ALEXANDER OSTROWSKI

# Beiträge zur Topologie der orientierten Linienelemente III. Eine Formel für die Differenz der Richtungszuwächse zwischen zwei Linienelementen längs verschiedener Verbindungswege

*Compositio Mathematica*, tome 2 (1935), p. 194-200

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__194_0>

# Beiträge zur Topologie der orientierten Linienelemente III [1])

## Eine Formel für die Differenz der Richtungszuwächse zwischen zwei Linienelementen längs verschiedener Verbindungswege

von

Alexander Ostrowski

Basel

---

1. *Definition des Richtungszuwachses zwischen zwei Linienelementen längs eines Weges.*

Es seien $\varrho_A$, $\varrho_B$ zwei orientierte Linienelemente an den Punkten $A$, $B$. Es sei $W_1$ ein von $A$ nach $B$ führender, orientierter Weg, längs dessen sich eine Tangentenrichtungsfunktion definieren läßt, und es möge vorausgesetzt werden, daß die entsprechenden Tangentenrichtungen an $W_1$ in $A$, $B$ den geometrischen Richtungen von $\varrho_A$ bezw. $\varrho_B$ nicht entgegengesetzt sind. Wir setzen dann an $W_1$ im Punkte $A$ einen beliebig kleinen Vektor an mit dem *Endpunkt* in $A$, der zu $\varrho_A$ parallel ist. Ebenso möge an $B$ ein beliebig kleiner Vektor angesetzt werden, dessen *Anfangspunkt* in $B$ liegt, und der zu $\varrho_B$ geometrisch parallel ist. Der auf diese Weise erweiterte Weg $W_1$ möge mit $W_1'$ bezeichnet werden. Setzt man nun irgend eine analytische Richtung von $\varrho_A$ als die Anfangstangentenrichtung von $W_1'$ fest und verfolgt man sodann die Änderung der Tangentenrichtung längs $W_1'$ unseren Festsetzungen gemäß, so gelangt man in den Endpunkt von $W_1'$ mit einer gewissen analytischen Richtung, die der Richtung $\varrho_B$ geometrisch parallel ist. Diese Endrichtung bezeichnen wir nun als *die Fortsetzung der gewählten Richtung von $\varrho_A$ bis zum Linienelement $\varrho_B$ längs des Weges $W_1$*, und der Tangentenrichtungszuwachs längs $W_1'$ soll als *der Richtungszuwachs von $\varrho_A$ bis $\varrho_B$ längs $W_1$* definiert und mit

$$S_{W_1}(\varrho_A, \varrho_B) \tag{1}$$

bezeichnet werden.

Ist $W_2$ ein anderer unseren Bedingungen genügender, von $A$ nach $B$ führender Weg, so braucht die Größe $S_{W_2}(\varrho_A, \varrho_B)$

---

[1]) Die erste Mitteilung dieser Serie wird im Folgenden mit L. I zitiert.

der Größe (1) nicht gleich zu sein, kann sich aber von ihr nur um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi$ unterscheiden. Man vgl. z.B. die beiden Wege der Fig. 1. Längs $W_1$ ist dort der Richtungszuwachs von $\varrho_A$ bis $\varrho_B$ gleich $-2\pi$, längs $W_2$ dagegen gleich $2\pi$. Wir wollen nun im Folgenden eine Formel für die Differenz

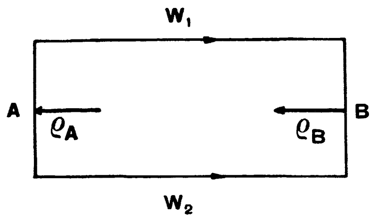


Fig. 1.

$$S_{W_1}(\varrho_A, \varrho_B) - S_{W_2}(\varrho_A, \varrho_B)$$

aufstellen.

2. *Definition von* $\overline{\varrho}$, $\overline{W}$, $D(W)$.

Wir werden im Folgenden das zu einem Linienelement $\varrho_P$ entgegengesetzt gerichtete Linienelement am gleichen Punt $P$ allgemein mit $\overline{\varrho}_P$ bezeichnen. Ist ferner $W$ ein orientierter Weg, so soll unter $\overline{W}$ derselbe, aber im entgegengesetzten Sinne orientierte Weg verstanden werden. Es ist dann klar, daß allgemein

$$S_W(\varrho_A, \varrho_B) = -S_{\overline{W}}(\overline{\varrho}_B, \overline{\varrho}_A)$$

gilt.

Ferner soll der Tangentenrichtungszuwachs längs eines geschlossenen orientierten Weges $W$ für einen nicht singulären Anfangspunkt mit

$$D(W)$$

bezeichnet werden. Offenbar hängt $D(W)$ von der Wahl des nicht singulären Anfangspunktes auf $W$ nicht ab.

3. *Definition von* $\varepsilon(\varrho_A, C)$ *und Formulierung des Hauptresultats.*

Es sei $C$ ein durch einen Punkt $A$ hindurchgehender orientierter Weg. Wir setzen dann $\varepsilon(\varrho_A, C)$ als gleich $+1$ fest, falls ein hinreichend kleiner Vektor mit der Richtung von $\varrho_A$ und dem Endpunkt in $A$ *rechts* von $C$ bleibt, wenn $C$ seiner Orientierung entsprechend durchlaufen wird; bleibt dagegen dabei ein solcher Vektor links von $C$, so soll $\varepsilon(\varrho_A, C) = -1$ festgesetzt werden. Haben aber beliebig kurze derartige Vektoren von $A$ verschiedene Punkte mit $C$ gemeinsam, so soll $\varepsilon(\varrho_A, C)$ gar nicht definiert werden.

Unter Benutzung dieser Bezeichnungen kann nunmehr unser Hauptresultat in der folgenden Formel zusammengefaßt werden:

$$\begin{aligned}(2)\qquad & S_{W_1}(\varrho_A, \varrho_B) - S_{W_2}(\varrho_A, \varrho_B) = \\ & D(A W_1 B \overline{W}_2 A) - \pi(\varepsilon(\varrho_A, \overline{W}_2 A W_1) + \varepsilon(\overline{\varrho}_B, W_1 B \overline{W}_2).)\end{aligned}$$

4. *Erweiterung auf die Fälle von doppelt durchlaufenen Bögen.* Die soeben aufgestellte Formel gilt und wird im folgenden bewiesen auch für den Fall, daß der Weg $AW_1B\overline{W}_2A$ in $A$ bzw. $B$ in doppelt durchlaufenen Kurvenbögen anstößt, d.h. z.B., wenn die Wege $W_1$, $W_2$ zuerst ein Stück lang gemeinsam verlaufen. Es bedarf allerdings erst einer Erläuterung, was unter $\varepsilon(\varrho_A, C)$ und $D(AW_1B\overline{W}_2A)$ zu verstehen ist, falls der Weg in der Nähe von $A$ ein doppelt durchlaufenes Stück besitzt.

Wir wollen dabei annehmen, daß sich längs $C$ eine Tangentenrichtungsfunktion definieren läßt. In diesem Falle wird man das Stück von $C$ zwischen $A$ und der ersten „Verzweigung" $A_0$ als aus zwei Ufern bestehend annehmen. Wir bezeichnen das (beliebig zu wählende) Ufer von $AA_0$, längs dessen man in $A$ ankommt, als das *erste*, das andere Ufer, längs dessen man sich von $A$ entfernt, als das *zweite*. Es sei $A_1$ ein Punkt auf $C$ zwischen $A$ und $A_0$ so nahe bei $A$ gewählt, daß, wenn $\theta(P)$ eine Tangentenrichtungsfunktion etwa des ersten Ufers von $C$ ist, $|\theta(P) - \theta(A)|$ absolut genommen kleiner als $\frac{\pi}{16}$ bleibt für alle Punkte $P$ zwischen $A$ und $A_1$. Nun denke man sich eine Kreislinie um $A_0$ gezeichnet, die den Bogen $AA_1$ in einem regulären (d.h. nicht singulären) Punkt $P$ derart schneidet, daß sie aus der Umgebung des ersten Ufers von $AA_1$ in die Umgebung des zweiten Ufers von $AA_1$ führt, ohne $AA_1$ zu durchsetzen. Über $\varrho_A$ sei vorausgesetzt, daß ein hinreichend kurzer zu $\varrho_A$ paralleler Vektor mit dem Endpunkt in $A$ ein gewisses an $A$ anstoßendes Teilstück von $AA_0$ nur in $A$ trifft. Wird nun beim Durchlaufen unserer Kreislinie der Punkt $A$ *im positivem Sinne* umlaufen, so soll $\varepsilon(\varrho_A, C) = +1$ sein, während, wenn dabei $A$ *im negativen Sinne* umlaufen wird, wir $\varepsilon(\varrho_A, C) = -1$ setzen. Ferner soll im ersten Falle die Tangente beim Übergang vom ersten Ufer zum zweiten in Punkte $A$ so um $A$ herumgeschwenkt werden, daß der Tangentenrichtungswinkel dem Zuwachs $\pi$ erhält, während er im zweiten Falle den Zuwachs $-\pi$ zu erhalten hat — womit auch derent sprechende Beitrag zu $D(AW_1B\overline{W}_2A)$ festgelegt ist. Man sieht gleich ein, daß die obigen Festsetzungen von der Wahl des Punktes $P$ auf $AA_1$ unabhängig sind, d.h., daß die analog gezeichnete Kreislinie um $A$ durch einen anderen nicht singulären Punkt $P_1$ auf $AA_1$ den Mittelpunkt $A$ im gleichen Sinne umläuft [2]).

[2]) Es genügt zum Beweis, den zwischen den beiden Kreislinien enthaltenen Kreisring und das daraus durch das Aufschneiden längs des zwischen $P$ und $P_1$ liegenden Stückes von $AA_1$ entstehende Gebiet $G$ zu betrachten und den vollstän-

Wir haben oben die Wahl der Ufer, längs deren man auf $A$ zukommt bzw. sich von $A$ entfernt, als willkürlich bezeichnet. In der Tat bleibt die Formel (2) bei jeder Wahl der Ufer richtig, sofern die gleiche Uferzuordnung für die Bestimmung von $\varepsilon$ und $D$ benutzt wird. Wenn nämlich die Zuordnung der Ufer geändert wird, kehrt sich der Durchlaufungssinn der oben benutzten Kreislinie um $A$ durch $P$ um. Wird er etwa vom positiven zum negativen, so vermindert sich $\varepsilon(\varrho_A, \overline{W}_2 A W_1)$ um 2 und der Subtrahend in der rechten Seite von (2) um $2\pi$. Andererseits aber wird der Beitrag der „Spitze" in $A$ zu $D(A W_1 B \overline{W}_2 A)$ anstatt $\pi$ zu $-\pi$, so daß auch der Minuend auf der rechten Seite von (2) sich gleichfalls un $2\pi$ vermindert und die rechte Seite von (2) unverändert bleibt.

5. *Reduktion der geometrischen Konfiguration.*

Wir wollen nun zeigen, daß beim Beweis der Formel (2) vorausgesetzt werden darf, daß der Weg $A W_1 B \overline{W}_2 A$ die Richtung der Vektoren $\varrho_A$, $\varrho_B$ in $A$ bzw. $B$ längs geradliniger Streckensenkrecht durchsetzt und im übrigen polygonal ist — aus endlich vielen geradlinigen Strecken besteht. Man setze an $A$ einen zu $\varrho_A$ geometrisch parallelen Vektor $A^*A$ mit seinem Endpunkt in $A$ an, der dabei so kurz gewählt werden soll, daß er hinreichend kurze an $A$ anstoßende Stücke von $W_1$ und $W_2$ nicht trifft, bis auf den Punkt $A$. Man betrachte nun das zu $\varrho_A$ geometrisch parallele Linienelement $\varrho_{A^*}$ an $A^*$. Dann liefert offenbar die Fortsetzung von $\varrho_{A^*}$ längs des aus $A^*A$ und $W_1$ zusammengesetzten Weges nach $\varrho_B$ den gleichen Richtungszuwachs wie die Fortsetzung von $\varrho_A$ längs $W_1$ nach $\varrho_B$, und dasselbe gilt natürlich auch für den Weg $A^*A W_2$. *Andererseits ist*

$$(3)\qquad \begin{aligned} D(A W_1 B \overline{W}_2 A) &= D(A^* A W_1 B \overline{W}_2 A A^*),\\ \varepsilon(\varrho_{A^*}, \overline{W}_2 A A^* A W_1) &= \varepsilon(\varrho_A, \overline{W}_2 A W_1). \end{aligned}$$

Denn wird ein Stück des Weges $A W_1 B \overline{W}_2 A$ in der Nähe von $A$ doppelt durchlaufen oder besitzt dieser Weg eine Spitze in $A$, so wird die Tangente in $A$ im gleichen Sinne herumgeschwenkt wie für den Weg $A^* A W_1 B \overline{W}_2 A A^*$ im Punkte $A^*$, falls man die Zuordnung der Ufer entsprechend wählt — und aus dem oben Bemerkten folgt ferner, daß es auf diese Zuordnung für die

---

digen Umlauf längs der Berandung von $G$ etwa im positiven Sinne in die Umläufe längs der beiden Kreislinien und längs der beiden Ufer des Querschnitts $PP_1$ zu zerlegen.

Gültigkeit der Formel (2) nicht ankommt. (Man beachte, daß die Konfigurationen wie diejenigen der beiden Figg. 2, 3 nach unserer Voraussetzung über die Richtungen von $\varrho_A$ unmöglich sind.) Hat aber unser Weg in $A$ eine Ecke, der beim Durchgang durch $A$ der Tangentenrichtungszuwachs $\pi - \vartheta$ entspricht (hier könnte $\vartheta$ auch gleich $\pi$ sein, wenn der Weg in $A$ eine Tangente besitzt), so beachte man die Fig. 4, in der die Strecke $AA^*$ in einen „Schlauch" eingebettet erscheint, der aus zwei zu $AA^*$ parallelen Strecken, einem diese Strecken verbindenden Kreisbogen und einer kurzen Verbindungsstrecke besteht. Wird ein Stück unseres Weges in der Nähe von $A$ durch diesen Schlauch ersetzt, so ändert sich vermöge des Lemmas 4 von L. I $D$ dabei ebenso wenig wie die $\varrho_{A^*}$ entsprechende Grösse $\varepsilon$. Wird aber dieser Schlauch auf die Strecke $AA^*$ zusammengezogen, so ergibt sich unsere Behauptung (3).

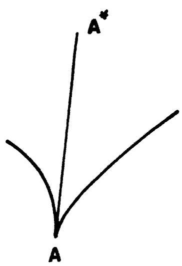


Fig. 2.

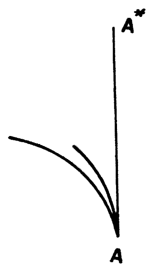


Fig. 3.

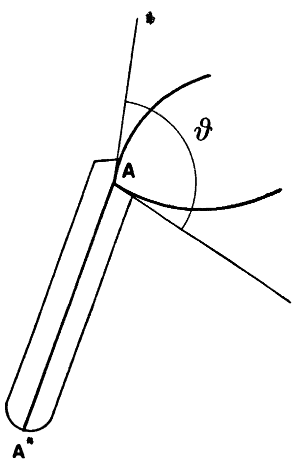


Fig. 4.

Wir können daher $A$ beim Beweise unseres Satzes von vornherein durch $A^*$ ersetzt denken. Genau ebenso kann man am Punkt $B$ einen Ansatz $BB^*$ anfügen, der zu $\varrho_B$ geometrisch parallel ist, und hinterher $B$ durch $B^*$ ersetzen.

*Wir können daher beim Beweis von* (2) *von vornherein voraussetzen, daß die beiden Wege* $W_1$, $W_2$ *von* $A$ *an längs einer gerichteten Strecke* $AA_1$ *verlaufen, die zu* $\varrho_A$ *geometrisch parallel ist, und beide in den Punkt* $B$ *längs einer gerichteten Strecke* $B_1B$ *einmünden, die zu* $\varrho_B$ *geometrisch parallel verläuft.*

Wir setzen nun an das zu $W_1$ gehörende Ufer der Strecke $AA_1$ ein Dreieck $AA_1A_1'$ mit dem rechten Winkel in $A$ an und ersetzen in $W_1$ die Strecke $AA_1$ durch den Streckenzug $AA_1'A_1$. Ebenso legen wir an das zu $W_2$ gehörende Ufer von $AA_1$ ein rechtwinkliges Dreieck $AA_1A_2'$ und ersetzen in $W_2$ die Strecke $AA_1$ durch die beiden Strecken $AA_2'$, $A_2'A_1$. Man entnimmt der Fig. 5

unmittelbar, daß dabei weder das Resultat der Fortsetzung von $\varrho_A$ nach $\varrho_B$, noch die in der Formel (2) vorkommenden Größen $D$, $\varepsilon$ geändert werden. Ebenso können wir die den beiden Wegen $W_1$, $W_2$ gemeinsame Strecke $B_1B$ deformieren und erreichen, daß die Wege $W_1$, $W_2$ in $B$ längs zweier entgegengesetzt gerichteter und auf $\varrho_B$ senkrechter Strecken $B_1'B$, $B_2'B$ münden. Zerlegen wir endlich die zwischen $A_1'$ und $B_1'$ bzw. zwischen $A_2'$ und $B_2'$ gelegenen Stücke von $W_1$, $W_2$ in Teilstücke. auf die

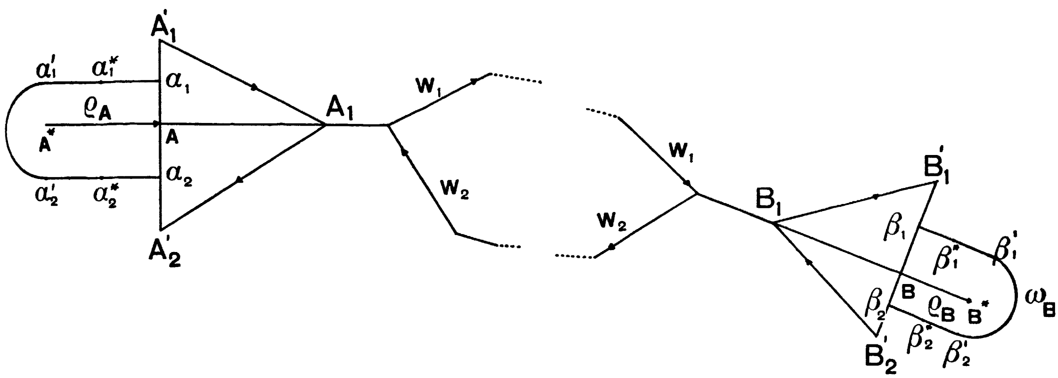


Fig. 5

das Lemma 2 von L. I anwendbar ist, so können wir diese Stücke zu aus je endlich vielen Strecken bestehenden Streckenzügen machen, womit das Ziel, das wir uns am Eingang dieser Nummer gesteckt haben, erreicht ist. Wir können daher im Folgenden von vornherein die Wege $W_1$, $W_2$ in der entsprechenden Gestalt voraussetzen.

**6.** *Beweis der Hauptformel.*

Wir behalten nun die in der vorigen Nummer eingeführten Bezeichnungen bei und legen an die Punkte $A$ und $B$ zwei kleine Vektoren, $A^*A$, $BB^*$, die $\varrho_A$ bzw. $\varrho_B$ geometrisch parallel sind. Durch die Mittelpunkte $\alpha_1$, $\alpha_2$ der Strecken $AA_1'$, $AA_2'$ legen wir die Strecken $\alpha_1\alpha_1'$ bzw. $\alpha_2\alpha_2'$, die der Strecke $AA^*$ gleich und gleich gerichtet sind. Die Punkte $\alpha_1'$, $\alpha_2'$ verbinden wir endlich durch einen Halbkreis $\omega_A$, der mit den Geraden $\alpha_1\alpha_1'$, $\alpha_2\alpha_2'$ in den Punkten $\alpha_1'$, $\alpha_2'$ keine Spitzen bildet. Ganz analog verfahren wir mit der Strecke $BB^*$, wobei die Bezeichnungen $\beta_1$, $\beta_1'$, $\beta_2$, $\beta_2'$, $\omega_B$ entsprechende Bedeutung haben. (Vgl. Fig. 5.)

Ersetzen wir nun im Weg $AW_1B\overline{W}_2A$ die Strecken $A_2'A_1'$, $B_1'B_2'$ resp. durch $A_2'\alpha_2\alpha_2'\omega_A\alpha_1'\alpha_1A_1'$, $B_1'\beta_1\beta_1'\omega_B\beta_2'\beta_2B_2'$, so bleibt

$D(AW_1B\overline{W}_2A)$ nach dem Lemma 4 von L. I unverändert. Sind etwa $\alpha_1^*$, $\alpha_2^*$, $\beta_1^*$, $\beta_2^*$ Mittelpunkte der Strecken $\alpha_1\alpha_1'$, $\alpha_2\alpha_2'$, $\beta_1\beta_1'$, $\beta_2\beta_2'$, so ist daher $D(AW_1B\overline{W}_2A)$ gleich der Summe der Tangentenrichtungszuwächse längs der Wege:

(I) $\alpha_2^*\alpha_2'\omega_A\alpha_1'\alpha_1^*$, (II) $\alpha_1^*\alpha_1A_1'W_1B_1'\beta_1\beta_1^*$,

(III) $\beta_1^*\beta_1'\omega_B\beta_2'\beta_2^*$, (IV) $\beta_2^*\beta_2B_2'\overline{W}_2A_2'\alpha_2\alpha_2^*$.

Nun sind die Tangentenrichtungszuwächse längs $\alpha_1^*\alpha_1A_1'$, $B_1'\beta_1\beta_1^*$ offenbar gleich denjenigen längs $A^*AA_1'$, bzw. $B_1'BB^*$ und daher der Tangentenrichtungszuwachs längs (II) gleich

$$S_{W_1}(\varrho_A, \varrho_B).$$

Ganz analog hat man für den Weg $\alpha_2^*\alpha_2A_2'W_2B_2'\beta_2\beta_2^*$ den Zuwachs $S_{W_2}(\varrho_A, \varrho_B)$, und daher ergibt sich für den Weg (IV) der Beitrag

$$-S_{W_2}(\varrho_A, \varrho_B).$$

Was nun den Tangentenrichtungszuwachs längs (I) anbetrifft, so ist sein absoluter Betrag gleich $\pi$, sein Vorzeichen aber ist positiv, wenn der Weg (I) den Punkt $A$ im positiven Sinne umkreist, d.h. wenn der Vektor $A^*A$ rechts von der gerichteten Strecke $A_2'A_1'$ liegt. In diesem Falle ist aber nach unserer Definition $(\varrho_A, A_2'A_1') = +1$, und der (I) entsprechende Beitrag zu $D$ gleich $\pi\,\varepsilon(\varrho_A, A_2'A_1')$. Im anderen Falle (vgl. Fig. 5) ist aber sowohl das Vorzeichen des entsprechenden Beitrags zu $D$ als auch das Vorzeichen von $\varepsilon(\varrho_A, A_2'A_1')$ entgegengesetzt, so daß auch dann der (I) entsprechende Beitrag gleich

$$\pi\,\varepsilon(\varrho_A, \overline{W}_2AW_1)$$

ist.

Für (III) endlich ergibt sich ganz analog

$$\pi\,\varepsilon(\overline{\varrho}_B, W_1B\overline{W}_2)$$

als Beitrag zu $D$, womit die Formel (2) bewiesen ist.

Insbesondere folgt, daß der Richtungszuwachs längs $W_1$ gleich dem Richtungszuwachs längs $W_2$ ist, wenn $W_1$ und $W_2$ zusammengenommen eine Jordankurve $C$ bilden und $\varrho_A$ aus dem Äußeren von $C$ ins Innere weist, $\varrho_B$ aber aus dem Inneren ins Äußere.

(Eingegangen den 2. Dezember 1933.)