COMPOSITIO MATHEMATICA

GUSTAV DOETSCH

Summatorische Eigenschaften der Besselschen Funktionen und andere Funktionalrelationen, die mit der linearen Transformationsformel der Thetafunktion äquivalent sind

Compositio Mathematica, tome 1 (1935), p. 85-97

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__1__85_0>

Summatorische Eigenschaften der Besselschen Funktionen und andere Funktionalrelationen, die mit der linearen Transformationsformel der Thetafunktion äquivalent sind

von

Gustav Doetsch

Freiburg i.B.

1. *Über äquivalente Funktionalrelationen.*

Durch eine Funktionaltransformation $\mathfrak{T}\{F\} = f$ werden den Individuen F eines gewissen Funktionsfeldes (Objektfunktionen) die Individuen f eines anderen Funktionsfeldes (Resultatfunktionen) zugeordnet. Eine der reizvollsten Aufgaben, die sich in diesem Ideenkreis stellen, besteht darin, zu untersuchen, wie sich hierbei die Eigenschaften einer Objektfunktion in denen der Resultatfunktion widerspiegeln. Hat z.B. F die Eigenschaft, sich an einer Stelle singulär zu verhalten, so kann es vorkommen, daß daraus notwendig ein ganz bestimmtes Verhalten von f an einer allgemein angebbaren Stelle folgt [1]). Oder genügt F einer Relation $R(F) = 0$, die eine Integral- oder Differentialgleichung, ein Additionstheorem, eine summatorische oder Integraleigenschaft und drgl. darstellen kann, so wird das zugeordnete f seinerseits einer gewissen entsprechenden Relation genügen. Dieser Zusammenhang ist sowohl von theoretischer Bedeutung als von praktischem Nutzen: Einerseits kann es auf diesem Weg gelingen, viele scheinbar sehr entfernte und verschiedenartige Beziehungen in einen gemeinsamen Rahmen zu spannen, indem es sich nämlich zeigt, daß sie alle nichts anderes als „Übersetzungen" einer und derselben Relation durch verschiedene Funktionaltransformationen in verschiedene Funktionsfelder sind. (Die Funktionsfelder sind die „Sprachen", in denen man die nämliche Tatsache in ganz verschiedenen Worten ausdrücken kann; die Funktional-

[1]) Vgl. G. Doetsch, Ein allgemeines Prinzip der asymptotischen Entwicklung [Journal f. d. reine u. angew. Math. **167** (1931), 274—293].

transformation ist der Akt der Übersetzung.) Andererseits wird man auf diesem Weg häufig neue, bisher noch unbekannte Relationen entdecken, oder auch bekannte, aber vordem nur schwierig beweisbare Beziehungen auf einem einfachen und naturgemäßen Weg erhalten.

Die folgenden Zeilen sollen einen Beitrag zu diesem Problemkreis liefern, und zwar gehen wir von einer sehr bekannten und wichtigen Relation aus, nämlich der linearen Transformationsformel für die elliptischen Thetafunktionen, die z.B. für die Funktion $\vartheta_3(v, t)$ so lautet [2]):

$$\vartheta_3(v, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{v^2}{\tau}} \vartheta_3\left(\frac{iv}{\pi\tau}, \frac{1}{\pi^2\tau}\right)$$

oder explizit:

$$\text{(I)} \qquad \boxed{1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2\pi^2\tau} \cos 2m\pi v = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(v+n)^2}{\tau}}.}$$

Es ist bekannt, daß mit dem Spezialfall $v = 0$ dieser Gleichung:

$$(\mathrm{I}_0) \qquad 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2\pi^2\tau} = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2}{\tau}}$$

eine Reihe von anderen bedeutsamen Relationen äquivalent ist, z.B. die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion [3]). Diese ergibt sich, wenn man auf (I_0) die Mellin-Transformation

$$f(s) = \int_0^{\infty} \tau^{s-1} F(\tau)\, d\tau$$

anwendet. Überraschenderweise ist (I) aber auch mit einer sehr

[2]) Siehe H. A. Schwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen. Zweite Ausgabe, Berlin 1893, S. 46. Die Normierung ist hier eine andere: oben im Text ist das $\vartheta_3(v, \tau)$ genannt, was bei Schwarz $\vartheta_3(v/i\pi\tau)$ heißen würde.

[3]) In dem zweiten Beweis, den Riemann [Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe. Werke, 2. Aufl. 1892, 145—153; (147)] für die Funktionalgleichung der Zetafunktion gegeben hat, wird diese aus der Formel (I_0) abgeleitet. Die naheliegende Umkehrung ist mehrfach durchgeführt worden, vgl. H. Hamburger, Über einige Beziehungen, die mit der Funktionalgleichung der Riemannschen ζ-Funktion äquivalent sind [Math. Ann. **85** (1922), 129—140]; Hj. Mellin, Anwendung einer allgemeinen Methode zur Herleitung asymptotischer Formeln [Ann. Acad. Scient. Fenn. (A) **20** (1923) Nr. 1].

viel mehr an der Oberfläche liegenden Beziehung gleichbedeutend. Wendet man nämlich auf (I) die LAPLACE-Transformation

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt \equiv \mathfrak{L}\{F\}$$

(gliedweise) an, so ergibt sich für $\Re s > 0$ und $0 \leqq v \leqq 1$ [$\vartheta_3(v, t)$ hat in v die Periode 1][4]):

$$\text{(II)} \qquad \boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{s} + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2m\pi v}{s + m^2\pi^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{s}} \left\{ e^{-2v\sqrt{s}} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2(n+v)\sqrt{s}} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2(n-v)\sqrt{s}} \right\}. \end{aligned}}$$

Beide Seiten stellen die elementare Funktion

$$f_3(v, s) = -\frac{\cos\,(2v - 1)\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\,\sin\sqrt{-s}}$$

dar. Die Gleichung (II) drückt also aus, daß diese einerseits in eine Partialbruchreihe, andererseits in eine Reihe nach Exponentialfunktionen entwickelt werden kann. Für den Fall $v = 0$ findet sich der Zusammenhang zwischen den beiden speziellen Funktionen $\vartheta_3(0, t)$ und $-\frac{\operatorname{ctg}\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}}$ bei H. HAMBURGER[5]), der auch noch zwei andere mit (I_0) äquivalente Formeln aufgestellt hat (eine FOURIER-Entwicklung und die Poissonsche Summationsformel). Im Folgenden sollen nun einige weitere mit der allgemeinen Formel (I) äquivalente Relationen abgeleitet werden, und zwar eine auf die Besselsche Funktion J_0 bezügliche Reihenformel, eine analoge Formel für die höheren Besselschen Funktionen J_ν, eine bereits bekannte Integralformel für J_0 und eine gewisse FOURIER-Entwicklung, die man auch umgekehrt zu einem besonders einfachen Beweis der Theta-

---

[4]) Die Transformation der linken Seite erhält man auf Grund der leicht nachzurechnenden Formel $\mathfrak{L}\{e^{-m^2\pi^2 t}\} = \frac{1}{s + m^2\pi^2}$. Für die Transformation der rechten Seite siehe G. DOETSCH, Transzendente Additionstheoreme der elliptischen Thetafunktionen und andere Thetarelationen vom Faltungstypus [Math. Ann. **90** (1923), 19—25].

[5]) Siehe die in Fußnote 3) zitierte Arbeit.

formel (I) benutzen kann. Zum Schluß wird noch angedeutet, wie ein kürzlich von G. N. Watson· erzieltes Ergebnis für die Besselsche Funktion K_0 vom Bassetschen Typ mit dem Spezialfall $v = 0$ unserer Relationen zusammenhängt.

2. *Die Reihe* $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} J_0((n+v)x)$.

Die Vermittlung zwischen (I) und der abzuleitenden Relation wird wieder wie bei (II) durch die Laplace-Transformation hergestellt werden. Während aber oben die Thetafunktion als Objektfunktion auftrat, wird sie jetzt als Resultatfunktion erscheinen. Für die Besselsche Funktion erster Art

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

gilt bekanntlich [6]):

$$\mathfrak{L}\left\{J_0\left((n+v)\sqrt{t}\right)\right\} = \frac{1}{s} e^{-\frac{(n+v)^2}{4s}}$$

für $\Re s > 0$ und alle reellen Werte von $n + v$. Also ist [7]):

$$\mathfrak{L}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_0\left((n+v)\sqrt{t}\right)\right\} = \frac{1}{s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(n+v)^2}{4s}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{s}}\, \vartheta_3(v, 4s).$$

Nach Formel (I) ist dies gleich

$$2\sqrt{\frac{\pi}{s}} \left(1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} e^{-4m^2\pi^2 s} \cos 2m\pi v\right).$$

Wir definieren nun für $m = 0, 1, 2, \ldots$ eine Funktion $\Phi_m(t)$ folgendermaßen:

$$\Phi_m(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq t \leqq 4m^2\pi^2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{t - 4m^2\pi^2}} & \text{für } t > 4m^2\pi^2, \end{cases}$$

---

[6]) Siehe G. N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge 1922, 393.

[7]) Die hier und im Folgenden noch öfter nötige Vertauschung zweier Grenzübergänge (z.B. Laplace-Integral und unendliche Summe) läßt sich in derselben Weise wie an mehreren Stellen meiner früheren Arbeiten rechtfertigen. Daher wird das hier übergangen.

Ihre LAPLACE-Transformierte sieht so aus:

$$\mathfrak{L}\{\Phi_m\} = \int\limits_{4m^2\pi^2}^{\infty} \frac{e^{-st}}{\sqrt{t - 4m^2\pi^2}}\, dt = \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-s(t+4m^2\pi^2)}}{\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{s}}\, e^{-4m^2\pi^2 s}.$$

Dies zeigt uns, daß

$$\mathfrak{L}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_0\left((n+v)\sqrt{t}\right)\right\} = 2\,\mathfrak{L}\left\{\Phi_0(t) + 2\sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(t)\cos 2m\pi v\right\},$$

also wenigstens fast überall

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_0\left((n+v)\sqrt{t}\right) = \Phi_0(t) + 2\sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(t)\cos 2m\pi v$$

ist. Wegen der Definition von $\Phi_m(t)$ können wir diese Formel, indem wir noch x^2 für t substituieren, anschaulicher so schreiben:

$$\text{(III)} \qquad \boxed{\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_0((n+v)x) = \frac{1}{x} + 2\sum_{m=1}^{p} \frac{\cos 2m\pi v}{\sqrt{x^2 - 4m^2\pi^2}},}$$

wo x positiv $\neq 2m\pi$ und p die größte ganze Zahl mit der Eigenschaft $2\pi p < x$, also $p = \left[\frac{x}{2\pi}\right]$ ist [8]). Was v anbetrifft, so kann man, da beide Seiten die Periode 1 haben, sich auf das Intervall $0 \leqq v < 1$ beschränken.

Diese Formel ist für das Verhalten von J_0 sehr aufschlußreich. Sie zeigt, daß die links stehende Summe bei festgehaltenem v für alle positiven $x \neq 2m\pi$ einen ganz einfachen Wert besitzt, der sich durch seine endliche Reihe ausdrücken läßt, die umso mehr Glieder hat, je größer x ist. Die linke Seite hat auch einen endlichen Grenzwert, wenn man gegen die Ausnahmestellen von

---

[8]) Aus $\mathfrak{L}(F_1) = \mathfrak{L}(F_2)$ folgt $F_1(t) = F_2(t) + N(t)$, wo $\int\limits_0^t N(\tau)d\tau$ identisch verschwindet (Satz von LERCH). Also ist z.B. an allen gemeinsamen Stetigkeitsstellen $F_1(t) = F_2(t)$. Die rechte Seite in (III) hat offenbar nur in $x = 2m\pi$ Unstetigkeiten; die linke Seite ist in jedem Intervall $2m\pi + \delta \leqq x \leqq 2(m+1)\pi - \delta$ gleichmäßig konvergent, was man analog wie bei Fourierreihen beweist [$J_0(z)$ verhält sich asymptotisch wie $\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z + \frac{\pi}{4}\right)$], also auch nur in $x = 2m\pi$ unstetig (an diesen Stellen divergiert die Reihe). Also stimmen die beiden Seiten in $x \neq 2m\pi$ überein.

links wandert. Nähert man sich ihnen dagegen von rechts, so wächst sie gegen unendlich. — Will man die Abhängigkeit von v studieren, so schreibt man besser ($vx = w$) :

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_0(nx+w) = \frac{1}{x} + 2\sum_{m=1}^{p} \frac{\cos 2m\pi \frac{w}{x}}{\sqrt{x^2-4m^2\pi^2}} \quad (0 \leqq w < x).$$

Links werden die J_0-Werte an den äquidistanten Stellen $nx + w$ summiert, und die rechte Seite zeigt, daß diese Summe mit w nach Art einer endlichen Fourierreihe variiert. Für $0<x<2\pi$ ist die Summe von v, bzw. w ganz unabhängig, nämlich einfach gleich $\frac{1}{x}$.

Der Spezialfall $v = 0$ unserer Formel

$$(\mathrm{III}_0) \quad \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_0(nx) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} J_0(nx) = \frac{1}{2} + 2\sum_{m=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{x^2-4m^2\pi^2}}$$

ist von N. Nielsen [9]) auf ganz anderem Weg gefunden worden, während die allgemeine Formel bisher nicht bekannt gewesen zu sein scheint. Wir merken noch besonders den Fall $v = \frac{1}{2}$ an:

$$(\mathrm{III}_{1/2}) \quad \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_0\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) = \frac{1}{x} + 2\sum_{m=1}^{p} \frac{(-1)^m}{\sqrt{x^2-4m^2\pi^2}}.$$

Zusatz: Die Funktion

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_0\left((n+v)\sqrt{t}\right) = S(v,t)$$

hängt durch die Laplace-Transformation mit der Funktion $\vartheta_3(v, t)$, diese ihrerseits durch dieselbe Transformation mit der Funktion $f_3(v, s)$ zusammen. Also muß auch zwischen S und f_3 ein unmittelbarer Zusammenhang bestehen und zwar auf dem Weg über die Stieltjes-Transformation [10]). Es war

---

[9]) N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen. Leipzig 1904, 336.

[10]) Wegen dieser Bezeichnung und der Äquivalenz der Stieltjes-Transformation mit zwei Laplace-Transformationen vgl. G. Doetsch, Sätze von Tauberschem Charakter im Gebiet der Laplace- und Stieltjes-Transformation [Sitzungsber. Akademie Berlin, phys.-math. Kl. **1930**, 144—157].

$$\mathfrak{L}_{s=\frac{\sigma}{4}}\{S\} = 2\sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}\,\vartheta_3(v,\sigma)$$

und

$$\mathfrak{L}\{\vartheta_3\} = f_3(v, s);$$

also ist

$$f_3(v, s) = \mathfrak{L}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{\pi}}\,\mathfrak{L}_{\frac{\sigma}{4}}\{S\}\right\}$$

oder explizit

$$f_3(v, s) = \int_0^\infty d\sigma\, e^{-s\sigma}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{\sigma}{4}t}S(v, t)dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dt\, S(v,t)\int_0^\infty e^{-\sigma\left(s+\frac{t}{4}\right)}\sqrt{\sigma}\,d\sigma = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{S(v, t)}{\left(s+\frac{t}{4}\right)^{3/2}}dt,$$

d.h.

$$\int_0^\infty \frac{\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} J_0\left((n+v)\sqrt{t}\right)}{(4s+t)^{3/2}}dt = -\frac{\cos(2v-1)\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\sin\sqrt{-s}} \quad (\Re s > 0).$$

3. *Die Reihe* $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{J_\nu((n+v)x)}{(n+v)^\nu}$.

Aus der auf J_0 bezüglichen Formel (III) werden wir nun eine analoge Formel für die allgemeine Besselsche Funktion ($\nu > 0$)

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$$

ableiten. Für $\Re s > 0$ und alle reellen $n + v$ gilt [11]):

$$\mathfrak{L}\left\{t^{\frac{\nu}{2}}J_\nu\left((n+v)\sqrt{t}\right)\right\} = \frac{(n+v)^\nu}{2^\nu s^{\nu+1}}\,e^{-\frac{(n+v)^2}{4s}},$$

also für $0 < v < 1$:

$$\mathfrak{L}\left\{2^\nu t^{\frac{\nu}{2}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{J_\nu\left((n+v)\sqrt{t}\right)}{(n+v)^\nu}\right\} = \frac{1}{s^{\nu+1}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(n+v)^2}{4s}}$$

$$= \frac{1}{s^\nu}\,\mathfrak{L}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_0\left((n+v)\sqrt{t}\right)\right\}.$$

---

[11]) Siehe G. N. Watson, Treatise, 394.

Setzt man zur Abkürzung

$$\int_0^t F_1(\tau)F_2(t-\tau)dt = F_1 * F_2\,,$$

so ist bekanntlich

$$\mathfrak{L}\{F_1 * F_2\} = \mathfrak{L}\{F_1\}\cdot\mathfrak{L}\{F_2\}.$$

Beachtet man, daß

$$\frac{1}{s^\nu} = \mathfrak{L}\left\{\frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\right\}$$

ist, und setzt für $\sum J_0\left((n+v)\sqrt{t}\right)$ den Wert aus (III) ein, so ergibt sich:

$$2^{\nu-1}t^{\frac{\nu}{2}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{J_\nu\left((n+v)\sqrt{t}\right)}{(n+v)^\nu} = \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} * \left\{\frac{1}{\sqrt{t}} + 2\sum_{m=1}^{p}\frac{\cos 2m\pi v}{\sqrt{t-4m^2\pi^2}}\right\}.$$

Das Integral auf der rechten Seite läßt sich ausrechnen. Ein einzelnes Glied ist (vgl. S. 4)

$$t^{\nu-1} * \Phi_m(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq t \leqq 4m^2\pi^2 \\ \displaystyle\int_{4m^2\pi^2}^{t}\frac{(t-\tau)^{\nu-1}}{\sqrt{\tau-4m^2\pi^2}}\,d\tau & \text{für } t > 4m^2\pi^2. \end{cases}$$

Durch die Substitution

$$\tau = 4m^2\pi^2 + (t-4m^2\pi^2)\,v$$

erhält man:

$$\int_{4m^2\pi^2}^{t}\frac{(t-\tau)^{\nu-1}}{\sqrt{\tau-4m^2\pi^2}}\,d\tau = (t-4m^2\pi^2)^{\nu-1/2}\int_0^1 (1-v)^{\nu-1}v^{-1/2}dv$$

$$= (t-4m^2\pi^2)^{\nu-1/2}\,\frac{\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}.$$

Also ergibt sich schließlich, wenn man noch $t = x^2$ setzt:

$$\text{(IV)}\quad \boxed{\begin{gathered} 2^{\nu-1}x^\nu\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{J_\nu((n+v)\,x)}{(n+v)^\nu} = \\ \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(x^{2\nu-1} + 2\sum_{m=1}^{p}(x^2-4m^2\pi^2)^{\nu-1/2}\cos 2m\pi v\right). \end{gathered}}$$

Hierin ist $\nu > 0$, x positiv $\neq 2m\pi$, $p = \left[\frac{x}{2\pi}\right]$ und $0 < v < 1$.

Für $v = 0$ ist die Formel sinnlos, da dann auf der linken Seite für $n = 0$ der Nenner verschwindet. Indem man von vorn an rechnet, überzeugt man sich leicht, daß sie auch für $v = 0$ richtig bleibt, wenn man für das $n = 0$ entsprechende Glied seinen Grenzwert für $v \to 0$ einsetzt. Die Formel lautet dann:

$$(\mathrm{IV}_0)\quad \frac{x^{2\nu}}{2\Gamma(\nu+1)} + 2^\nu x^\nu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_\nu(nx)}{n^\nu} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \left(x^{2\nu-1} + 2\sum_{m=1}^{p} (x^2 - 4m^2\pi^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\right).$$

4. *Die Reihe* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(n+v)x}{n+v}$.

Im Spezialfall $\nu = \frac{1}{2}$ ist J_ν eine elementare Funktion:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

Die Formel (IV) liefert hier wegen

$$1 + 2\sum_{m=1}^{p} \cos 2m\pi v = \frac{\sin(2p+1)\pi v}{\sin \pi v}$$

die besonders einfache Relation:

$$(\mathrm{V})\quad \boxed{\frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(n+v)x}{n+v} = \frac{\sin(2p+1)\pi v}{\sin \pi v}}$$

($x \neq 2m\pi$, $p = \left[\frac{x}{2\pi}\right]$, $0 < v < 1$). Die rechte Seite ist als Funktion von x stückweise konstant, also eine Treppenfunktion; z.B. für $v = \frac{1}{2}$ ist sie die Funktion $(-1)^p$. Die linke Seite ist die Kombination zweier Fourierreihen:

$$\frac{1}{\pi} \sin vx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n+v} + \frac{1}{\pi} \cos vx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n+v}.$$

An den Sprungstellen $x = 2m\pi$ stellt die linke Seite, wie man leicht nachrechnet, in üblicher Weise den Mittelwert dar.

Die entsprechende Beziehung für $v = 0$ ergibt sich als Spezialfall aus (IV_0):

$$(\mathrm{V}_0) \qquad \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \left[\frac{x}{2\pi}\right] - \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2}.$$

Dies ist eine wohlbekannte Fourierentwicklung.

Daß die Formeln (V) und (V_0), die wir hier aus (I) und (I_0) auf dem Umweg über (III) und (IV) erhalten haben, mit (I) und (I_0) äquivalent sind, kann man auch ganz einfach direkt beweisen. Es ist nämlich für $\Re s > 0$ und alle reellen $n + v$:

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{1}{\pi}\sin(n+v)\sqrt{t}\right\} = \frac{n+v}{2\sqrt{\pi}\, s^{3/2}}\, e^{-\frac{(n+v)^2}{4s}},$$

also vermöge (I) für $0 < v < 1$:

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(n+v)\sqrt{t}}{n+v}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, s^{3/2}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(n+v)^2}{4s}} = \frac{1}{s}\left\{1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} e^{-4m^2\pi^2 s}\cos 2m\pi v\right\}.$$

Definieren wir eine Funktion $\Psi_m(t)$ folgendermaßen:

$$\Psi_m(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } 0 \leqq t \leqq 4m^2\pi^2 \\ 1 \text{ für } t > 4m^2\pi^2, \end{cases}$$

so ist

$$\mathfrak{L}\{\Psi_m\} = \int_{4m^2\pi^2}^{\infty} e^{-st}dt = \frac{1}{s}\, e^{-4m^2\pi^2 s}.$$

Folglich haben wir:

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(n+v)\sqrt{t}}{n+v}\right\} = \mathfrak{L}\left\{1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}\Psi_m(t)\cos 2m\pi v\right\},$$

d.h.

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(n+v)\sqrt{t}}{n+v} = 1 + 2\sum_{4m^2\pi^2 < t}\cos 2m\pi v,$$

was mit (V) gleichbedeutend ist. Ganz ebenso erhält man (V_0).

Da die Relation (V_0) ganz elementar zu beweisen ist, so erhält man durch Umkehrung unseres Gedankengangs einen Beweis für die Thetatransformationsformel (I_0), der einfacher als alle bekannten Herleitungen sein dürfte.

5. *Das Integral* $\int_0^\infty J_0(z) \cos yz\, dz$.

Wir zeigen jetzt, daß die Summenformel (III) für J_0 mit einer bekannten Integralformel für dieselbe Funktion äquivalent ist, indem wir nun einmal x als konstant und v als variabel denken und auf (III) die „endliche FOURIER-Transformation"

$$c_m = \int_0^1 e^{-2\pi i m v} \varphi(v)\, dv \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

anwenden, d.h. die Fourierkoeffizienten beider Seiten bilden. Die rechte Seite ist selbst eine endliche Fourierreihe, ihre Fourierkoeffizienten sind also ohne weiteres ersichtlich. Trennen wir Reelles und Imaginäres und lassen die verschwindenden sinus-Glieder unbeachtet, so ergibt sich $\left(\frac{x}{2\pi} \neq \text{ganze Zahl}\right)$:

$$\int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_0((n+v)x) \cos 2m\pi v\, dv = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{x^2 - 4m^2\pi^2}} & \text{für } 0 \leqq m < \dfrac{x}{2\pi} \\ 0 & \text{,,} \quad m > \dfrac{x}{2\pi}. \end{cases}$$

Auf der linken Seite vertauschen wir Summe und Integral, formen das einzelne Glied so um:

$$\int_0^1 J_0((n+v)x) \cos 2m\pi v\, dv = \int_n^{n+1} J_0(ux) \cos 2m\pi(u-n)\, du$$
$$= \int_n^{n+1} J_0(ux) \cos 2m\pi u\, du$$

und erhalten:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} J_0(xu) \cos 2m\pi u\, du = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{x^2 - 4m^2\pi^2}} & \text{für } 0 \leqq m < \dfrac{x}{2\pi} \\ 0 & \text{,,} \quad m > \dfrac{x}{2\pi}. \end{cases}$$

Dieser Formel, deren linke Seite übrigens auch als HANKEL-Transformation gedeutet werden kann, geben wir eine noch übersichtlichere Gestalt, indem wir links $xu = z$ und dann $\frac{2m\pi}{x} = y$ setzen. Beachtet man, daß J_0 eine gerade Funktion ist, so ergibt sich:

$$\text{(VI)} \qquad \boxed{\int_0^\infty J_0(z) \cos yz\, dz = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} & \text{für } 0 \leqq y < 1 \\ 0 & \text{,, } y > 1. \end{cases}}$$

Diese Relation, die man auch in der Gestalt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} J_0(z) e^{iyz} dz = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{1-y^2}} & \text{für } 0 \leqq y < 1 \\ 0 & \text{,, } y > 1 \end{cases}$$

schreiben kann, liefert die FOURIER-Transformierte von J_0 und ist zusammen mit ihrer Umkehrung

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{-izy}}{\sqrt{1-y^2}} dy$$

wohlbekannt.

6. *Die Reihe* $\sum_{m=1}^{\infty} K_0(ms)$.

Vor kurzem hat G. N. WATSON [12]) sich die Aufgabe gestellt, für die Besselsche Funktion K_0 eine ähnliche Relation zu finden, wie sie die Nielsensche Formel (III_0) für J_0 darstellt. Er zeigte:

$$2\sum_{m=1}^{\infty} K_0(ms) = \frac{\pi}{s} + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{s^2+4n^2\pi^2}} - \frac{1}{2n\pi} \right) + \gamma + \lg \frac{s}{2} - \lg 2\pi.$$

Ich will hier nur kurz andeuten, daß diese Formel mit (III_0) äquivalent ist. Aus der bekannten Darstellung

$$K_0(s) = \int_1^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{t^2-1}} dt$$

folgt:

$$K_0(ms) = \int_m^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{t^2-m^2}} dt,$$

[12]) G. N. WATSON, Some self-reciprocal functions [Quarterly Journal of Math. (Oxford Series) 2 (1931), 298—309 (298—301)].

also

$$\mathfrak{L}^{-1}\{K_0(ms)\} = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq t \leqq m \\ \dfrac{1}{\sqrt{t^2-m^2}} & \phantom{\text{für }} t > m\,. \end{cases}$$

Dies liefert uns:

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\sum_{m=1}^{\infty} K_0(ms)\right\} = \sum_{m=1}^{[t]} \frac{1}{\sqrt{t^2-m^2}}$$

(für $[t] = 0$ bedeutet die rechte Seite 0). Bezeichnen wir die rechts stehende Funktion mit $F(t)$, so ist nach Formel (III_0)

$$\frac{1}{\pi} F\left(\frac{t}{2\pi}\right) = 2 \sum_{m=1}^{\left[\frac{t}{2\pi}\right]} \frac{1}{\sqrt{t^2-4m^2\pi^2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} J_0(nt)\,,$$

folglich

$$2\sum_{m=1}^{\infty} K_0(ms) = \mathfrak{L}\left\{\pi - \frac{1}{t} + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} J_0(2\pi n t)\right\}.$$

Nun ist aber bekanntlich

$$\mathfrak{L}\,\{J_0(2\pi n t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+4n^2\pi^2}}\,,$$

und so erkennt man bereits den Hauptbestandteil der Watsonschen Formel. Will man jedoch die LAPLACE-Transformation auf der rechten Seite gliedweise ausführen, so divergiert die Reihe. Man muß also erst eine geeignete Umformung vornehmen, und das ist gerade dasjenige, was in der Watsonschen Relation bewerkstelligt ist.

(Eingegangen den 16. August 1933.)