist H ein Biquadrat. Setzen wir

$$-8H = (b_1 du_1 + b_2 du_2)^4, \tag{30}$$

so ist

$$F = (a_1 du_1 + a_2 du_2)(b_1 du_1 + b_2 du_2)^3. \tag{31}$$

Es ist b_i ein relativer kovarianter Vektor vom Gewicht $\frac{1}{2}$, und daher ist auch a_i ein relativer kovarianter Vektor vom Gewicht $-\frac{3}{2}$, bei:

$$(ba) = a_2 b_1 - a_1 b_2 = 1. \tag{32}$$

Für diese relativen Vektoren gelten folgende Transformationsformeln [10]):

$$\begin{cases} \bar{a}_i = \Delta^r a_\mu e_i^\mu \\ \bar{b}_i = \Delta^{-r-1} b_\mu e_i^\mu \end{cases} \qquad (r = -\tfrac{3}{2}). \tag{33}$$

Differentiation ergibt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{a}_i}{\partial \bar{u}_k} = \dfrac{\partial a_\mu}{\partial u_\nu} \Delta^r e_i^\mu e_k^\nu + r a_\mu \Delta^{r-1} \dfrac{\partial \Delta}{\partial \bar{u}_k} e_i^\mu + a_\mu \Delta^r e_{ik}^\mu \\ \dfrac{\partial \bar{b}_i}{\partial \bar{u}_k} = \dfrac{\partial b_\mu}{\partial u_\nu} \Delta^{-r-1} e_i^\mu e_k^\nu - (r+1) b_\mu \Delta^{-r-2} \dfrac{\partial \Delta}{\partial \bar{u}_k} e_i^\mu + b_\mu \Delta^{-r-1} e_{ik}^\mu . \end{cases} \tag{34}$$

Man bilde die (nichtkovarianten) Rotationen

$$p_{\mu\nu} = \frac{\partial a_\mu}{\partial u_\nu} - \frac{\partial a_\nu}{\partial u_\mu} \text{ und } q_{\mu\nu} = \frac{\partial b_\mu}{\partial u_\nu} - \frac{\partial b_\nu}{\partial u_\mu} \tag{35}$$

mit den Transformationsgleichungen

$$\begin{cases} \bar{p}_{ik} = p_{ik} \Delta^{r+1} + r \dfrac{1}{\Delta} \left(\bar{a}_i \dfrac{\partial \Delta}{\partial \bar{u}_k} - \bar{a}_k \dfrac{\partial \Delta}{\partial \bar{u}_i} \right) \\ \bar{q}_{ik} = q_{ik} \Delta^{-r} - (r+1) \dfrac{1}{\Delta} \left(\bar{b}_i \dfrac{\partial \Delta}{\partial \bar{u}_k} - \bar{b}_k \dfrac{\partial \Delta}{\partial \bar{u}_i} \right). \end{cases} \tag{36}$$

---

[10]) Eine Verallgemeinerung für das n-äre Gebiet erscheint in Kurzem.

Wir setzen $p = p_{12}$ und $q = q_{12}$; dann ist:

$$(37)\qquad \begin{cases} \dfrac{\bar{p}}{r}\Delta = \dfrac{p}{r}\Delta^{r+2} + \left(\bar{a}_1 \dfrac{\partial \Delta}{\partial \bar{u}_2} - \bar{a}_2 \dfrac{\partial \Delta}{\partial \bar{u}_1}\right) \\ \dfrac{\bar{q}}{r+1}\Delta = \dfrac{q}{r+1}\Delta^{-r-1} - \left(\bar{b}_1 \dfrac{\partial \Delta}{\partial \bar{u}_2} - \bar{b}_2 \dfrac{\partial \Delta}{\partial \bar{u}_1}\right). \end{cases}$$

Wir lösen $\dfrac{\partial \Delta}{\partial \bar{u}_1}$ und $\dfrac{\partial \Delta}{\partial \bar{u}_2}$

$$(38)\qquad \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{u}_i} = -\bar{s}_i \Delta + s_\mu \Delta e_i^\mu ,$$

wo

$$(39)\qquad s_\mu = \frac{p b_\mu}{r} + \frac{q a_\mu}{r+1}.$$

und substituieren in (34)

$$(44)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{a}_i}{\partial \bar{u}_k} = \dfrac{\partial a_\mu}{\partial u_\nu}\Delta^r e_i^\mu e_k^\nu - r\bar{a}_i \bar{s}_k + r\, a_\mu s_\nu \Delta^r e_i^\mu e_k^\nu + a_\mu \Delta^r e_{ik}^\mu \\ \dfrac{\partial \bar{b}}{\partial \bar{u}_k} = \dfrac{\partial b_\mu}{\partial u_\nu}\Delta^{-r-1} e_i^\mu e_k^\nu + (r+1)\bar{b}_i \bar{s}_k - (r+1)\, b_\mu s_\nu \Delta^{-r-1} e_i^\mu e_k^\nu + b_\mu \Delta^{-r-1} e_{ik}^\mu \end{cases}$$

oder

$$(41)\qquad \begin{cases} a_\mu e_{ik}^\mu = {}_1\bar{t}_{ik}\Delta^{-r} - {}_1t_{\mu\nu} e_i^\mu e_k^\nu \\ b_\mu e_{ik}^\mu = {}_2\bar{t}_{ik}\Delta^{r+1} - {}_2t_{\mu\nu} e_i^\mu e_k^\nu , \end{cases}$$

wo

$$(42)\qquad \begin{cases} {}_1t_{\mu\nu} = \dfrac{\partial a_\mu}{\partial u_\nu} + r\, a_\mu s_\nu \\ {}_2t_{\mu\nu} = \dfrac{\partial b_\mu}{\partial x_\nu} - (r+1) b_\mu s_\nu . \end{cases}$$

Wir setzen noch:

$$a^1 = -b_2, \quad a^2 = b_1 \quad \text{und} \quad b^1 = a_2, \quad b^2 = -a_1$$

und lösen:

$$(43)\qquad e_{ik}^l = \bar{\Gamma}_{ik}^\lambda e_\lambda^l - \Gamma_{\mu\nu}^l e_i^\mu e_k^\nu$$

mit

$$(44)\qquad \Gamma_{ik}^l = {}_1t_{ik} a^l + {}_2t_{ik} b^l .$$

Es gibt keine Differentialinvarianten erster Ordnung. Die einzige relative Differentialinvariante zweiter Ordnung ist die Gaußsche

Krümmung, welche mit (44) *zu bilden ist.* Wir berechnen sie unter Voraussetzung der Normalform

$$F = 4g_1 du_1^3 du_2, \quad -8H = 16g_1^2 du_1^4,$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2\sqrt{g_1}} \quad \text{und} \quad b_1 = 2\sqrt{g_1}, \quad b_2 = 0.$$

Man findet:

$${}_1t_{11} = 0, \quad {}_1t_{12} = {}_1t_{21} = 0, \quad {}_1t_{22} = \frac{2}{b_1^2}\frac{\partial b_1}{\partial u_2},$$

$${}_2t_{11} = \frac{2}{3}\frac{\partial b_1}{\partial u_1}, \quad {}_2t_{12} = {}_2t_{21} = 0, \quad {}_2t_{22} = 0;$$

weiter:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{2}{3}\frac{1}{b_1}\frac{\partial b_1}{\partial u_1} \quad \text{und} \quad \Gamma_{22}^2 = 2\frac{1}{b_1}\frac{\partial b_1}{\partial u_2},$$

$$\Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = 0 \quad \text{und} \quad \Gamma_{12}^2 = 0,$$

schließlich:

$$R_{1,12}^1 = -\frac{2}{3}\frac{\partial^2 \log b_1}{\partial u_1 \partial u_2}, \quad R_{2,12}^1 = 0, \quad R_{1,12}^2 = 0 \quad \text{und} \quad R_{2,12}^2 = 2\frac{\partial^2 \log b_1}{\partial u_1 \partial u_2}.$$

Die einzige relative Invariante zweiter Ordnung (vom Gewicht 1) ist:

$$R = \frac{\partial^2 \log \sqrt{g_1}}{\partial u_1 \partial u_2}. \tag{45}$$

Die kovariante Ableitung ist

$$R_{(i)} = \frac{\partial R}{\partial u_i} - \Gamma_{ik}^k R, \tag{46}$$

ein relativer kovarianter Vektor vom Gewicht 1. Zwei relative Invarianten sind:

$$a^i R_{(i)} \quad \text{und} \quad b^i R_{(i)}$$

mit den Gewichten $\frac{5}{2}$ und $\frac{1}{2}$. Die zwei absoluten Invarianten dritter Ordnung sind also:

$$R^{-\frac{5}{2}} a^i R_{(i)} \quad \text{und} \quad R^{-\frac{1}{2}} b^i R_{(i)}.$$

Bei Benutzung der Normalform:

$$R^{-\frac{5}{2}} b_1 \left(\frac{\partial R}{\partial u_2} - R\frac{2}{b_1}\frac{\partial b_1}{\partial u_2}\right) \quad \text{und} \quad R^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{b_1}\left(\frac{\partial R}{\partial u_1} - R\frac{2}{3}\frac{1}{b_1}\frac{\partial b_1}{\partial u_1}\right)$$

oder

$$(47) \qquad I_1 = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\sqrt{\frac{g_1}{R}}\right) \quad \text{und} \quad I_2 = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\sqrt{\frac{R^3}{g_1}}\right).$$

Wenn $H \equiv 0$, so ist $F = (a_1 du_1 + a_2 du_2)^4$ und es gibt nur eine relative Invariante erster Ordnung, die Rotation; also $p = \frac{\partial \sqrt[4]{g_0}}{\partial u_2}$ für $F = g_0 du_1^4$.

(Eingegangen den 14. November 1933.)