COMPOSITIO MATHEMATICA

KEIZO ASANO
KENJIRO SHODA

Zur Theorie der Darstellungen einer endlichen Gruppe durch Kollineationen

Compositio Mathematica, tome 2 (1935), p. 230-240
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__230_0>

Zur Theorie der Darstellungen einer endlichen Gruppe durch Kollineationen

von

Keizo Asano und Kenjiro Shoda

Osaka (Japan)

In seinen grundlegenden Arbeiten [1]) hat I. Schur die Theorie der Darstellungen einer endlichen Gruppe durch Kollineationen entwickelt. Er hat nämlich die Theorie völlig auf die Frobeniussche Darstellungstheorie reduziert. Dabei hat er sich aber auf die Darstellungen in einem algebraisch-abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null beschränkt. Diese Einschränkung ist wesentlich, denn sonst gibt es im allgemeinen unendlich viele miteinander nicht äquivalente irreduzible Darstellungen durch Kollineationen.

In § 1 der vorliegenden Arbeit werden zwei Sätze von I. Schur, wie es uns scheint, einfacher bewiesen. Darananschließend untersuchen wir in § 2 und § 3 die Darstellungen durch Kollineationen in einem beliebigen Körper.

§ 1. *Zusammenfassung der Schurschen Theorie.*

Wir skizieren zunächst die grundlegenden Resultate von I. Schur. Es sei K ein beliebiger (kommutativer) Körper, $\mathfrak{H}$ eine endliche Gruppe von der Ordnung h, die aus den Elementen $H_1, H_2, \ldots, H_h$ besteht. Ein System $\{c_{P,Q}\}$ von h^2 Elementen aus K heißt ein Faktorensystem, wenn die h^3 Gleichungen

$$(1) \qquad c_{P,Q}\, c_{PQ,R} = c_{P,QR}\, c_{Q,R} \qquad (P, Q, R = H_1, H_2, \ldots, H_h)$$

bestehen. Zwei Faktorensysteme $\{c_{P,Q}\}$, $\{c'_{P,Q}\}$ heißen zueinan-

---

[1]) I. Schur, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen [Journal für Math. **127** (1904), 20—50]. Untersuchungen über die Darstellungen der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen [ebenda **132** (1907), 85—137]. Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen [ebenda **139** (1911), 155—250].

der assoziiert, wenn es ein System $\{k_P\}$ von h Elementen aus K gibt, das den Bedingungen

$$c'_{P,Q} = \frac{k_P k_Q}{k_{PQ}} c_{P,Q}$$

genügt.

Ist ein Faktorensystem $\{c_{P,Q}\}$ gegeben, so kann man ein hyperkomplexes System vom Rang h über K

$$(c, \mathfrak{H}) = K u_{H_1} + K u_{H_2} + \ldots + K u_{H_h}$$

bilden, mit der Kompositionsregel

$$u_P u_Q = c_{P,Q} u_{PQ}.$$

Denn die Gleichungen (1) bedeuten in der Tat gerade das Assoziativgesetz. Ist nun eine Darstellung von $(c, \mathfrak{H})$ durch Matrizen in K gegeben und entspricht dabei u_P eine Matrix U_P, so bilden die h Kollineationen mit den Koeffizientenmatrizen U_P eine Darstellung von $\mathfrak{H}$. Umgekehrt induziert jede Darstellung von $\mathfrak{H}$ durch Kollineationen eine Matrizendarstellung von $(c, \mathfrak{H})$ mit einem passend gewählten Faktorensystem $\{c_{P,Q}\}$. Zwei Faktorensysteme induzieren dann und nur dann dieselben Darstellungen durch Kollineationen, wenn sie assoziiert sind. Die Klassen assoziierter Faktorensysteme bilden mit der Multiplikation

$$\{c_{P,Q}\}\{c'_{P,Q}\} = \{c_{P,Q} c'_{P,Q}\}$$

eine abelsche Gruppe $\mathfrak{M}$, die wir nach I. Schur den Multiplikator von $\mathfrak{H}$ nennen. Der Multiplikator $\mathfrak{M}$ ist dann durch $\mathfrak{H}$ und K eindeutig bestimmt. Aus (1) folgt

$$c^h_{P,Q} = \frac{a_P a_Q}{a_{PQ}}, \quad a_P = \prod_R c_{P,R},$$

daher besitzt jede Klasse aus $\mathfrak{M}$ eine endliche Ordnung, die ein Teiler von h ist. Es sei e die Ordnung der $\{c_{P,Q}\}$ enthaltenden Klasse aus $\mathfrak{M}$, es sei also

$$c^e_{P,Q} = \frac{b_P b_Q}{b_{PQ}}.$$

Setzt man

$$d_{P,Q} = \frac{\beta_P \beta_Q}{\beta_{PQ}} c_{P,Q}, \quad \beta^e_P = b_P^{-1},$$

so sind $d_{P,Q}$ sämtlich e-te Einheitswurzeln. Wir sagen, solch Faktorensystem sei normiert. Ist K algebraisch-abgeschlossen, so enthält jede Klasse aus $\mathfrak{M}$ mindestens ein normiertes Faktorensystem. Daher ist die Ordnung von $\mathfrak{M}$ endlich.

Eine Erweiterung $\mathfrak{H}^*$ einer endlichen abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$ mit Hilfe von $\mathfrak{H}$ heißt nach I. Schur eine durch $\mathfrak{A}$ ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$, wenn $\mathfrak{A}$ im Zentrum von $\mathfrak{H}^*$ enthalten ist. Bedeuten $G_{H_1}, G_{H_2}, \ldots, G_{H_h}$ ein Repräsentantensystem der Restklassen von $\mathfrak{H}^*$ modulo $\mathfrak{A}$, so bestehen h^2 Relationen

$$G_P G_Q = A_{P,Q} G_{PQ}$$

mit $A_{P,Q}$ aus $\mathfrak{A}$. Es sei $\varDelta$ eine Darstellung von $\mathfrak{H}^*$ durch Matrizen, bei der jedem Element $A_{P,Q}$ eine Matrix $a_{P,Q}\, E$ entspricht, wo E die Einheitsmatrix bedeutet. Dann vermittelt $\varDelta$ eine Darstellung von $(a, \mathfrak{H})$, also eine Darstellung von $\mathfrak{H}$ durch Kollineationen. Wenn alle Darstellungen von $\mathfrak{H}$ durch Kollineationen durch die Darstellungen von $\mathfrak{H}^*$ induziert werden, so heißt solche Gruppe $\mathfrak{H}^*$ nach I. Schur eine hinreichend ergänzte Gruppe; eine hinreichend ergänzte Gruppe, deren Ordnung möglichst klein ist, heißt eine Darstellungsgruppe.

Wenn es unendlich viele Klassen assoziierter Faktorensysteme gibt, so gibt es natürlich keine hinreichend ergänzte Gruppe. Jedenfalls ist die Ordnung einer hinreichend ergänzten Gruppe nicht kleiner als mh, wo m die Ordnung des Multiplikators bedeutet.

I. *Ist K algebraisch-abgeschlossen, so besitzt jede endliche Gruppe $\mathfrak{H}$ von der Ordnung h eine Darstellungsgruppe von der Ordnung mh, wo m die Ordnung des Multiplikators $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{H}$ bedeutet.*

Für diesen Schurschen Fundamentalsatz werden wir einen neuen Beweis [2]) angeben. Es seien $\{c^{(1)}_{P,Q}\}, \{c^{(2)}_{P,Q}\}, \ldots, \{c^{(r)}_{P,Q}\}$ Repräsentanten der Basisklassen von $\mathfrak{M}$, deren Ordnungen bzw. $e_1, e_2, \ldots, e_r$ sind. Wir nehmen ferner an, daß $\{c^{(i)}_{P,Q}\}$ aus e_i-ten Einheitswurzeln besteht, also, daß $\{c^{(i)}_{P,Q}\}$ schon normiert ist. Bezeichnet man mit ϱ_i eine primitive e_i-te Einheitswurzel, so ist

$$c^{(i)}_{P,Q} = \varrho_i^{\alpha^{(i)}_{P,Q}},$$

wobei nach (1)

$$\alpha^{(i)}_{P,Q} + \alpha^{(i)}_{PQ,R} \equiv \alpha^{(i)}_{P,QR} + \alpha^{(i)}_{Q,R} \pmod{e_i} \tag{2}$$

---

[2]) Dieser Beweis sagt nichts über die Konstruktion der Darstellungsgruppe. Beim Beweis des Satzes hat I. Schur eine unendliche abelsche Gruppe mitbetrachtet. Der Schursche Beweis zeigt aber zugleich eine allgemeine Konstruktionsmethode der Darstellungsgruppe.

sind. Dann ist jedes Faktorensystem $\{c_{P,Q}\}$ zu einem von der Gestalt

$$(3)\qquad c_{P,Q} = \left(c^{(1)}_{P,Q}\right)^{x_1} \left(c^{(2)}_{P,Q}\right)^{x_2} \dots \left(c^{(r)}_{P,Q}\right)^{x_r} = \left(\varrho_1^{x_1}\right)^{\alpha^{(1)}_{P,Q}} \left(\varrho_2^{x_2}\right)^{\alpha^{(2)}_{P,Q}} \dots \left(\varrho_r^{x_r}\right)^{\alpha^{(r)}_{P,Q}}, \qquad 0 \leqq x_i \leqq e_i,$$

assoziiert.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine zu $\mathfrak{M}$ isomorphe Gruppe und A_i das $\{c^{(i)}_{P,Q}\}$ entsprechende Element aus $\mathfrak{A}$. Setzt man

$$(4)\qquad A_{P,Q} = A_1^{\alpha^{(1)}_{P,Q}} A_2^{\alpha^{(2)}_{P,Q}} \dots A_r^{\alpha^{(r)}_{P,Q}},$$

so ist wegen (2)

$$(5)\qquad A_{P,Q} A_{PQ,R} = A_{P,QR} A_{Q,R}.$$

Für jeden Charakter ψ von $\mathfrak{A}$ stimmt das Faktorensystem $\psi(A_{P,Q})$ mit einem der durch (3) gelieferten m Faktorensysteme überein. Denn es ist

$$\psi(A_{P,Q}) = \psi(A_1)^{\alpha^{(1)}_{P,Q}} \psi(A_2)^{\alpha^{(2)}_{P,Q}} \dots \psi(A_r)^{\alpha^{(r)}_{P,Q}},$$

und $\psi(A_i)$ ist eine e_i-te Einheitswurzel. Durchläuft ψ alle Charaktere von $\mathfrak{A}$, so ersieht man leicht, daß die m Faktorensysteme $\psi(A_{P,Q})$ mit den m Faktorensystemen (3) übereinstimmen.

Nun bilden wir eine Gruppe $\mathfrak{H}^*$ folgendermaßen: G_P soll für jedes P aus $\mathfrak{H}$ mit allen Elementen aus $\mathfrak{A}$ vertauschbar sein, und es werde festgesetzt, daß

$$G_P G_Q = A_{P,Q} G_{PQ}$$

ist. Setzen wir ferner das Assoziativgesetz zwischen A und G_P voraus, und nehmen wir an, daß das Einselement von $\mathfrak{A}$ auch das Einselement für jedes G_P ist, so bilden die mh Elemente AG_P eine durch $\mathfrak{A}$ ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$. Denn die Bedingungen (5) besagen gerade das Assoziativgesetz zwischen den G_P, und die anderen Gruppenpostulaten sind ersichtlich erfüllt. Diese Gruppe $\mathfrak{H}^*$ ist eine hinreichend ergänzte Gruppe, denn die m Faktorensysteme $\psi(A_{P,Q})$ enthalten alle zueinander nicht assoziierten Faktorensysteme. Da die Ordnung von $\mathfrak{H}^*$ gleich mh ist, so ist $\mathfrak{H}^*$ eine Darstellungsgruppe von $\mathfrak{H}$.

Dieser Satz gilt für einen nicht notwendig algebraisch-abgeschlossenen Körper K, wenn jedes Faktorensystem zu einem normierten Faktorensystem assoziiert ist. Im allgemeinen ist die Darstellungsgruppe nicht eindeutig bestimmt, aber jede Darstellungsgruppe $\mathfrak{H}$ wird nach I. Schur durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert:

1. $\mathfrak{H}^*$ enthält eine aus invarianten Elementen von $\mathfrak{H}^*$ bestehende Untergruppe $\mathfrak{A}$ derart, daß die Faktorgruppe $\mathfrak{H}^*/\mathfrak{A}$ der Gruppe $\mathfrak{H}$ isomorph ist.

2. Die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{H}^*$ enthält $\mathfrak{A}$.

3. Es gibt keine Gruppe, die die Eigenschaften 1, 2 besitzt, und deren Ordnung größer als die Ordnung von $\mathfrak{H}^*$ ist.

Wie wir schon im Beweis von I gesehen haben, kann man eine Darstellungsgruppe in einem algebraisch-abgeschlossenen Körper K durch ein System $\{c^{(1)}_{P,Q}\}$, $\{c^{(2)}_{P,Q}\}$, $\ldots$, $\{c^{(r)}_{P,Q}\}$ konstruieren. Indem wir $\{c^{(i)}_{P,Q}\}$ auf alle mögliche Weise durch ein ihm assoziiertes normiertes Faktorensystem ersetzen, können wir alle nicht isomorphen Darstellungsgruppen erhalten. Hieraus ist die obere Grenze der Anzahl der verschiedenen Darstellungsgruppen abzuleiten, die sich schon in der zweiten Arbeit a.a.O. von I. Schur findet.

Mit $\{c^{(i)}_{P,Q}\}$ bilden auch h^2 Elemente

$$\bar{c}_{P,Q} = \bar{c}^{(i)}_{P,Q} = \frac{\delta_P \delta_Q}{\delta_{PQ}} c^{(i)}_{P,Q}, \qquad \left(\frac{\delta_P \delta_Q}{\delta_{PQ}}\right)^{e_i} = 1,$$

ein ihm assoziiertes normiertes Faktorensystem. Bezeichnet man mit l_1 die Anzahl der verschiedenen Lösungen von $\dfrac{\delta_P \delta_Q}{\delta_{PQ}} = 1$, so ist die von $\left(\dfrac{\delta_P \delta_Q}{\delta_{PQ}}\right)^{e_i} = 1$ gleich $l_2 = l_1 e_i^h$, und die Anzahl solcher Faktorensysteme $\{\bar{c}_{P,Q}\}$ ist gleich $\dfrac{l_2}{l_1} = e_i^h$. Zwei Faktorensysteme $\{\bar{c}_{P,Q}\}$ und $\{\bar{c}'_{P,Q}\}$ führen zu isomorphen Darstellungsgruppen, wenn sie den Gleichungen

$$\bar{c}'_{P,Q} = \frac{\delta_P \delta_Q}{\delta_{PQ}} \bar{c}_{P,Q}, \qquad \delta_P = \varrho_i^{c_P},$$

genügen. Denn alsdann kann man

$$A_i^{\bar{\alpha}'_{P,Q}} = A_i^{c_P} A_i^{c_Q} A_i^{-c_{PQ}} A_i^{\bar{\alpha}_{P,Q}}$$

annehmen. D.h. man kann die Repräsentanten $\bar{G}'_P$ der Restklassen mod. $\mathfrak{A}$ so annehmen, daß

$$\bar{G}'_P \bar{G}'_Q = \bar{A}_{P,Q} \bar{G}'_{PQ}, \qquad \bar{A}_{P,Q} = \prod_i A_i^{\bar{\alpha}^{(i)}_{P,Q}}$$

wird. (Vgl. (4).)

Wir brauchen daher nur höchstens $\dfrac{e_i^h}{l}$ Faktorensysteme zu betrachten, wo l die Anzahl der verschiedenen Systeme $\left\{\dfrac{\delta_P \delta_Q}{\delta_{PQ}}\right\}$ mit $\delta_P^{e_i} = 1$ bedeutet. Bezeichnet man mit n_i die Anzahl der verschiedenen Lösungen von

$$\frac{\delta_P \delta_Q}{\delta_{PQ}} = 1, \qquad \delta_P^{e_i} = 1,$$

so ist $l = \frac{e_i^h}{n_i}$, also $\frac{e_i^h}{l} = n_i$. Es ist aber n_i nichts Anderes als die Anzahl der linearen Charaktere von $\mathfrak{H}$, welche aus e_i-ten Einheitswurzeln bestehen. Bezeichnet man das Invariantensystem der Faktorgruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{C}$ modulo der Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}$ mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s$, so ist ersichtlich

$$n_i = \prod_{j=1}^{s} (e_i, \varepsilon_j).$$

Also erhält man den folgenden Schurschen Satz:

II. *Die Anzahl der verschiedenen Darstellungsgruppen von $\mathfrak{H}$ ist höchstens gleich*

$$\prod_i n_i = \prod_{i,j} (e_i, \varepsilon_j),$$

wo $e_1, e_2, \ldots, e_r$ bzw. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s$ die Invarianten des Multiplikators bzw. der Faktorgruppe modulo der Kommutatorgruppe von $\mathfrak{H}$ bedeuten.

§ 2. *Körpertheoretische Untersuchungen der Faktorensysteme.*

Es sei K ein vollkommener Körper, Ω ein algebraisch-abgeschlossener Erweiterungskörper von K. Ist ein Faktorensystem $\{c_{P,Q}\}$ in K zu $\{1\}$ assoziiert in Ω:

$$k_P k_Q = c_{P,Q} k_{PQ},$$

so betrachte man den Erweiterungskörper $K = K(k_{H_1}, k_{H_2}, \ldots, k_{H_h})$. Geht man nun K^* zu einem konjugierten über, so ergibt sich

$$k'_P k'_Q = c_{P,Q} k'_{PQ}, \tag{6}$$

wo k'_P ein zu k_P konjugiertes Element bedeutet. Daher ist

$$\left(\frac{k_P}{k'_P}\right)\left(\frac{k_Q}{k'_Q}\right) = \left(\frac{k_{PQ}}{k'_{PQ}}\right).$$

D.h. das System von h Elementen $\left(\frac{k_P}{k'_P}\right)$ bildet einen linearen Charakter von $\mathfrak{H}$. Folglich ist

$$\left(\frac{k_P}{k'_P}\right) = \varrho_P, \tag{7}$$

wo ϱ_P eine Einheitzwurzel ist. Die galoissche Gruppe des K^*

umfassenden engsten galoisschen Erweiterungskörpers von K bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}$ und die Automorphismen aus $\mathfrak{G}$ mit $1, A, ---, B$. Dann lässt sich (7) in der Form

$$(8) \qquad k_P^{1-A} = \varrho_P(A)$$

darstellen. Ist nun $\varrho_P(A)$ für jedes A eine τ-te Einheitswurzel, so ist $(k_P^\tau)^{1-A} = 1$. Daher ist $k_P^\tau = a_P$ in K enthalten und folglich ist $k_P = a_P^{\frac{1}{\tau}}$.

Nach (6) kann man abgesehen von einem Faktor aus K annehmen, daß $k_P = k_Q$ ist, falls $P \equiv Q \pmod{\mathfrak{C}}$ ist, wo $\mathfrak{C}$ die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{H}$ bedeutet. Die Faktorensysteme, die in Ω zum Einssystem assoziiert sind, kann man folgendermaßen konstruieren. Es seien $\overline{T}_1, \overline{T}_2, ---, \overline{T}_n$ die Basiselemente der Faktorgruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{C}$, wo die Ordnung von $\overline{T}_i$ gleich ε_i ist. Wir nehmen dann n Elemente $a_1, a_2, ---, a_n$ aus K, und wir setzen für jedes Element P aus $\mathfrak{H}$

$$\psi(P) = a_1^{\frac{x_1}{\varepsilon_1}} a_2^{\frac{x_2}{\varepsilon_2}} --- a_n^{\frac{x_n}{\varepsilon_n}} \text{ für } P \text{ aus } \overline{T} = \overline{T}_1^{x_1} \overline{T}_2^{x_2} --- \overline{T}_n^{x_n}.$$

Dann ist das Faktorensystem $c_{P,Q} = \dfrac{\psi(P)\psi(Q)}{\psi(PQ)}$ in K enthalten. Es ist auch klar, daß man nach dieser Methode jedes Faktorensystem mit der oben genannten Eigenschaft konstruieren kann.

Enthält K die sämtlichen linearen Charaktere von $\mathfrak{H}$, so ist der Körper K^* nach (7) galoissch über K. Dann erhält man nach (8) eine eineindeutige Zuordnung zwischen der galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ und einem System der linearen Charaktere von $\mathfrak{H}$. Es ist aber

$$k_P^{1-AB} = k_P^{1-B+B-AB} = \varrho_P(B) k_P^{(1-A)B} = \varrho_P(B) \varrho_P(A).$$

Daher ist $\mathfrak{G}$ einer Gruppe $\mathfrak{G}_\chi$ der linearen Charaktere von $\mathfrak{H}$ isomorph. Die Gesamtheit der Elemente P aus $\mathfrak{H}$, die der Bedingung $\chi(P) = 1$ für jeden Charakter χ aus $\mathfrak{G}_\chi$ genügen, bildet einen Normalteiler $\mathfrak{N}$, der die Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{H}$ enthält. Die Faktorgruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{N}$ ist dann zu $\mathfrak{G}_\chi$, also zu $\mathfrak{G}$ isomorph. Es ist nach (8)

$$k_P^{1-A} = 1 \text{ für jedes } A \text{ aus } \mathfrak{G},$$

wenn P in $\mathfrak{N}$ liegt. Also ist k_P dann in K enthalten. Nach (6) kann man daher, abgesehen von einem Faktor aus K, annehmen, daß $k_P = k_Q$ ist, falls $P \equiv Q$ (mod. $\mathfrak{N}$) ist. Im allgemeinen kann man ferner, abgesehen von einem Faktor aus K, annehmen, daß

$$k_P = k_{S_1}^{\alpha_1} k_{S_2}^{\alpha_2} \ldots k_{S_r}^{\alpha_r}$$

ist, falls

$$P \equiv S_1^{\alpha_1} S_2^{\alpha_2} --- S_r^{\alpha_r} \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{N})$$

ist. Dabei bedeuten $S_1, S_2, ---, S_r$ Repräsentanten der Basisklassen von $\mathfrak{H}/\mathfrak{N}$. Da aber die galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ von K^* über K zur Faktorgruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{N}$ isomorph ist, so müssen die r Körper $K(k_{S_1}), K(k_{S_2}), ---, K(k_{S_r})$ unabhängig sein. Der Grad von $K(k_{S_i})$ über K ist gleich der Ordnung der S_i enthaltenden Restklasse aus $\mathfrak{H}/\mathfrak{N}$. Die obige Überlegung zeigt schon die charakteristische Eigenschaft der Klasse der in K assoziierten Faktorensysteme, die in Ω zur Einsklasse assoziiert sind.

Es sei nun $\varrho_{P,Q} = \chi(C_{P,Q})$ ein durch einen Charakter χ des Multiplikators definiertes Faktorensystem in Ω. Wir beweisen nun: Ist ein in K enthaltenes Faktorensystem $c_{P,Q}$ zu $\varrho_{P,Q}$ assoziiert in Ω, so ist $\varrho_{P,Q}$ in K enthalten. Es sei nämlich

$$c_{P,Q} = \frac{k_P k_Q}{k_{PQ}} \varrho_{P,Q}.$$

Wir betrachten dann den Körper $K(k_P, \varrho_{P,Q})$. Beim Übergang zu einem konjugierten Körper ergibt sich, da $c_{P,Q}$ in K liegt,

$$c_{P,Q} = \frac{k'_P k'_Q}{k'_{PQ}} \varrho'_{P,Q},$$

also ist $\dfrac{\varrho_{P,Q}}{\varrho'_{P,Q}}$ zum Einssystem assoziiert. Ersichtlich ist χ' auch ein Charakter und daher ist $\chi\chi'^{-1}(C_{P,Q})$ dann und nur dann zum Einssystem assoziiert, wenn $\chi\chi'^{-1}$ Hauptcharakter ist. Bei unserem Fall ist also $\varrho_{P,Q} = \varrho'_{P,Q}$, d.h. $\varrho_{P,Q}$ ist in K enthalten.

Sind zwei Faktorensysteme $\{c_{P,Q}\}$, $\{c'_{P,Q}\}$ assoziiert in Ω, so ist $\{c'_{P,Q} c_{P,Q}^{-1}\}$ zum Einssystem assoziiert. Da jedes Faktorensystem einem normierten assoziiert in Ω ist, so genügt es bei der Konstruktion der in K enthaltenen Faktorensysteme, nur die in K enthaltenen Charaktere des Multiplikators und die Elementensysteme $\{k_P\}$ mit der obigen Eigenschaft zu betrachten.

Aus der obigen Überlegung folgt unmittelbar

III. *Damit jedes Faktorensystem einem normierten assoziiert sei, also damit der Multiplikator in K mit einer Untergruppe des Multiplikators in Ω isomorph sei, ist notwendig und hinreichend, daß der Grad jedes Wurzelkörpers über K zum Index der Kommutatorgruppe teilerfremd ist.*

Insbesondere gilt

III′. *Der Multiplikator in K ist mit einer Untergruppe des Multiplikators in Ω isomorph, wenn die Kommutatorgruppe mit der ganzen Gruppe übereinstimmt.*

§ 3. *Konstruktion der Darstellungen.*

Wir nehmen jetzt an, daß die Charakteristik von K Null oder eine zu h teilerfremde Primzahl ist.

Es sei $(\mathfrak{H})$ eine in K irreduzible Darstellung eines hyperkomplexen Systems $(c, \mathfrak{H})$, (K^*) eine in K irreduzible Darstellung eines in § 2 konstruierten Erweiterungskörper K^*. Dem Element k_P bzw. u_P entspreche dabei die Matrix (k_P) bzw. (u_P). Die Kroneckerschen Produkte $(k_P) \times (u_P)$ bilden dann eine Darstellung von $(c', \mathfrak{H})$ in K, wobei

$$c'_{P,Q} = \frac{k_P k_Q}{k_{PQ}} c_{P,Q}$$

ist. Der Charakter der jetzt konstruierten Darstellung ist das Produkt der Charaktere von (k_P) und (u_P). Die Darstellungen von $(c', \mathfrak{H})$ in Ω sind wesentlich mit den von $(c, \mathfrak{H})$ identisch. Daher ist jede Darstellung von $(c', \mathfrak{H})$ in K vollständig reduzibel. Jede in Ω irreduzible Darstellung von $(c', \mathfrak{H})$ ist ersichtlich in einer oben konstruierten Darstellung enthalten. Daher kann man auch jede in K irreduzible Darstellung von $(c', \mathfrak{H})$ als einen Bestandteil erhalten [3]). Nach dieser Methode kann man daher jede in K irreduzible Darstellung von $(c', \mathfrak{H})$, also eine beliebige in K irreduzible Darstellung von $\mathfrak{H}$ durch Kollineationen aus einer in K irreduziblen Darstellung der Darstellungsgruppe für Ω ableiten [4]).

Der Einfachheit halber beschränken wir uns im folgenden auf den Fall, daß K die sämtlichen einfachen Charaktere der Darstellungsgruppe für Ω enthält. Ist das Faktorensystem $\{c_{P,Q}\}$ normiert, d. h. induziert $(\mathfrak{H})$ eine Darstellung der Darstellungsgruppe für Ω, so zerfällt $(\mathfrak{H})$ bekanntlich in miteinander äquivalente irreduzible Bestandteile in Ω, da K den einfachen Charakter enthält. Die Anzahl der absolut irreduziblen Bestandteile ist gleich dem Index des Charakters. Die Darstellung $(k_P) \times (u_P)$ zerfällt in K^* in die zu $k_P(u_P)$ algebraisch konjugierten Bestandteile.

---

[3]) I. Schur, Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen linearer Substitutionen [Sitzungsberichte Akad. Berlin **1906**, 164—184].

[4]) Diese Bedingung kann man nach III noch verschärfen.

Wir gebrauchen nun folgende Bezeichnungen.

ψ: der Charakter von (u_P); χ: der einfache Charakter von (u_P); α: der Index des Charakters χ; β: der Index des Charakters $k_P\chi(P)$; K': der durch Adjunktion aller Charaktere $k_P\chi(P)$ entstehende Erweiterungskörper von K; d^*: der Grad von K^* über K'.

Dann entsteht K' durch Adjunktion aller Elemente k_P mit $\chi(P) \neq 0$ aus K. Die Anzahl der algebraisch konjugierten Charaktere von $k_P\chi(P)$ ist gleich dem Grad von K' über K. Daher ist der Charakter von $(k_P) \times (u_P)$ gleich

$$\psi(P)\sum_A k_P^A = \alpha\chi(P)\sum_A k_P^A = \alpha d^*\chi(P)\sum_B k_P^B, \tag{9}$$

wo A bzw. B die galoissche Gruppe von K^* bzw. K' über K durchläuft. Der Charakter einer in K irreduziblen Darstellung von $(c, \mathfrak{H})$ hat die Gestalt $\beta\sum_B k_P^B\chi(P)$, wenn er den einfachen Charakter $k_P\chi(P)$ enthält.

IV. *Die Darstellung* $(k_P) \times (u_P)$ *zerfällt in genau* $\frac{\alpha d^*}{\beta}$ *miteinander äquivalente irreduzible Bestandteile* [4]).

Aus (9) folgt nach (8)

$$\psi(P)\sum_A k_P^A = \alpha k_P\chi(P)\sum_A \varrho_P(A),$$

wo $\varrho_P(A)$ ein linearer Charakter der in § 2 konstruierten Faktorgruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{N}$ ist. Wir können das System aller einfachen Charaktere der Darstellungsgruppe $\mathfrak{H}^*$ von $\mathfrak{H}$ in Klassen einteilen, indem wir je zwei Charaktere in einer Klasse vereinigen, wenn der Quotient ein linearer Charakter von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ist. Die Klassenanzahl bezeichnen wir mit $\gamma(k)$. Dann gilt

V. *Ist ein Elementensystem mit der in § 2 genannten Eigenschaft gegeben, so kann man genau* $\gamma(k)$ *verschiedene in* K *irreduzible Darstellungen durch Kollineationen aus der in* K *irreduziblen Darstellungen der Darstellungsgruppe ableiten.*

Eine in K irreduzible Darstellung der Darstellungsgruppe $\mathfrak{H}^*$ definiert ein Faktorensystem $c_{P,Q} = \varphi(C_{P,Q})$, wo φ einen linearen Charakter des Multiplikators bedeutet. Stellt man den durch φ induzierten Charakter χ_φ als Summe einfacher Charaktere dar, so definieren die vorkommenden einfachen Charaktere und nur diese das Faktorensystem $\{c_{P,Q}\}$ [5]). Bezeichnet man die Anzahl der Klassen in V, die solche einfache Charaktere enthalten, mit $\delta(c, k)$, so gilt

---

[5]) G. Frobenius, Über die Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppe [Sitzungsberichte Akad. Berlin 1898, 501—515].

VI. *Es gibt* $\delta(c, k)$ *verschiedene in* K *irreduzible Darstellungen von* $(c', \mathfrak{H})$, *wenn* $c'_{P,Q} = \dfrac{k_P k_Q}{k_{PQ}} c_{P,Q}$ *ist.*

Hier haben wir eine Methode zur Konstruktion aller Darstellungen durch Kollineationen angegeben unter der Voraussetzung, daß die sämtlichen irreduziblen Darstellungen einer Darstellungsgruppe bekannt sind. Nach dieser Methode kann man nach dem Beweis von II aus den Darstellungen einer Darstellungsgruppe die Darstellungen einer anderen Darstellungsgruppe ableiten. Enthält K eine primitive mh-te Einheitswurzel, so sieht man leicht, daß jede Darstellungsgruppe dieselben Darstellungen durch Kollineationen vermittelt.

(Eingegangen den 11. April 1934.)