

# COMPOSITIO MATHEMATICA

HENRI MILLOUX

## Sur les valeurs asymptotiques des fonctions entières d'ordre infini

*Compositio Mathematica*, tome 1 (1935), p. 305-313

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1935\\_\\_1\\_\\_305\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__1__305_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# Sur les valeurs asymptotiques des fonctions entières d'ordre infini

par

Henri Milloux

Bordeaux

---

1. On sait qu'une fonction entière d'ordre fini  $\rho$  a au plus  $2\rho$  valeurs asymptotiques finies et différentes. Cette importante propriété, énoncée par M. Denjoy, a été déduite par M. Ahlfors, dans sa thèse, de l'étude de la représentation conforme des bandes. M. Carleman avait, entre temps, établi que le nombre des valeurs asymptotiques d'une telle fonction est au plus égal à  $k\rho$ ,  $k$  étant une constante numérique.

Que devient cette proposition pour les fonctions entières d'ordre infini? Certaines de ces fonctions admettent une infinité de valeurs asymptotiques; et, dans ce cas, l'ensemble des valeurs asymptotiques a nécessairement un ensemble dérivé, qui peut d'ailleurs comprendre l'infini, ou même ne comprendre que l'infini.

On constate alors qu'il est illusoire de parler de *valeurs asymptotiques finies et différentes*. D'où la nécessité d'introduire les différences des valeurs asymptotiques, de même que les modules de ces valeurs.

Dans l'étude qui va suivre, on fera dépendre ces différences et ces modules, ou, d'une façon plus précise, une borne inférieure des premières et une borne supérieure des seconds, d'une part du domaine du plan  $z$  dans lequel on étudie la fonction entière  $f(z)$  (en l'espèce, l'intérieur du cercle  $|z|=R$ ), d'autre part du maximum  $M(r, f)$  du module de la fonction sur le cercle  $|z|=r$ . La première borne pourra tendre vers 0, la deuxième vers l'infini, lorsque  $r$  augmente indéfiniment; le rapport  $\frac{r}{R}$  est choisi à l'avance.

Considérons maintenant les chemins intérieurs à la couronne circulaire  $r < |z| < R$ , sur chacun desquels la fonction  $f(z)$  est, pour  $|z|$  assez grand, *voisine* d'une valeur  $a_i$ , les différences

$|a_i - a_j|$  et les modules  $|a_i|$  étant limités comme il vient d'être dit. Après avoir défini et précisé le *voisinage* en question, toujours en fonction de  $r$  et de  $M(r, f)$ , nous obtiendrons une limite supérieure du nombre  $n$  de ces chemins, en fonction de  $R$  et de  $M(R, f)$ .

2. *Précisions sur un théorème de M. Lindelöf.* — Il s'agit du théorème suivant: *Si une fonction  $\varphi(\zeta)$  est holomorphe et bornée dans une bande rectangulaire indéfinie, et si elle tend vers une valeur finie  $a$  sur l'un des côtés, et vers  $b$  sur l'autre côté, lorsque  $\zeta$  s'éloigne indéfiniment dans le même sens sur les deux côtés, alors  $a = b$ .*

Ce théorème a été utilisé par M. Ahlfors dans sa démonstration du théorème de Denjoy. Nous allons le préciser, et démontrer le

LEMME. — *Soit, dans le plan  $\zeta$  un rectangle  $ABCD$  de largeur  $AB = 2l$  et de hauteur  $AC = 2h$ . On suppose  $l \geq h$  et on pose:*

$$h = l \operatorname{tg} \varphi, \quad 2h = l \operatorname{tg} \theta.$$

*Soit  $\varphi(\zeta)$  une fonction holomorphe dans le rectangle, continue sur les côtés, et telle que:*

$$\begin{aligned} |\varphi(\zeta)| &\leq K \text{ dans le rectangle,} \\ |\varphi(\zeta) - a| &\leq \varepsilon \text{ sur } AB, \\ |\varphi(\zeta) - b| &\leq \varepsilon \text{ sur } CD. \end{aligned}$$

(On peut supposer  $|a|$  et  $|b|$  inférieurs à  $K$ .)

Alors on a l'inégalité

$$(1) \quad |a - b| < 4\varepsilon \left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^{\frac{\varphi}{\theta}}.$$

*Démonstration.* Soit  $0$  le centre du rectangle.  $E$  le milieu de  $CD$ . L'arc de cercle  $AEB$  est tout entier intérieur au rectangle.

La fonction harmonique

$$\operatorname{Arg} \frac{\zeta - \zeta(A)}{\zeta - \zeta(B)}$$

prend les valeurs:  $\pi$  sur la corde  $AB$ , et  $\pi - 2\theta$  sur l'arc de cercle  $AEB$ .

D'autre part, la fonction harmonique  $\log |\varphi(\zeta) - a|$  prend des valeurs inférieures à  $\log 2K$  dans tout le rectangle, et en particulier sur l'arc de cercle  $AEB$ , et à  $\log \varepsilon$  sur la corde  $AB$ .

On a donc, à l'intérieur de  $ABEA$ , une inégalité de la forme

$$\log |\varphi(\zeta) - a| < m \operatorname{Arg} \frac{\zeta - \zeta(A)}{\zeta - \zeta(B)} + n,$$

les constantes  $m$  et  $n$  étant choisies de telle sorte que la fonction harmonique du second membre prenne les valeurs:  $\log \varepsilon$  sur la corde  $AB$ , et  $\log 2K$  sur l'arc de cercle  $AEB$ .

On a donc:

$$\begin{aligned} \log \varepsilon &= m\pi + n \\ \log 2K &= m(\pi - 2\theta) + n. \end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2\theta}(\log \varepsilon - \log 2K) \\ n &= \left(1 - \frac{\pi}{2\theta}\right) \log \varepsilon + \frac{\pi}{2\theta} \log 2K. \end{aligned}$$

En particulier, au point 0 on a:

$$\log |\varphi(0) - a| < m(\pi - 2\theta) + n.$$

Ou:

$$|\varphi(0) - a| < \varepsilon^{1 - \frac{\varphi}{\theta}} [2K]^{\frac{\varphi}{\theta}} < 2\varepsilon \left[\frac{K}{\varepsilon}\right]^{\frac{\varphi}{\theta}}.$$

Une inégalité analogue a lieu limitant par la même expression la quantité  $|\varphi(0) - b|$ .

Ces deux inégalités ne peuvent être compatibles que si  $|a - b|$  est inférieure au double du second nombre commun à ces deux inégalités, d'où le lemme.

*Remarque.*

$\frac{\varphi}{\theta}$  est évidemment inférieur à 1. Pour le carré, cas limite, l'expression  $\frac{\varphi}{\theta}$  est égale à  $\frac{\pi}{4 \operatorname{Arctg} 2}$  quantité voisine de 0,71 et pour le rectangle de côté  $AB$  infini, autre cas limite,  $\frac{\varphi}{\theta}$  est égal à 0,5. Dans tous les cas,  $\frac{\varphi}{\theta}$  est inférieur à  $\frac{3}{4}$  et l'on peut écrire à fortiori

l'inégalité

$$(1') \quad |a - b| < h\varepsilon^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}}.$$

*Autre Remarque.*

L'examen du cas où le rectangle  $ABCD$  est plus haut que large ( $BC > AB$ ), inutile dans cette étude, ne présenterait aucune difficulté.

Il suffirait d'appliquer l'inégalité de Carleman à l'angle rectiligne  $AEB$ , pour en déduire une limitation de  $|\varphi(0) - a|$ , d'opérer d'une façon analogue pour obtenir une limitation de  $|\varphi(0) - b|$  et de comparer les deux limitations obtenues.

3. Montrons que le lemme entraîne le théorème de Lindelöf cité au début du no. 2: découpons dans la bande rectangulaire indéfinie une suite de rectangles  $ABCD$  satisfaisant aux conditions du lemme, des carrés par exemple, de plus en plus éloignés, de façon que  $\varepsilon$  tende vers zéro, d'après les conditions de Lindelöf,  $K$  restant fixe.

On constate que  $|a - b|$  tend vers zéro.

4. J'utiliserai également dans la suite le théorème suivant que j'ai démontré dans un mémoire récent <sup>1)</sup>:

Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe dans le domaine simplement connexe  $D$ , limité, d'une part par des arcs des circonférences de centre  $O$  et de rayons  $r_1$  et  $r_2$ , d'autre part par des courbes  $A$  et  $B$ , chacune de ces courbes pouvant être composée de plusieurs arcs continus. On désigne par  $t\theta(t)$  la somme des arcs de la circonférence de centre  $O$  et de rayon  $t$  intérieurs au domaine  $D$ ; soit  $m_2$  et  $m_1$  deux quantités majorant les valeurs de  $|f(z)|$ , la première sur les arcs situés à la distance  $r_2$  de l'origine, la deuxième sur le reste du contour de  $D$ . On suppose  $m_2$  supérieur à  $m_1$ . Soit enfin  $re^{i\theta}$  un point intérieur à  $D$ . Dans le cas où  $|f(re^{i\theta})|$  est supérieur à  $m_1$ , on a l'inégalité

$$(2) \quad \int_r^{r_2} \frac{dt}{t\theta(t)} < O(1) + \frac{1}{\pi} \log \frac{\log \frac{m_2}{m_1}}{\log \frac{|f(re^{i\theta})|}{m_1}}.$$

5. Soit maintenant  $f(z)$  une fonction holomorphe dans la couronne circulaire

$$r_1 \leq |z| \leq r_2,$$

le rapport  $\frac{r_2}{r_1}$  étant suffisamment grand (nous indiquerons dans le cours du raisonnement une quantité que doit dépasser ce rapport).

Nous supposons qu'il existe, traversant cette couronne circulaire,  $n$  chemins  $L_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) tels que sur  $L_i$  on a:

$$|f(z) - a_i| \leq \varepsilon.$$

Remarquons que ces chemins ne se coupent pas si les différences  $|a_i - a_j|$  sont toutes supérieures à  $2\varepsilon$ , ce que nous supposons.

On désigne par  $\theta_i(K)$  la somme des angles au centre découpés sur la circonférence  $|z| = t$  par le domaine de la couronne circu-

<sup>1)</sup> HENRI MILLOUX. Sur les domaines de détermination infinie des fonctions entières [Acta Math. 61 (1933), 105-134]. Voir p. 112 le théorème I.

laire considérée, compris entre les chemins  $L_i$  et  $L_{i+1}$  (pour  $i = n$ , entre  $L_n$  et  $L_1$ ); on désigne encore par  $m_1$  une quantité supérieure ou égale à tous les  $|a_i| + \varepsilon$ , ainsi qu'au maximum  $M(r_1, f)$  de  $|f(z)|$  sur le cercle  $|z| = r_1$ .

Considérons une valeur  $r$  intermédiaire entre  $r_1$  et  $r_2$ , de façon que l'on ait l'inégalité

$$(3) \quad \int_{r_1}^r \frac{dt}{t \theta_i(t)} \leq 5,$$

quel que soit l'indice  $i$ .  $\theta_i(t)$  étant inférieure à 2, il est évident que l'inégalité (3) est vérifiée dès que  $\frac{r}{r_1}$  dépasse une constante numérique, d'où résulte la nécessité pour le rapport  $\frac{r_2}{r_1}$  de dépasser cette constante numérique.

Désignons par  $d_i$  le domaine de la couronne circulaire  $r \leq |z| \leq r_2$  compris entre les chemins  $L_i$  et  $L_{i+1}$ . Du fait que la somme des  $\theta_i(t)$  pour les  $n$  valeurs de l'indice  $i$ ,  $t$  étant fixe, est égale à  $2\pi$ , on en déduit l'inégalité:

$$\sum_r \int_r^{r_2} \frac{dt}{t \theta_i(t)} \geq \frac{n^2}{2\pi} \log \frac{r_2}{r}.$$

Il existe donc au moins un domaine  $d_i$  pour lequel:

$$(4) \quad \int_r^{r_2} \frac{dt}{t \theta_i(t)} \geq \frac{n}{2\pi} \log \frac{r_2}{r}.$$

Appliquons le théorème rappelé au no. 4 au domaine  $D_i$  déterminé par les chemins  $L_i$  et  $L_{i+1}$  dans la couronne  $r_1 \leq |z| \leq r_2$ , en prenant pour point  $re^{i\theta}$  un point quelconque intérieur au domaine  $D_i$  et situé à la distance  $r$  de l'origine. Nous en déduisons l'une des deux inégalités suivantes:

ou bien:  $|f(re^{i\theta})| \leq m_1,$

ou bien:  $\log \frac{|f(re^{i\theta})|}{m_1} < O(1) \left(\frac{r_2}{r}\right)^{-\frac{n}{2}} \log \frac{m_2}{m_1},$

et a fortiori, dans tous les cas

$$(5) \quad \boxed{\log \frac{|f(re^{i\theta})|}{m_1} < O(1) \left(\frac{r_2}{r}\right)^{-\frac{n}{2}} \log M(r_2, f).}$$

Remarquons que l'inégalité (5) est valable non seulement pour tout point intérieur au domaine  $D_i$  ayant pour module  $r$ , mais

encore pour tout point du domaine  $\delta_i$  dont l'addition au domaine  $d_i$  constitue le domaine  $D_i$ . Ceci résulte de ce que  $|f(z)|$  est inférieur ou égal à  $m_1$  sur la partie de la frontière de  $\delta_i$  qui n'est pas à la distance  $r$  de l'origine, d'après les hypothèses.

Posons:

$$\log K = \log m_1 + O(1) \left(\frac{r_2}{r}\right)^{-\frac{n}{2}} \log M(r_2, f).$$

Faisons la représentation conforme d'une bande indéfinie, de largeur 1, du plan  $\zeta$ , de façon qu'aux portions des chemins  $L_1$  et  $L_{i+1}$  limitant  $\delta_i$  correspondent respectivement des segments rectilignes limitant la bande rectangulaire.

On sait, d'après le théorème fondamental de la thèse de M. Ahlfors <sup>2)</sup> à laquelle on pourra se reporter pour plus de détail sur la représentation en question, que le domaine  $\Delta_i$  transformé de  $\delta_i$  contient à son intérieur un rectangle dont la longueur est égale à

$$\int_{r_1}^r \frac{dt}{t\theta(t)} - 4,$$

quantité supérieure ou égale à 1 d'après l'inégalité (3). La hauteur du rectangle est la largeur de la bande, c'est-à-dire 1. *Donc le domaine  $\Delta_i$  contient un carré ABCD* <sup>3)</sup> auquel peut s'appliquer le lemme du no. 2, la fonction  $\varphi(\zeta)$  de l'énoncé de ce lemme correspondant, après représentation conforme, à la fonction  $f(z)$ .

D'où l'inégalité:

$$|a_i - a_{i+1}| < 4\varepsilon \left[ \frac{K}{\varepsilon} \right]^{\frac{\varphi}{\theta}},$$

et d'après la première remarque faite à la fin du no. 2, on a, a fortiori:

$$|a_i - a_{i+1}| < 4\varepsilon^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}},$$

et d'après la valeur de  $K$ :

$$(6) \quad \log |a_i - a_{i+1}| < O(1) + \frac{1}{4} \log \varepsilon + \frac{3}{4} \log m_1 + O(1) \left(\frac{r_2}{r}\right)^{-\frac{n}{2}} \log M(r_2, f).$$

<sup>2)</sup> LARS AHLFORS, Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen [Acta Soc. Sc. Fennicae (nova series A) 1 (1930), no. 29].

<sup>3)</sup> Remarquons qu'on peut restreindre le domaine  $\Delta_i$  au domaine  $\Delta_i'$  portion de  $\Delta_i$  située dans la couronne circulaire  $r' \leq |z| \leq r$ ,  $r'$  étant déterminé par l'égalité:

$$\int_{r'}^r \frac{dt}{t\theta(t)} = 5.$$

Rappelons les hypothèses qui ont été faites au cours de ce raisonnement, qui aboutit à l'inégalité (6):

$\frac{r_2}{r_1}$  est supposé dépasser une constante numérique;  $\frac{r}{r_1}$  dépasse aussi cette constante numérique.  $|a_i - a_j|$  est supérieur à  $2\varepsilon$ .  $|f(z) - a_i|$  est inférieur à  $\varepsilon$  sur le chemin  $L_i$ <sup>4)</sup> et il y a  $n$  chemins  $L_i$ .

6. Indiquons brièvement que l'inégalité (6), que nous allons surtout appliquer aux fonctions entières d'ordre infini, entraîne le théorème de Denjoy: Si  $f(z)$  est d'ordre fini  $\rho$ , supposons le nombre de valeurs asymptotiques finies et différentes supérieur à  $2\rho$ , de sorte que

$$r_2^{-\frac{n}{2}} \log M(r_2, f)$$

tend vers zéro lorsque  $r_2$  augmente indéfiniment. A chaque valeur  $r_2$ , on peut donc associer une valeur  $r$  tendant vers l'infini avec  $r_2$  de telle façon que le 3e terme du deuxième membre de l'inégalité (6) tende vers zéro;  $r_1$  étant choisi d'une façon fixe,  $m_1$  a une valeur déterminée. Utilisons les remarques faites en note au n° précédent et notons que si  $r$  augmente indéfiniment,  $r'$  augmente indéfiniment aussi et par suite  $\varepsilon$  tend vers zéro; nous aboutissons à une contradiction, le deuxième membre de l'inégalité (6) tendant vers  $-\infty$ , tandis que le premier reste borné.

7. *Application aux fonctions entières d'ordre infini.* Comme nous allons faire tendre  $n$  vers l'infini, remarquons tout d'abord, que s'il existe  $n$  quantités  $a_i$  dont les modules sont inférieurs à  $m_1$ , et dont les différences prises deux à deux sont supérieures à  $\varepsilon'$ , les cercles de centres  $a_i$  et de rayon  $\frac{\varepsilon'}{2}$  étant extérieurs les uns aux autres, et couvrant une superficie totale inférieure à  $\pi \left(m_1 + \frac{\varepsilon'}{2}\right)^2$ , il en résulte que  $n$  est au plus égal à  $\frac{4}{\varepsilon'^2} \left(m_1 + \frac{\varepsilon'}{2}\right)^2$ . Il est d'ailleurs possible, si les cercles de centre  $a_i$  et de rayon  $\varepsilon'$  sont tangents entre eux, que  $n$  soit de la forme  $\frac{O(1)m_1^2}{\varepsilon'^2}$ . Ceci posé, l'inégalité (6) donne ici:

$$\log \varepsilon' < O(1) + \frac{1}{4} \log \varepsilon + \frac{3}{4} \log m_1 + O(1) \left(\frac{r_2}{r}\right)^{-\frac{n}{2}} \log M(r_2, f).$$

<sup>4)</sup> Il est inutile que  $\varepsilon$  majore les  $|f(z) - a_i|$  sur tous les chemins  $L_i$ , mais seulement sur les portions de ces chemins compris dans la couronne  $r' \leq |z| \leq r$ .



Efforçons-nous de fixer entre les quantités  $m_1 \varepsilon' r_2 r$  et  $n$  une dépendance telle que la contradiction apparaisse.

Prenons d'abord  $\log \varepsilon' = \frac{1}{5} \log \varepsilon$ . Ensuite choisissons  $n$  de façon que  $(r_2)^{-\frac{n}{2}} \log M(r_2, f)$  tende vers 0 quand  $r_2$  augmente indéfiniment.

Nous allons prendre par exemple

$$n = 2(1 + \eta) \frac{\log_2 M(r_2, f)}{\log r_2},$$

$\eta$  étant une quantité positive fixe.

L'expression  $\left(\frac{r_2}{r}\right)^{-\frac{n}{2}} \log M(r_2, f)$  sera inférieure à une constante numérique si l'on a soin de ne pas prendre  $r$  trop grand. Pour fixer les idées, nous choisirons pour  $r$  la valeur définie par l'égalité:

$$\log r = \frac{\eta}{1 + \eta} \log r_2.$$

On constate alors que l'expression étudiée est égale à 1.

L'inégalité (6) ainsi simplifiée nous donne:

$$O(1) + \frac{3}{4} \log m_1 + \frac{1}{2} \log \varepsilon > 0.$$

Ce qui n'a certainement pas lieu, lorsque  $m_1$  est assez grand, quand on prend:

$$\log \varepsilon = -16 \log m_1.$$

Il nous reste à fixer la valeur de  $m_1$  en fonction de  $r_2$ ; d'une part on sait que  $n$  ne peut dépasser  $\frac{O(1)m_1^2}{\varepsilon'^2} = O(1)m_1^{\frac{4}{5}}$ .

D'où l'inégalité:

$$(7) \quad m_1^{\frac{4}{5}} \geq O(1) \frac{\log_2 M(r_2, f)}{\log r_2}.$$

D'autre part  $m_1$  désigne une quantité supérieure ou égale à  $M(r_1, f)$  et  $r_1$  doit être inférieur à  $O(1)r$ , d'où l'inégalité supplémentaire:

$$(8) \quad m_1 \leq M \left[ \frac{O(1)\eta}{1 + \eta} r_2, f \right].$$

Les deux inégalités écrites pour  $m_1$  ne sont en général pas incompatibles; pour les fonctions entières d'ordre fini le deuxième membre de l'inégalité (7) est borné, tandis que celui de l'inégalité (8) tend vers l'infini. Pour les fonctions d'ordre infini, le deuxième membre de (7) cesse d'être borné; mais sauf pour des fonctions qu'on peut considérer comme exceptionnelles (à croissance très

irrégulière) le deuxième membre de (7) est considérablement inférieur au deuxième membre de (8); pour certaines fonctions, il peut en être autrement, mais alors pour des valeurs tout à fait exceptionnelles de  $r_2$ , pouvant être enfermées dans des intervalles dont la somme des longueurs est finie. Il est presque évident que si le deuxième membre de (7) était constamment supérieur au deuxième membre de (8),  $M(r_2, f)$  tendrait vers l'infini pour une valeur finie de  $r_2$ .

Les résultats obtenus se résument dans le

**THÉORÈME.** — Soit  $f(z)$  une fonction entière d'ordre infini. Il est en général impossible que dans la couronne circulaire

$$r = \frac{O(1)R\eta}{1+\eta} \leq |z| \leq R \quad (\eta \text{ quantité positive})$$

il y ait plus de  $2(1+\eta) \frac{\log_2 M(R, f)}{\log R}$  chemins  $L_i$  sur chacun desquels  $|f(z)|$  est inférieur à  $M(r, f)$ , et tels que sur  $L_i$  on a l'inégalité:

$$(9) \quad \log |f(z) - a_i| < -O(1) \log M(r, f) = \log \frac{\varepsilon}{2}$$

avec  $|a_i - a_j| > \varepsilon.$

Il ne peut y avoir exception que lorsque  $M(r, f)$  est inférieur à une certaine puissance de  $\frac{\log_2 M(R, f)}{\log R}$  ce qui n'a lieu à la fois que pour des fonctions particulières, et quant à ces fonctions pour des valeurs de  $R$  exceptionnelles.

*Remarque.* Il est inutile que l'inégalité (9) soit vérifiée sur tout le chemin  $L_i$ ; mais seulement sur la portion de ce chemin inférieure à une certaine couronne circulaire; se reporter pour la démonstration au no. 5 et plus particulièrement à la deuxième remarque faite en note à ce numéro. On pourra prendre pour  $r$  une valeur inférieure (ou égale) à  $\frac{O(1)\eta R}{1+\eta}$  et la couronne circulaire ou l'inégalité (9) est vérifiée sur les chemins  $L_i$  est telle que ses rayons extrêmes sont de la forme  $\frac{O(1)\eta R}{1+\eta}$ .

(Reçu le 7 février 1934.)