COMPOSITIO MATHEMATICA

ALEXANDER OSTROWSKI

Beiträge zur Topologie der orientierten Linienelemente I. Über eine topologische Verschärfung des Rolleschen Satzes

Compositio Mathematica, tome 2 (1935), p. 26-49

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__26_0>

Beiträge zur Topologie der orientierten Linienelemente I

Über eine topologische Verschärfung des Rolleschen Satzes

von

Alexander Ostrowski

Basel

Wird bei einer mit stetiger Tangente versehenen Jordankurve die Richtung der Tangente mit einer festen Nullrichtung stetig längs der Kurve fortgesetzt, so wird man zwangsläufig darauf geführt, die Richtungen zweier Tangenten, deren Winkel mit der Nullrichtung sich um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden, als *verschieden* anzusehen. Wir werden in einem solchen Falle von *analytischen Richtungen* sprechen, während analytische Richtungen, deren Winkel mit einer Nullrichtung sich um ganzzahlige Vielfache von 2π unterscheiden, nach der im Folgenden benutzten Ausdrucksweise als *geometrisch* gleich oder parallel bezeichnet und als dieselbe *geometrische Richtung* definierend angesehen werden sollen. Ein in diesen Zusammenhang gehörender, des öfteren formulierter Satz besagt, daß beim Umlauf längs einer einfachen geschlossenen Kurve der Tangentenrichtungszuwachs gleich $\pm 2\pi$ ist [1]). Wir werden im Folgenden diesen Satz als den *Umlaufssatz* bezeichnen.

Das Hauptziel der vorliegenden Mitteilung ist nun der Beweis der Tatsache, daß der Rollesche Satz — über die Existenz einer Tangente an einen Kurvenbogen, die zu der diesen Bogen spannenden Sehne parallel ist — auch dann richtig bleibt, wenn es sich um *analytische Richtungen* handelt. (Der *Sehnenrichtungssatz*). Die übliche Formulierung des Rolleschen Satzes liefert

---

[1]) Vgl. E. Study, Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche, Vorl. über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, Heft II [Leipzig 1913, S. 88]. Allerdings darf der Satz wohl nur für konvexe Kurven als selbstverständlich angesehen werden. Differentialgeometrisch betrachtet stellt der Umlaufssatz eine Spezialisierung der Gauß-Bonnetschen Integralformel auf den Fall der euklidischen Ebene dar. Vgl. hierzu Bieberbach, Differentialgeometrie (Leipzig 1932), 92 ff.

nicht einmal die entsprechende Aussage für geometrische Richtungen, da es sich dabei um die Parallelität von nicht orientierten Geraden handelt, so daß dabei alle Richtungen nur mod π zu nehmen sind.

Dieser Satz ist von Bedeutung bei der Untersuchung der analytischen Fortsetzung gewisser Taylorscher und Dirichletscher Reihen vermittelst geeigneter Integraldarstellungen, auf die in einer anderen Veröffentlichung eingegangen werden soll.

Der Weg, auf dem wir den Sehnenrichtungssatz beweisen, nämlich die Reduktion auf den Fall eines polygonalen Weges, macht es notwendig, die stetige Fortsetzung von Tangentenrichtungen längs einer Kurve auch auf den Fall des Durchgangs durch Ecken und Spitzen zu verallgemeinern. Die Festsetzungen, durch die dies geschieht, laufen im Effekt darauf hinaus, daß die Ecken und Spitzen durch hinreichend kleine Kreisbögen abgerundet werden. Die auf diese Weise zunächst erfaßte Mannigfaltigkeit von Kurven besteht aus Wegen mit stückweise stetiger Tangente.

Andererseits beruht unser Beweis des Sehnenrichtungssatzes auf dem Umlaufssatz, den wir allerdings eigentlich nur für polygonale Wege zu benutzen haben. Und in diesem Falle ist der Beweis des Umlaufssatzes fast unmittelbar zu erbringen. Für den Fall der stückweise stetigen Tangente dagegen findet sich in der Literatur kein Beweis des Umlaufssatzes. Der einzige uns bekannte in allen Details ausgeführte Beweis dieses Satzes, derjenige von Herrn J. Radon [2]), geht von der Annahme aus, daß sich der Tangentenwinkel längs der Kurve als eine Funktion von beschränkter Variation in Abhängigkeit von der Bogenlänge definieren läßt, ein Fall, der offenbar auch denjenigen einer durchweg stetigen Tangente nicht mitumfaßt [3]). Um daher

---

[2]) Vgl. J. Radon, Über die Randwertaufgaben beim logarithmischen Potential [Sitz.-Ber. d. Wiener Akademie Abt. II*a*, **128** (1919), 1133].

[3]) In diesem letzteren Fall folgt allerdings der Umlaufssatz unmittelbar aus einem wichtigen funktiontheoretischen Satz von E. Lindelöf: *Bildet man das Innere der betrachteten Jordankurve mit durchweg stetiger Tangente auf das Innere des Einheitskreises der z-Ebene vermittels der analytischen Funktion* $w = f(z)$ *ab, so existiert,* $z = re^{i\vartheta}$ *gesetzt,*

$$\lim_{r \uparrow 1} \arg f(z) = A(\vartheta)$$

und ist stetig auf dem Einheitskreis. Denn die Tangente an die betrachtete Kurve bildet bei geeigneter Normierung mit der positiven reellen Achse den Winkel

$$A(\vartheta) + \vartheta + \frac{\pi}{2},$$

woraus, da $A(\vartheta)$ stetig und eindeutig auf dem Einheitskreis ist, der Umlaufssatz unmittelbar folgt.

möglichst allgemeine Annahmen über die Kurve zugrunde zu legen, haben wir im Folgenden vorausgesetzt, daß die Tangentenrichtungsfunktion bei geeigneter Normierung in jedem Punkte Grenzwerte von rechts und links besitzt, mit anderen Worten, nur Unstetigkeiten erster Art aufweist. Unter dieser allgemeinen Annahme wird im Folgenden sowohl der Sehnenrichtungssatz als auch der Umlaufssatz bewiesen, wobei also in der hier bewiesenen Fassung des Umlaufssatzes auch die Formulierung von Herrn Radon enthalten ist.

Über die Anordnung der Darstellung sei Folgendes gesagt. Wir bringen in den ersten sechs Nummern die einleitenden Definitionen und Festsetzungen, zeigen in Nr. **7**, wie man den allgemeinen Fall auf den Fall der Kurven ohne Spitzen zurückführen kann, und beweisen sodann in Nr. **8** einen wichtigen Hilfssatz (Lemma 2) über die Möglichkeit, die betrachteten Kurven durch Sehnenpolygone zu ersetzen. In den Nummern **12** und **13** wird nun der Einfluß des Uebergangs zu den Polygonen auf die Drehung der Tangenten und Sehnen diskutiert, nachdem in Nr. **9** ein hierzu benötigter Spezialfall des Sehnenrichtungssatzes bewiesen worden ist. Zugleich zeigen wir die Zulässigkeit verschiedener weiterer Annahmen über die betrachteten Kurven beim Beweis des Umlaufssatzes und des Sehnenrichtungssatzes, deren vollständige Formulierung man in den Nummern **10**, **11** findet. Nachdem in Nr. **14** der Beweis des Umlaufssatzes erbracht worden ist, besprechen wir nun in Nr. **15** einen Hilfssatz über die Sehnenreduktion, der aus dem Umlaufssatz leicht folgt, und dessen Bedeutung darin besteht, daß er gewissermaßen die Zulässigkeit gewisser Deformationen an der betrachteten Kurve feststellt. Mit Hilfe dieses Hilfssatzes ist nun (in Nr. **16**) der Beweis des Sehnenrichtungssatzes unschwer zu erbringen.

1. *Festsetzungen über geometrische und analytische Richtungen.*

Wird eine feste Richtung als Nullrichtung [4]) zugrunde gelegt, so kann dann bekanntlich jede Richtung in Bezug auf die Nullrichtung durch die Angabe ihres Winkels mit der Nullrichtung festgelegt werden, wobei dieser Winkel zunächst nur modulo 2π bestimmt ist. Im Folgenden wird oft zu unterscheiden sein zwischen den geometrisch festgelegten Richtungen und solchen,

---

[4]) Wir werden im Folgenden oft die Ebene als die Ebene der komplexen Zahlen auffassen. Dann ist die Nullrichtung stets die Richtung der positiven reellen Achse.

bei denen der Winkel nicht nur modulo 2π, sondern *genau* festzulegen ist. Wir werden demnach im ersten Falle von *geometrischen*, im zweiten von *analytischen Richtungen* sprechen.

Wir werden ferner zwei analytische Richtungen als *benachbart* oder *zueinander passend* bezeichnen, wenn die Differenz der entsprechenden Winkel absolut genommen kleiner als π ist. Ist eine analytische Richtung ϱ zu einer Geraden g nicht parallel, so gibt es zwei zu g parallele und zu ϱ passende analytische Richtungen. Wird eine solche Gerade g *orientiert*, so gibt es stets *eine einzige* zu g parallele und zu ϱ passende analytische Richtung.

2. *Annahmen über die Kurve W.*

Es sei W ein einfacher rektifizierbarer Weg endlicher Länge S. Auf W sei ein bestimmter Durchlaufungssinn festgesetzt. Der Anfangspunkt von W sei mit A, der Endpunkt mit B bezeichnet. Auf diesen Durchlaufungssinn beziehen sich im Folgenden stets die Angaben über die Reihenfolge von Punkten auf W. Ebenso sollen die Tangenten auf W, wo sie existieren, stets mit der entsprechenden Richtung versehen werden. Wir setzen nichts darüber voraus, ob W offen oder geschlossen ist. Im zweiten Fall ist A mit B identisch.

Wird mit s die von A ab gezählte Bogenlänge von W bezeichnet, so sind die rechtwinkligen Koordinaten $x(s)$, $y(s)$ der Punkte von W bekanntlich fast überall differenzierbar und es gilt fast überall die Beziehung

$$x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1 \ .$$

Andererseits gilt offenbar für zwei beliebige Werte s_1, s_2 von s:

$$\text{(1)} \quad \begin{gathered} \sqrt{|x(s_2) - x(s_1)|^2 + |y(s_2) - y(s_1)|^2} \leqq |s_2 - s_1| \, , \\ |x(s_2) - x(s_1)| \leqq |s_2 - s_1| \, , \qquad |y(s_2) - y(s_1)| \leqq |s_2 - s_1| \, . \end{gathered}$$

Daher sind die Funktionen $x(s)$, $y(s)$ auf jeden Fall absolut stetig, und es gilt

$$\text{(2)} \quad \begin{aligned} x(s) - x(0) &= \int_0^s x'(s)\, ds = \int_0^s \cos \vartheta(s)\, ds \, , \\ y(s) - y(0) &= \int_0^s y'(s)\, ds = \int_0^s \sin \vartheta(s)\, ds \, , \end{aligned}$$

wo $\vartheta(s)$ eine (nur bis auf eine Nullmenge und nur mod 2π) durch die Bedingungen

$$\text{(3)} \qquad x'(s) = \cos \vartheta(s) \, , \qquad y'(s) = \sin \vartheta(s)$$

festgelegte Funktion ist.

Wir wollen nun voraussetzen, daß die Funktion $\vartheta(s)$ sich so bestimmen läßt, daß sie nur Unstetigkeiten erster Art besitzt, d.h. daß für jedes s die Grenzwerte

$$(4) \qquad \vartheta(s_0+0) = \lim_{s \downarrow s_0} \vartheta(s)\,, \qquad \vartheta(s_0-0) = \lim_{s \uparrow s_0} \vartheta(s)$$

bezw.

$$(5) \qquad \vartheta(0) = \lim_{s \downarrow 0} \vartheta(s)\,, \qquad \vartheta(S) = \lim_{s \uparrow S} \vartheta(s)$$

existieren (und endlich sind). Diese Bedingung ist insbesondere offenbar stets erfüllt, wenn W eine stückweise stetige Tangente hat, da dann $\vartheta(s)$ bei geeigneter Normierung nur endlich viele Sprünge hat, die den Ecken und Spitzen von W entsprechen.

3. *Definition und Grundeigenschaften der Tangentenrichtungsfunktion.*

Aus unseren Annahmen über $\vartheta(s)$ folgt, daß für jede positive Zahl d es auf W nur endlich viele Punkte geben kann, in denen

$$(6) \qquad |\vartheta(s+0) - \vartheta(s-0)| \geqq d$$

ist. In der Tat, sonst hätten solche Punkte s eine Häufungsstelle, es gäbe also ein s_0 derart, daß für eine unendliche gegen s_0 konvergierende Folge von Zahlen s_ν (6) erfüllt wäre. Man kann annehmen, daß alle diese s_ν größer oder alle kleiner als s_0 sind. Dann kann aber einer der Grenzwerte (4) nicht existieren. Daraus folgt insbesondere, daß die Anzahl der Unstetigkeiten von $\vartheta(s)$ höchstens abzählbar ist.

Aus der Existenz der Grenzwerte (4) und (5) folgt vermöge der Formeln (2), daß in jedem Punkte s_0 von W die beiden Grenztangenten vorhanden sind und, dem gewählten Umlaufsinn entsprechend orientiert, den durch die Winkel $\vartheta(s_0+0)$, $\vartheta(s_0-0)$ mit der Nullrichtung festgelegten Richtungen geometrisch parallel sind. Insbesondere fallen sie in jedem Stetigkeitspunkt von $\vartheta(s)$ miteinander zusammen.

Insbesondere besitzt dann $\vartheta(s)$ nur endlich viele Sprünge, die absolut $\geqq \pi$ sind. Ist nun etwa s_0 ein solcher Punkt, so kann man die Werte von $\vartheta(s)$ für $s > s_0$ um ein geeignetes Vielfaches von 2π derart abändern, daß der Sprung von $\vartheta(s)$ an der Stelle s_0 absolut $\leqq \pi$ wird. Wir denken uns nun diese Abänderung überall ausgeführt.

Den Werten s_0, für die $\vartheta(s)$ einen Sprung $\pm\,\pi$ besitzt, entsprechen Spitzen von W. In den Spitzen kann man durch Hinzufügung eines geeigneten Vielfachen von 2π erreichen, daß der

Sprung von $\vartheta(s)$ nach Belieben gleich $+\pi$ oder $-\pi$ wird. Wir wollen nun die Werte von $\vartheta(s)$ in den Spitzen nach der folgenden Vorschrift festlegen:

A. *Es sei P_0 eine Spitze, s_0 der zugehörige Wert s und es seien B_-, B_+ zwei an die Spitze anstoßende Stücke von W, B_- vor der Spitze, B_+ nach der Spitze, die, von P_0 abgesehen, keine Spitzen von W enthalten.* (Vgl. Figg. 1, 2). *Man verlängere nun B_- längs der Tangente t_- an B_- in P_0 und verkürze eventuell B_+ so, daß dieses Stück von W, von P_0 abgesehen, weder B_- noch t_- trifft. Der Sprung $\vartheta(s_0+0)-\vartheta(s_0-0)$ von $\vartheta(s)$ in P_0 soll nunmehr gleich $+\pi$ oder $-\pi$ sein, je nachdem ob B_+ nach links oder nach rechts liegt, wenn man B_- und t_- entsprechend der festgesetzten Richtung durchläuft.* — Mit anderen Worten, der Sprung $\vartheta(s_0+0)-\vartheta(s_0-0)$ soll gleich $+\pi$ oder $-\pi$ festgelegt werden, je nachdem „das Innere der Spitze" beim Durchgang durch die Spitze zur linken oder zur rechten Hand bleibt, oder, wie man auch sagen kann, je nachdem ob die Spitze nach rechts oder nach links, von der Durchlaufungsrichtung aus gesehen, weist.

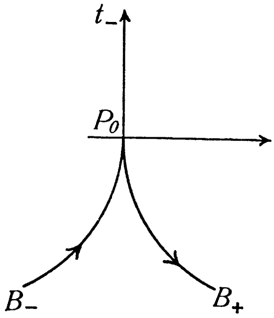

Fig. 1.

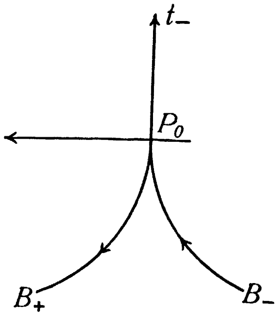

Fig. 2.

Die auf diese Weise aus $\vartheta(s)$ entstehende Funktion nennen wir nun eine *Tangentenrichtungsfunktion* von W. Sie soll als Funktion des allgemeinen Punktes P auf W mit $\Theta(P)$ bezeichnet werden. Ist $\Theta_0=\Theta(A)$ der Wert von $\Theta(P)$ im Anfangspunkte A, so erhalten wir offenbar durch Hinzufügung eines beliebigen ganzzahligen Vielfachen $2n\pi$ von 2π zu $\Theta(P)$ eine neue Tangentenrichtungsfunktion $\Theta(P)+2n\pi$ mit dem Anfangswert $\Theta_0+2n\pi$. Sobald aber der Anfangswert Θ_0 fixiert ist, ist auch die dazu gehörige Tangentenrichtungsfunktion eindeutig bestimmt.

$\Theta(P)$ hat nach dem Obigen neben der Eigenschaft A noch die drei folgenden wichtigen Eigenschaften.

B. *$\Theta(P)$ hat für jedes P sowohl „rechtsseitige" als auch „links-*

seitige" Grenzwerte. Diese Grenzwerte sollen mit $\Theta(P+0)$, $\Theta(P-0)$ *bezeichnet werden.*

Jeder Punkt P, $P \neq A$, $P \neq B$, in dem $\Theta(P)$ unstetig ist, soll als ein *singulärer Punkt* von W bezeichnet werden, und zwar als eine Ecke, wenn der zugehörige Sprung $\Theta(P+0)-\Theta(P-0)$ absolut $< \pi$ ist, während wir von einer Spitze sprechen, wenn dieser Sprung einen der Werte $\pm\pi$ hat. Unter $\Theta(A \pm 0)$ soll stets $\Theta(A)$, unter $\Theta(B \pm 0)$ stets $\Theta(B)$ verstanden werden, mag $A = B$ sein oder nicht.

C. *Es gibt höchstens abzählbar viele singuläre Punkte* P_1, P_2, ... *von* W, *und es gilt*

$$|\,\Theta(P_\nu + 0) - \Theta(P_\nu - 0)\,| \leqq \pi.$$

D. *In jedem Punkt* P *von* W *sind die Grenztangenten an* W, *entsprechend dem Durchlaufungssinn orientiert, zu den durch die Winkel* $\Theta(P-0)$, $\Theta(P+0)$ *mit der Anfangsrichtung festgelegten Richtungen geometrisch parallel, wenn* $P \neq A$, $P \neq B$ *ist.*

Offenbar ist $\Theta(P)$ durch die Bedingungen A, B, C, D — und den Anfangswert Θ_0 — eindeutig bestimmt.

Man kann den Inhalt der Vorschrift C für Ecken folgendermaßen geometrisch umschreiben:

C*. *Geht man beim festgelegten Durchlaufungssinn durch eine Ecke* P_0 *von* W *hindurch und ist* β *die Öffnung des in* P_0 *links von* W *liegenden Winkelraumes,* $0 < \beta < 2\pi$, *so ist der Zuwachs von* $\Theta(P)$ *beim Durchgang durch* P_0 *gleich*

$$\Theta(P_0 + 0) - \Theta(P_0 - 0) = \pi - \beta\,. \tag{7}$$

Es ergibt sich dies sofort durch Betrachtung der Figur 3 (S. 34). [9] Geht man vom Bogen C_- auf C_+ über, so ist dabei die Öffnung β der „nach links liegenden Ecke" kleiner als π und der Sprung von $\vartheta(s)$ ist gleich $\pi - \beta > 0$. Geht man aber von C_- auf C'_+ über, so ist die Öffnung β' der „nach links liegenden Ecke" $> \pi$ und der Sprung von $\vartheta(s)$ ist negativ und dem absoluten Betrage nach gleich $\beta' - \pi$, d.h. wiederum genau gleich $\pi - \beta'$.

Die Vorschriften A und C sind offenbar so festgelegt, daß der Zuwachs der Tangentenrichtungsfunktion beim Durchgang durch eine Ecke oder Spitze unverändert bleibt, wenn diese Ecke bzw. Spitze durch einen hinreichend kleinen Kreisbogen „abgerundet" wird.

4. *Grenztangenten und Stützen.*

Ist P eine Ecke von W, so passen die durch $\Theta(P+0)$, $\Theta(P-0)$

gegebenen analytischen Richtungen der beiden Grenztangenten in dieser Ecke im Sinne unserer Festsetzungen zueinander.

Legt man durch einen singulären Punkt P_0 einen Halbstrahl mit der analytischen Richtung

$$\frac{\Theta(P_0+0)+\Theta(P_0-0)}{2}, \tag{8}$$

so paßt seine Richtung offenbar zu den Richtungen der beiden Grenztangenten in P_0. Dieser Halbstrahl soll als die *Hauptstütze* an W in P_0 bezeichnet werden, und der Wert von $\Theta(P)$ in jedem singulären Punkt P_0 soll als (8) festgelegt werden. Vgl. Figg. 1, 2, wo die Hauptstützen eingezeichnet sind. Allgemeiner soll als eine *Stütze* an W in einer Ecke oder Spitze P eine gerichtete Strecke durch P bezeichnet werden, deren analytische Richtung dem Intervall zwischen $\Theta(P-0)$ und $\Theta(P+0)$ angehört.

$\Theta(B)-\Theta(A)$ bezeichnen wir als den *Tangentenrichtungszuwachs längs W*. Dieser Tangenrichtungszuwachs ändert sich offenbar nicht, wenn Θ_0 anders normiert wird.

Betrachten wir das kleinste Intervall, das sämtliche Werte von $\Theta(P)$ längs W enthält, so entspricht diesem Intervall ein Büschel von Richtungen, das wir als das *Tangentenrichtungsbüschel von W* bezeichnen, und wofür wir $S(W)$ schreiben werden. Das Tangentenrichtungsbüschel $S(W)$ wird durch die Richtungen der Tangenten und Stützen an W lückenlos erfüllt. $S(W)$ ist offenbar bei anderer Normierung von Θ_0 um das entsprechende ganzzahlige Vielfache von 2π um den Ursprung zu drehen. Θ_0 läßt sich stets so normieren, daß eine feste Tangente oder Stütze von W eine zu ihr parallele, im übrigen beliebige analytische Richtung besitzt.

Von einer Kurve W, für die die in No. 2 aufgeführten Annahmen zutreffen, werden wir sagen, *es lasse sich längs W eine Tangentenrichtungsfunktion definieren.* Im Folgenden werden diese Annahmen über W zugrunde gelegt, ohne daß sie jedesmal in den Formulierungen erwähnt werden. Falls gelegentlich über W mehr oder weniger vorausgesetzt wird, wird dies jedesmal ausdrücklich vermerkt werden.

5. *Sehnenrichtungsfunktion $\Theta(Q\,,\,P)$ von W.*

Es sei nun Q ein vom Endpunkt B verschiedener, im übrigen beliebiger Punkt von W. P möge die auf Q folgenden Punkte von W durchlaufen. Dann läßt sich eine Funktion $\Theta\,(Q\,,P)$ so definieren, daß sie die beiden folgenden Bedingungen erfüllt: a) $\Theta(Q,P)$

ist für festes Q stetig in P zwischen Q und B, wenn $\Theta(Q, Q) = \Theta(Q+0)$ festgesetzt wird. b) *Die von Q nach P gezogene Sehne von W bildet mit der Nullrichtung den Winkel $\Theta(Q, P)$.* — Wir bezeichnen $\Theta(Q, P)$ als *die Sehnenrichtungsfunktion von W.*

Unsere Funktion $\Theta(Q, P)$ legt also die analytische Richtung der Sehnen an W fest. Sie hängt aber natürlich von der Normierung der Anfangstangentenrichtung Θ_0 ab und ändert sich, wenn zu Θ_0 $2k\pi$ addiert wird, in gleicher Weise. Auch die Existenz von $\Theta(Q, P)$ ergibt sich sofort, wenn man das zwischen Q und B liegende Stück von W in so kleine Teilstücke zerlegt, daß beim Durchlaufen jedes dieser Teilstücke die maximale Richtungsschwankung des von Q ausgehenden Radiusvektors $< \frac{\pi}{2}$ bleibt.

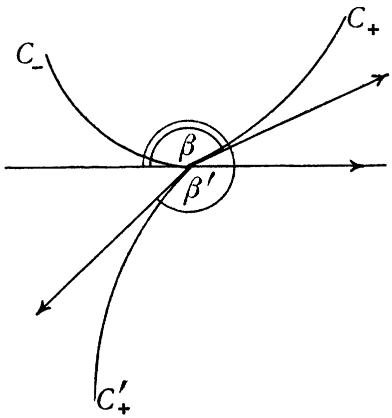

Fig. 3.

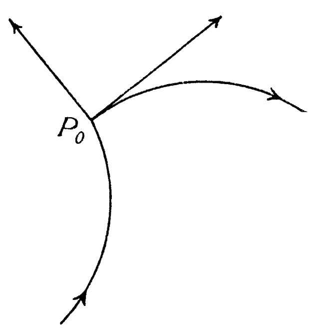

Fig. 4.

Jeder Wert von $\Theta(P)$, den $\Theta(P)$ in Stetigkeitspunkten annehmen kann, kommt auch unter den Werten von $\Theta(Q, P)$ vor. Ist dagegen P_0 ein Unstetigkeitspunkt von $\Theta(P)$, so kommt nach unserer Definition unter den Werten von $\Theta(Q, P)$ der Wert $\Theta(P_0 + 0)$ vor. Ebenso kommen dann, wie man sich leicht überlegt, alle Werte vor, die im engeren Sinne zwischen $\Theta(P_0 - 0)$ und $\Theta(P_0 + 0)$ liegen. Dagegen braucht $\Theta(P_0 - 0)$ im Wertevorrat von $\Theta(Q, P)$ nicht vorzukommen, wie man am Beispiel der obenstehenden Figur (vgl. Fig. 4) leicht einsieht.

6. *Die Ordnung eines Weges in Bezug auf einen Punkt.*

Ist Ω ein nicht auf W liegender Punkt und bildet der von Ω nach dem Punkte A von W führende Vektor mit der positiven reellen Achse einen Winkel α_0, so läßt sich eine weitere Funktion

$\alpha(P)$ definieren, die auf W stetig ist, für A den Wert $\alpha(A) = \alpha_0$ hat, und deren Wert für jeden Punkt P von W den Winkel liefert, den der von Ω nach dem Punkte P von W gezogene Vektor mit der Nullrichtung bildet. Die Differenz $\alpha(B) - \alpha(A)$ ist offenbar unabhängig von der Wahl der zugrunde gelegten Bestimmung von α_0. Sie hängt daher nur von W und vom Punkte Ω ab; wir bezeichnen sie als die *Ordnung des Weges W in Bezug auf den Punkt Ω.*

Ist insbesondere A mit B identisch und daher der Weg W eine einfache geschlossene Kurve, so ist bekanntlich die Ordnung von W in Bezug auf den Punkt Ω gleich 0, wenn Ω außerhalb W liegt; liegt aber Ω innerhalb von W, so ist diese Ordnung gleich $+2\pi$ oder -2π, je nachdem ob W in positiver oder in negativer Richtung in bezug auf das Innere durchlaufen wird.

7. *Das Abschneiden von Spitzen.*

Es sei P_0 eine Spitze von W, a_-P_0, P_0a_+ zwei an P_0 anstoßende Stücke von W, wobei a_- vor P_0 liegt, a_+ auf P_0 folgt und auf a_-P_0, P_0a_+ keine von P_0 verschiedene Spitze von W liegt. (Vgl. Fig. 5.) Zugleich seien a_-, a_+ so nahe an P_0 gewählt, daß $\Theta(P_0 - 0) - \Theta(P)$ längs a_-P_0 und $\Theta(P) - \Theta(P_0 + 0)$ längs P_0a_+ absolut genommen unterhalb $\frac{\pi}{4}$ bleiben. Es sei d die Distanz zwischen P_0 und der Menge der nach Weglassen von a_-P_0, P_0a_+ übrig bleibenden Punkte von W. Eine Parallele zur Hauptstütze an W in P_0, die im Abstand $\delta > 0$, $\delta < d$ auf jener Seite der Hauptstütze verläuft, auf der a_-P_0, P_0a_+ liegen, durchsetzt diese Bögen in je einem Punkt α_-, α_+.

Wir ersetzen nun das Stück $\alpha_-P_0\alpha_+$ von W durch die geradlinige Strecke $\alpha_-\alpha_+$ und bezeichnen den so aus W entstehenden Weg mit W^*, die zugehörige Tangentenrichtungsfunktion mit $\Theta^*(P)$.

Da die analytische Richtung der Hauptstütze in P_0 sich von $\Theta(P_0 - 0)$, $\Theta(P_0 + 0)$ um $\frac{\pi}{2}$ bzw. $-\frac{\pi}{2}$ unterscheidet, unterscheidet sich diese analytische Richtung von $\Theta(\alpha_-)$ und $\Theta(\alpha_+)$ absolut höchstens um $\frac{3\pi}{4}$. Daraus folgt, daß $\Theta^*(P)$ gleich $\Theta(P)$ auf $W - \alpha_-P_0 - P_0\alpha_+$ ist und im Inneren der Strecke $\alpha_-\alpha_+$ gleich $\frac{1}{2}(\Theta(P_0 - 0) + \Theta(P_0 + 0))$. Daher ist das Tangentenrichtungsbüschel $S(W^*)$ von W^* im Tangentenrichtungsbüschel $S(W)$ von W enthalten. Insbesondere ist der Tangentenrichtungszuwachs von a_- bis a_+ bei W^* der gleiche wie bei W — und man kann offenbar nunmehr a_-, a_+ beliebig nahe an α_-, α_+ heranschieben.

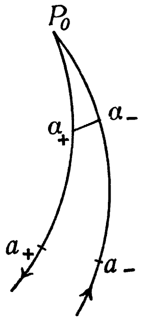

Fig. 5.

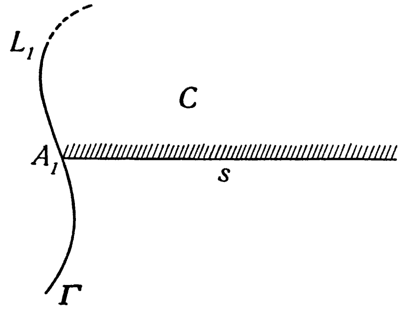

Fig. 6.

Es sei endlich Q_0 ein Punkt von W, der vor α_- (d.h. also zwischen A und α_-) liegt. Setzen wir die Sehnenrichtungsfunktion $\Theta^*(Q_0, P)$ längs der Strecke $\alpha_-\alpha_+$ fort, so gelangen wir nach α_+ mit dem Wert, den dort die Sehnenrichtungsfunktion $\Theta\,(Q_0, P)$ besitzt, da die Ordnung des Jordanbogens $\alpha_-P_0\alpha_+$ in Bezug auf Q_0 gleich der Ordnung der geradlinigen Strecke $\alpha_-\alpha_+$ in Bezug auf Q_0 ist. Es folgt dies daraus, daß der Punkt Q_0 außerhalb der geschlossenen Jordankurve $\alpha_-P_0\alpha_+\alpha_-$ liegt — seine Distanz von P_0 ist ja $> \delta$ — so daß die Ordnung dieser Jordankurve in Bezug auf Q_0 verschwindet. Wir sehen, daß $\Theta^*(Q_0, P)$ gleich $\Theta\,(Q_0, P)$ ist für alle Punkte P, die auf Q_0 folgen und W und W^* gemeinsam sind.

Die gleiche Operation kann sukzessive an allen Spitzen vorgenommen werden und man sieht:

Lemma 1. *W kann durch geeignete Deformation in beliebig kleiner Umgebung jeder Spitze in einen Weg W^* mit folgenden Eigenschaften übergeführt werden:* 1) *W^* besitzt keine Spitzen;* 2) *das Tangentenrichtungsbüschel von W^* ist in demjenigen von W enthalten;* 3) *die Sehnenrichtungsfunktion $\Theta^*(Q_0, P)$ von W^* stimmt mit derjenigen von W überein, wenn Q_0, P den beiden Wegen W^* und W gemeinsam sind und dasselbe auch noch für eine beliebig kleine Umgebung von Q_0 auf W gilt;* 4) *für zwei beliebige Punkte P_1 und P_2, die W und W^* gemeinsam und auf keinem der beiden Wege singulär sind, gilt für die Tangentenrichtungsfunktion $\Theta^*(P)$ von W^**

$$\Theta^*(P_2) - \Theta^*(P_1) = \Theta(P_2) - \Theta(P_1)\,. \tag{9}$$

8. *Ein Hilfssatz über zu W äquivalente Sehnenpolygone.*

Wir beweisen nun das für alles folgende fundamentale

Lemma 2. *Es besitze W keine Spitzen, und es möge, wenn W*

geschlossen ist, auch im Punkte $A = B$ keine Spitze vorliegen. Auf W lassen sich dann endlich viele, im festgelegten Fortschreitungssinn aufeinanderfolgende Teilpunkte $P_0 = A$, P_1, ..., P_{n-1}, $P_n = B$ mit den folgenden Eigenschaften angeben:

a) *Sie zerlegen W in Teilbögen $\Gamma_\nu = P_{\nu-1}P_\nu$, derart, daß wenn die zu Γ_ν gehörende Sehne mit s_ν bezeichnet wird, aus W wiederum eine einfache Kurve entsteht, wenn beliebig viele Γ_ν durch entsprechende Sehnen s_ν ersetzt werden.*

b) *Für kein μ sind innerhalb und auf dem Rande der endlichen, von Γ_μ und s_μ begrenzten Bereiche Punkte der von Γ_μ bzw. s_μ verschiedenen Γ_ν und s_ν enthalten, eventuell von den Punkten $P_{\mu-1}$, P_μ abgesehen.*

c) *Die Punktfolge P_0, P_1, ..., P_n behält ihre Eigenschaften bei, wenn sie durch Einfügung neuer Teilpunkte in endlicher Anzahl beliebig erweitert wird.*

Beweis. Wir markieren zunächst auf W alle Punkte V', in denen

$$| \Theta(V' + 0) - \Theta(V' - 0) | \geqq \frac{\pi}{2}$$

gilt. In jedem dieser Punkte bestimmen wir den absolut kleinsten der vier Winkel, die von den beiden Grenztangenten in diesem Punkt und ihren Verlängerungen gebildet werden, und bezeichnen die kleinste unter den so gefundenen positiven Zahlen mit γ_1. Gibt es kein V', so sei $\gamma_1 = \frac{\pi}{4}$. Falls $A = B$ ist und die (gerichteten) Tangenten in A und B nicht ineinander fallen, betrachten wir ebenso den absolut kleinsten der vier von den Tangenten in A und B und ihren Verlängerungen gebildeten Winkel und bezeichnen seine absolute Größe mit γ_2 und die kleinere der Zahlen γ_1, γ_2 mit γ_3. Sonst setzen wir $\gamma_3 = \gamma_1$. Es sei nun $\gamma = \frac{1}{4} \min\left(\frac{\pi}{4}, \gamma_3\right)$.

Wir betrachten nun auf W alle Punkte P, in denen

$$| \Theta(P + 0) - \Theta(P - 0) | \geqq \frac{\gamma}{2}$$

ist, nehmen dazu A und B und bezeichnen sie in der dem gewählten Durchlaufungssinn entsprechenden Reihenfolge mit

$$V_0 = A, \ V_1, \ \ldots, \ V_{k-1}, \ V_k = B .$$

Wir behaupten nun, daß *jedes Stück $V_{\mu-1}V_\mu$ von W sich in endlich viele Teilbögen derart zerlegen läßt, daß auf jedem dieser Bögen die Schwankung von $\Theta(P)$ im Innern $\leqq \gamma$ bleibt.*

Denn wäre dies nicht der Fall, so gäbe es auf einem solchen Bogen eine Folge von Punktepaaren P_ν, P'_ν derart, daß die Entfernung zwischen P_ν und P'_ν auf W mit $\nu \to \infty$ gegen 0 konvergiert, während zugleich

$$(10) \qquad |\,\Theta(P'_\nu) - \Theta(P_\nu)\,| > \gamma$$

wäre. Man kann dann weiter voraussetzen, daß diese Punktepaare gegen einen Punkt P_0 auf dem Bogen $\overline{V_{\mu-1}V_\mu}$ konvergieren. P_0 kann aber dann weder mit $V_{\mu-1}$ noch mit V_μ identisch sein, da sonst $\Theta(P'_\nu)$ und $\Theta(P_\nu)$ gegen $\Theta(V_{\mu-1}+0)$ oder $\Theta(V_\mu-0)$ konvergieren müßten in Widerspruch zu (10). Wenn aber P_0 im Innern des Bogens $\overline{V_{\mu-1}V_\mu}$ liegt, so kann die Menge der Zahlen $\Theta(P'_\nu)$, $\Theta(P_\nu)$ keine anderen Häufungsstellen besitzen, als die drei Zahlen

$$\Theta(P_0-0), \quad \Theta(P_0+0), \quad \Theta(P_0) = \frac{\Theta(P_0-0)+\Theta(P_0+0)}{2}.$$

Da aber die Differenzen dieser Zahlen durchweg $< \frac{\gamma}{2}$ sind, ist auch dies unmöglich. —

Wir unterteilen nun jeden der Bogen $\overline{V_{\mu-1}V_\mu}$ mit Hilfe weiterer Teilpunkte derart, daß die Schwankung von $\Theta(P)$ im Innern jedes der entstehenden Teilbogen $\leqq \gamma$ bleibt, und bezeichnen die entstehenden Teilpunkte zusammen mit $V_0, \ldots, V_k$ in der dem Durchlaufungssinn entsprechenden Reihenfolge mit $U_0 = A$, U_1, $\ldots$, $U_m = B$. Zugleich darf vorausgesetzt werden, daß $m > 3$ ist.

Wir bezeichnen allgemein das zwischen U_ν und $U_{\nu+1}$ enthaltene Teilstück von W mit T_ν. Dabei ist im Falle einer geschlossenen Kurve, d.h. $A=B$, $T_m = T_0$ und $T_{-1} = T_{m-1}$ zu setzen. Ist aber W nicht geschlossen, so ist unter T_m bzw. T_{-1} jedesmal die leere Menge zu verstehen.

Entfernt man nun aus W jeweils drei aufeinander folgende Teilstücke $T_{\nu-1}$, T_ν, $T_{\nu+1}$, so sei die Distanz des dadurch entstehenden „Restes" vom Teilstück T_ν gleich δ_ν, und die kleinste unter den Zahlen δ_ν sei mit δ bezeichnet. Nunmehr verfeinere man unsere Einteilung von W durch Einschaltung neuer Teilpunkte, bis die Länge der zwischen zwei aufeinanderfolgenden Teilpunkten liegenden Stücke von W kleiner als $\frac{\delta}{4}$ ist. Diese Teilstücke mögen in der entsprechenden Reihenfolge mit $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ bezeichnet werden und ihre Anfangspunkte mit $A = P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$. B soll dann mit P_n bezeichnet werden, und Γ_n ist leer, wenn $A \neq B$ ist. Wir behaupten nun, daß *unsere Zerlegung die verlangten Eigenschaften besitzt.* Es genügt zu zeigen, daß für $\nu \lessgtr \mu$ s_ν weder mit s_μ noch mit Γ_μ Punkte gemeinsam hat — bis auf den gemeinsamen Teilpunkt, falls Γ_ν direkt an Γ_μ anstößt.

Zunächst ist offenbar auch die Länge jeder der Sehnen s_ν kleiner als $\frac{\delta}{4}$. Es habe nun für $\nu \neq \mu$ s_ν mit s_μ oder Γ_ν Punkte gemeinsam. Dann muß auch die Distanz von Γ_ν bis Γ_μ höchstens gleich $\frac{\delta}{2}$ sein. Daher müssen Γ_ν und Γ_μ entweder einem und demselben der Teilstücke T oder zwei benachbarten T angehören.

Man sieht nun leicht, daß sich aus unseren Annahmen die folgende Tatsache ergibt: *Legt man in einem der Punkte $P_\varkappa$ die Normale N an die Hauptstütze an W in $P_\varkappa$ bzw., wenn $P_\varkappa = A = B$ ist, die Winkelhalbierende der inneren Ecke von W in $A = B$, so trifft jeder der $P_\varkappa$ enthaltenden Teilbögen T die Gerade N nur in $P_\varkappa$.* Denn wenn T die Gerade N noch in einem weiteren Punkte P' schneidet, gibt es in einem Punkte P^* zwischen $P_\varkappa$ und P' eine zu N parallele Stütze. Es möge nun etwa P^* auf $P_\varkappa$ folgen. Nun ist der Winkel zwischen N und der entsprechenden Grenztangente in $P_\varkappa \geqq 2\gamma$. Daher müßte eine der beiden Zahlen

$$|\Theta(P^* + 0) - \Theta(P_\varkappa + 0)|\,, \qquad |\Theta(P^* - 0) - \Theta(P_\varkappa + 0)|$$

$\geqq 2\gamma$ sein, während nach Voraussetzung die Schwankung $\Theta(P)$ im Inneren eines Bogens T die Schranke γ nicht übertrifft. —

Nunmehr ergibt sich aber unsere Behauptung ohne weiteres. Denn liegen Γ_ν und Γ_μ in zwei benachbarten Bögen T', T'', die in einem Punkte U aneinanderstoßen, und ist N die Normale zur Hauptstütze in U bzw. für $U = A = B$ die innere Winkelhalbierende der Ecke bei A, so können die Bögen Γ_ν, Γ_μ N höchstens in U treffen. Dasselbe gilt daher auch für die Sehnen s_ν, s_μ. Daher liegen Γ_ν, s_ν auf der einen, Γ_μ, s_μ auf der anderen Seite von N und können nur den Punkt U gemeinsam haben. Liegen aber Γ_ν, Γ_μ in demselben Bogen T, so sei P einer der Teilpunkte, die Γ_ν und Γ_μ trennen. Wieder sei N die Normale zur Hauptstütze in P. Aus dem gleichen Grunde wie oben müssen aber Γ_ν, s_ν auf der einen, Γ_μ, s_μ auf der anderen Seite von N liegen und können höchstens den Punkt P gemeinsam haben. Damit ist unser Lemma bewiesen.

9. *Ein Spezialfall des Sehnenrichtungssatzes.*

Lemma 3. Ist A von B verschieden und die Schwankung von $\Theta(P)$ längs W kleiner als π, so ist $\Theta(A, B)$ in $S(W)$ enthalten.

Mit anderen Worten, W besitzt eine Tangente oder Stütze, deren analytische Richtung identisch ist mit der vermöge der Sehnenrichtungsfunktion festgelegten analytischen Richtung der gerichteten Strecke von A nach B. —

Zum Beweis der obigen Behauptung legen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde, dessen Ursprung in A liegt und dessen positive y-Achse das Richtungsbüschel $S(W)$ halbiert. Es sei die Richtung der positiven x-Achse als die Nullrichtung gewählt. Dann gibt es sicher eine positive Zahl d derart, daß für alle Punkte P auf W $\sin \Theta(P) \geqq d$ ist. Ist nun s die von A an gezählte Bogenlänge längs W, so ist in jedem Stetigkeitspunkt von $\Theta(P)$ als Funktion von s bekanntlich $\frac{dy}{ds} = \sin \Theta(P) \geqq d$. Daher muß wegen der Formeln (2) y eine längs W eigentlich monoton wachsende Funktion von s sein, so daß jeder von A verschiedene Punkt von W in der *oberen Halbebene* liegt. Also müssen alle Werte von $\Theta(A, P)$ dem Intervall $(0, \pi)$ angehören. Es sei nun P_0 einer der Punkte von W, dessen Distanz von der Geraden durch A und B maximal ist, und t sei die durch P_0 hindurchgehende, zur Geraden AB parallele Gerade, die von W sicher nicht durchsetzt wird. In die Gerade t muß eine Tangente oder Stütze von W im Punkte P_0 hineinfallen. Die betreffende Richtung liegt aber im Intervall $\langle 0, \pi \rangle$, und da sie daher von der Richtung von BA verschieden sein muß, muß sie mit der Richtung AB identisch sein, w.z.b.w.

10. *Formulierung des Umlaufsatzes.*

Es sei C eine einfache geschlossene rektifizierbare Kurve, längs deren sich die Tangentenrichtungsfunktion definieren läßt, wenn C von einem Punkte A aus durchlaufen wird. Offenbar hängt diese Eigenschaft von der Wahl des Punktes A nicht ab.

Man markiere auf C einen Punkt P_0, in dem die Tangente stetig ist, und lege einen Durchlaufungssinn längs C fest. Dann läßt sich C mit W identifizieren, indem sowohl der Anfangspunkt A als auch der Endpunkt B von W in P_0 gewählt wird. Legt man nun die Tangentenanfangsrichtung in A irgendwie fest, so ist nach Voraussetzung die Tangentenrichtungsfunktion $\Theta(P)$ im Punkte $B \equiv \Theta(A) \pmod{2\pi}$. Die Differenz $\Theta(B) - \Theta(A)$ hängt offenbar von der Festlegung von $\Theta(A)$ nicht ab.

Wir behaupten nun, daß $\Theta(B) - \Theta(A)$ auch von der Wahl des Punktes P_0 unabhängig ist. Denn es sei P_0' ein anderer Punkt von C, in dem die Tangente stetig ist. Die in der festgesetzten Umlaufsrichtung von P_0' bis P_0' durchlaufene Kurve C sei mit

W' bezeichnet; P'_0 bezeichnen wir mit A' oder B', je nachdem ob P'_0 als Anfangs- oder Endpunkt von W' betrachtet wird. Wir dürfen nun als die Tangentenanfangsrichtung in P'_0 den Wert $\Theta'(A') = \Theta(P'_0)$ wählen, womit die Tangentenrichtungsfunktion $\Theta'(P)$ von W' eindeutig festgelegt ist. Dann folgt

$$\Theta'(B) - \Theta'(P'_0) = \Theta(B) - \Theta(P'_0),$$

und daher $\Theta'(B) = \Theta'(P_0) = \Theta(B)$; ferner

$$\Theta'(B') - \Theta'(P_0) = \Theta(P'_0) - \Theta(A).$$

Setzen wir hier $\Theta(B)$ für $\Theta'(P_0)$ und $\Theta'(A')$ für $\Theta(P'_0)$ ein, so folgt

$$\Theta'(B') - \Theta'(A') = \Theta(B) - \Theta(A),$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Die Differenz $\Theta(B) - \Theta(A)$ ist offenbar ein ganzzahliges Vielfaches von 2π. Wir bezeichnen sie als den *gesamten Tangentenrichtungszuwachs beim Umlauf längs C.*

Es gilt nun der folgende

Satz 1. Beim vollen Umlauf längs einer einfachen geschlossenen rektifizierbaren Kurve C, längs deren sich die Tangentenrichtungsfunktion definieren läßt, ist der gesamte Tangentenrichtungszuwachs gleich $+2\pi$ *oder* -2π, *je nachdem der Umlaufssinn von C positiv oder negativ ist.*

Wir werden diesen Satz als den *Umlaufssatz* bezeichnen.

Wie aus den obigen Erläuterungen hervorgeht, darf beim Beweise des Umlaufssatzes vorausgesetzt werden, daß die beiden Tangenten in A geometrisch ineinanderfallen. Aus der Relation (9) des Lemmas 1 folgt ferner, daß man beim Beweise des Umlaufssatzes die Kurve C ohne Spitzen voraussetzen kann.

11. *Formulierung des Sehnenrichtungssatzes.*

Das Hauptresultat dieser Abhandlung besteht im folgenden Satz, den wir als den *Sehnenrichtungssatz* bezeichnen wollen.

Satz 2. Der Wertevorrat der Sehnenrichtungsfunktion von W ist im Tangentenrichtungsbüschel von W enthalten.

Zum Beweise genügt es zu zeigen, daß $\Theta(P, Q)$ im Tangentenrichtungsbüschel des zwischen P und Q liegenden Stückes von W enthalten ist. Nun ist aber das Tangentenrichtungsbüschel abgeschlossen. Andererseits ist

$$\Theta(A, B-0) = \Theta(A, B).$$

Daher genügt es, unsere Behauptung für alle auf P folgenden Punkte $Q \neq B$ zu beweisen. Da aber dabei die zwischen A und P bzw. Q und B liegenden Stücke von W weggelassen werden können, genügt es zu zeigen, daß $\Theta(A, B)$ im Tangentenrichtungsbüschel der Kurve W enthalten ist, *wobei W als offen ($A \neq B$) vorausgesetzt werden darf.*

Aus dem Lemma 1 folgt nunmehr, daß dabei der Weg W durch den Weg W^* mit den dort angegebenen Eigenschaften ersetzt werden kann, da ja $\Theta^*(A, B) = \Theta(A, B)$ und $S(W^*)$ in $S(W)$ enthalten ist. Daher darf beim Beweise des Satzes 2 vorausgesetzt werden, daß *W offen ist und keine Spitzen besitzt.*

Im Folgenden wird stets vorausgesetzt werden, daß W keine Spitzen besitzt und daß, wenn W geschlossen ist, auch im Punkte $A = B$ keine Spitze vorliegt — in der Tat haben wir gesehen, daß man sich beim Beweise der Sätze 1 und 2 auf diesen Fall beschränken kann.

12. *Einfluß des Übergangs zu Sehnen auf $\Theta(P)$ und $S(W)$.*

Es sei Γ ein Teilbogen von W, der nicht mit W identisch ist, sein Anfangspunkt sei A_1, sein Endpunkt B_1, die Verbindungsstrecke von A_1 mit B_1 sei mit s bezeichnet. Wir nehmen an, daß längs Γ die Schwankung von $\Theta(P)$ durchweg kleiner als π ist in dem Sinne, daß, wenn P und Q beliebige innere Punkte von Γ sind, die Differenzen

$$\Theta(P) - \Theta(Q), \quad \Theta(P) - \Theta(A_1 \pm 0), \quad \Theta(B_1 \pm 0) - \Theta(P)$$

absolut kleiner als π sind.

Nach dem Lemma 3, angewandt auf Γ, liegt nun $\Theta(A_1, B_1) = \Theta_1$ im Tangentenrichtungsbüschel, das zum Innern von Γ gehört. Daher paßt nach Voraussetzung Θ_1 sowohl zu $\Theta(A_1 \pm 0)$ als auch zu $\Theta(B_1 \pm 0)$.

Es seien nun insbesondere A_1 von A und B_1 von B verschieden, und s möge die Teilstücke AA_1 und B_1B von W in keinem von A_1 und B_1 verschiedenen Punkte treffen. Ersetzen wir dann Γ durch s, und weisen s die analytische Richtung Θ_1 zu, so besitzt für den so entstehenden Weg W_0 die Tangentenrichtungsfunktion — bei gleicher Normierung der analytischen Richtung der Anfangstangente — längs der Strecke s den konstanten Wert Θ_1, der in $S(W)$enthalten ist. Ferner hat $\Theta(A_1 - 0)$ ebenso wie $\Theta(B_1 + 0)$ auf W und W_0 die gleichen Werte. Allgemeiner bleibt die Tangentenrichtungsfunktion von W beim Übergang von

W zu W_0 unverändert längs der Teilstücke AA_1 und B_1B. *Daher ist dann sicher $S(W_0)$ in $S(W)$ enthalten.*

Ist aber $A = A_1$ und ist die Schwankung der Tangentenrichtungsfunktion längs Γ kleiner als eine positive Zahl $\varepsilon < \pi$, so möge s das Teilstück B_1B von W nur in B_1 treffen, wenn W offen ist, und nur in B_1 und B, wenn W geschlossen ist. Ersetzen wir dann wiederum den Bogen Γ in W durch s und weisen s als Tangentenanfangsrichtung Θ_1 zu, so besitzt für den so entstehenden Weg W_0 die Tangentenrichtungsfunktion längs des Teilstücks B_1B von W_0 die gleichen Werte wie die Tangentenrichtungsfunktion von W längs dieses Stückes. Und offenbar ist auch jetzt $S(W_0)$ in $S(W)$ enthalten.

Daraus folgt aber, daß man C beim Beweis des Umlaufssatzes als ein Polygon annehmen kann.

Denn wird $A = B$ auf C so gewählt, daß C dort eine Tangente besitzt, und teilt man C nach dem Lemma 2 mit Hilfe der Teilpunkte $P_0 = A$, $P_1, \ldots, P_{n-1}$, $P_n = B$, $n > 2$, ein, so daß die Behauptungen des Lemmas gelten, so kann man sämtliche Bögen $P_{\nu-1}P_\nu$, $1 \leqq \nu \leqq n-2$, durch die zugehörigen Sehnen ersetzen, wodurch sich der gesamte Tangentenrichtungszuwachs längs C nicht ändert. Daher darf auf jeden Fall vorausgesetzt werden, daß ein Stück von C geradlinig ist. Wählt man $A = B$ von vornherein im Innern eines solchen geradlinigen Stückes von C und die Einteilung des Lemmas 2 so, daß die Punkte P_1, P_{n-1} auf der gleichen ganz in C enthaltenen Strecke liegen wie $A = B$, so geht C, wenn P_1P_2, $P_2P_3, \ldots, P_{n-2}P_{n-1}$ durch die zugehörigen Sehnen ersetzt werden, in ein Polygon über, ohne daß der gesamte Tangentenrichtungszuwachs geändert wird.

13. *Einfluß des Übergangs zu Sehnen auf $\Theta(A, P)$.*

Wie ändert sich nun $\Theta(A, P)$ bei dem in 12 geschilderten Übergang von W zu W_0?

Es sei zunächst A von A_1 verschieden, und es möge A außerhalb der endlichen Bereiche liegen, die von Γ und s begrenzt werden. Wir zeigen dann, daß $\Theta(A, B_1)$ *für W und W_0 den gleichen Wert hat,* woraus dann insbesondere auch die Übereinstimmung von $\Theta(A, P)$ mit der Sehnenrichtungsfunktion $\Theta_0(A, P)$ von W_0 längs des ganzen Stückes B_1B folgt. Wir brauchen hierzu offenbar nur zu zeigen, daß die Ordnung von Γ in bezug auf A gleich der Ordnung von s in bezug auf A ist.

Nun zerlegt das beschränkte Kontinuum $\Gamma + s$ die Ebene in endlich oder unendlich viele Gebiete, unter denen aber, wegen der Beschränktheit des Randkontinuums, nur eines — wir bezeichnen es durch G — unbeschränkt ist, während alle andern beschränkt sein müssen. Nach Voraussetzung muß A zu G gehören, und daher läßt sich eine von A ausgehende, ins Unendliche verlaufende einfache Kurve L zeichnen, die weder Γ noch s trifft. Gehen wir nun von A_1 längs Γ zu B_1 und sodann von B_1 längs s zu A_1 zurück, so ist die Ordnung des entstehenden geschlossenen Weges C in Bezug auf alle hinreichend weit entfernten Punkte gleich Null. Da aber die Ordnung von C in Bezug auf einen Punkt von L *stetig* längs L variiert, muß dann auch die Ordnung von C in Bezug auf A verschwinden, woraus unsere Behauptung unmittelbar folgt.

Ist aber A mit A_1 identisch und wird der Anfangsstrecke s von W als Anfangsrichtung $\Theta(A, B_1)$ zugewiesen, so ist $\Theta(A, P)$ längs des Bogens B_1B für W und W_0 das Gleiche. Insbesondere *ändert sich* also $\Theta(A, B)$ *beim Übergang von* W *zu* W_0 *nicht.*

Aus dem in 12 und 13 Bewiesenen folgt nun: Ersetzt man W vermöge der Konstruktion von 8 durch ein Sehnenpolygon W^*, so hat $\Theta(A, B)$ für W^* den gleichen Wert wie für W, und $S(W^*)$ ist in $S(W)$ enthalten. Daher kann beim Beweis des Sehnenrichtungssatzes W von vornherein als ein einfacher offener *Streckenzug* vorausgesetzt werden.

14. *Beweis des Umlaufssatzes.*

Es genügt nach dem am Schlusse der Nr. 12 Gesagten, C als ein einfaches geschlossenes Polygon mit etwa n Seiten anzunehmen. Für ein solches ist aber die Behauptung eine elementargeometrische Tatsache. Denn sind die Beträge der (Innen-) Winkel von C etwa $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, so sind nach dem in Nr. 3 unter C* Gesagten die entsprechenden Zuwüchse der Tangentenrichtungsfunktion gleich $\pi-\beta_1, \pi-\beta_2, \ldots, \pi-\beta_n$, der gesamte Tangentenrichtungszuwachs daher gleich $n\pi - \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu$. Da aber die Summe der Innenwinkel von C bekanntlich gleich $(n-2)\pi$ ist, ergibt sich 2π beim positiven Umlauf um C als der Gesamtzuwachs der Tangentenrichtungsfunktion. Hieraus folgt aber offenbar weiter, daß beim negativen Umlauf um C der Tangentenrichtungszuwachs gleich -2π ist, womit der Umlaufssatz bewiesen ist.

15. *Ein Hilfssatz über die Sehnenreduktion.*

Aus dem Umlaufssatz folgt nun das

Lemma 4. *Es sei W offen ($A \neq B$), und es möge W durch zwei voneinander und von A verschiedene Punkte A_1, B_1, wo B_1 auf A_1 folgt, in drei Stücke $L_1\ (AA_1)$, $\Gamma\ (A_1B_1)$, $L_2\ (B_1B)$ zerlegt werden, wobei L_2 sich auf B reduzieren kann. Es seien A_1, B_1 keine Ecken von W. Die Verbindungsstrecke s von A_1 und B_1 möge mit den Tangenten an W in A_1 und B_1 Winkel einschließen, die $\not\equiv 0 \pmod{\pi}$ sind und mit Γ eine einfach geschlossene Kurve C bilden, derart, daß L_1 und L_2 weder mit dem Innern von C noch mit C Punkte gemeinsam haben, bis auf A_1 und B_1. Ersetzt man Γ in W durch s, so sei der so entstehende von A nach B zu durchlaufende Weg mit W^* bezeichnet, seine Tangenten- und Sehnenrichtungsfunktionen mit $\Theta^*(P)$ bzw. $\Theta^*(Q, P)$. Dann ist $S(W^*)$ in $S(W)$ enthalten, und es gilt $\Theta^*(A, B) = \Theta(A, B)$. Ist aber $B_1 \neq B$, so gilt*

$$\Theta^*(B_1 + 0) = \Theta(B_1), \qquad \Theta^*(A, B_1) = \Theta(A, B_1)$$

und daher für alle auf B_1 folgenden Punkte P

$$\Theta^*(P) = \Theta(P), \qquad \Theta^*(A, P) = \Theta(A, P).$$

Zum Beweis bemerken wir zuerst, daß die unmittelbar bei A_1 und B_1 liegenden Stücke von Γ auf derjenigen Seite von s liegen müßen, die an das Innere von C grenzt. Denn wäre dies etwa bei A_1 anders, so müßte sich eine Konfiguration ergeben, wie sie schematisch in der Figur 6 (S. [11] 36) dargestellt ist. Man sieht aber hier, daß das bei A_1 liegende Anfangsstück von L_1 vom Innern von C durch Γ nicht getrennt wird und daher im Innern von C liegen müßte, entgegen der Voraussetzung.

Daher werden die Verhältnisse durch die Figur 7 schematisch richtig wiedergegeben, wobei es aus Symmetriegründen unwesentlich ist, daß C auf der *oberen* Seite von s liegt und B_1 nach *rechts* von A_1. Es mögen die beim Durchlaufen von W sich für die Tangenten in den Punkten A_1 und B_1 ergebenden Winkel mit α und β bezeichnet werden. Durchläuft man W^*, so ergibt sich nach unseren Festsetzungen für s der Winkel t, $\alpha > t > \alpha - \pi$,

$$\alpha - \pi > t - \pi > \alpha - 2\pi. \tag{11}$$

Wir betrachten nun den Umlauf längs C, und zwar längs Γ von A_1 nach B_1 und sodann längs s von B_1 nach A_1. Von der Tangentenrichtung α in A_1 gelangen wir so zur Tangentenrichtung β in B_1. Für die Richtung von B_1 nach A_1 längs s ergibt sich sodann eine analytische Richtung $\tau \equiv t - \pi \pmod{2\pi}$ mit $\beta > \tau > \beta - \pi$, von der aus wir zur Tangente an Γ im Punkte A_1 mit der Richtung $\alpha - 2\pi$ gelangen, so daß $\alpha - \pi > \tau > \alpha - 2\pi$ folgt. Hieraus folgt wegen $\tau \equiv t - \pi \pmod{2\pi}$ durch Vergleich mit (11), daß

$$\tau = t - \pi, \quad \beta > t - \pi > \beta - \pi, \quad \beta + \pi > t > \beta$$

ist. Daher paßt t zu β und liegt zwischen α und β, also sicher im Tangentenrichtungsbüschel von W.

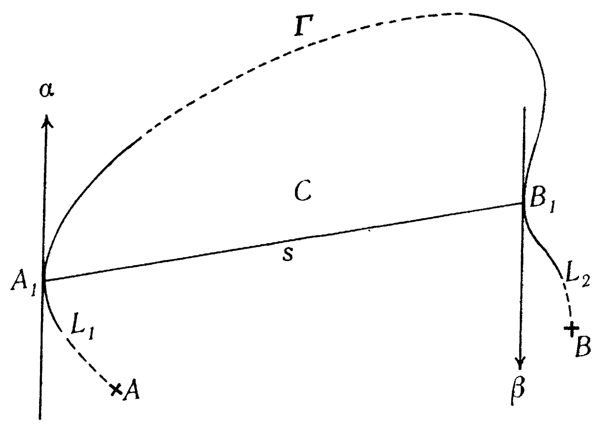

Fig. 7.

Ist nun B von B_1 verschieden, so ergibt sich für die Tangente an L_2 in B_1 die gleiche Richtung β beim Durchlaufen von W^* wie beim Durchlaufen von W. Daraus folgt, daß die Tangentenrichtungsfunktionen von W und W^* längs L_2 übereinstimmen müssen.

Daß endlich der Zuwachs der Sehnenrichtungsfunktion von A_1 nach B_1 für W und W^* der gleiche ist, ist unmittelbar klar, da der fragliche Zuwachs gleich der Ordnung von Γ bzw. s in Bezug auf A ist und diese Ordnungen nach dem am Schlusse von Nr. 6 Gesagten einander gleich sein müssen, da Γ und s zusammen eine Jordankurve begrenzen, außerhalb deren A liegt.

16. *Beweis des Sehnenrichtungssatzes.*

W darf von vornherein als ein einfacher Streckenzug angenommen werden. Ferner darf vorausgesetzt werden, daß die letzte, in B endende Strecke σ von W nicht in die Verlängerungsgerade der Strecke AB fällt, da wir sonst nur B durch den Anfangspunkt von σ zu ersetzen brauchen. Liegt nun $\Theta(A, B)$ außerhalb von $S(W)$, so gilt dasselbe für alle hinreichend nahe bei B liegenden

Punkte von σ, da $S(W)$ abgeschlossen ist. Wir können daher annehmen, daß die Gerade AB keinen Eckpunkt des Streckenzuges W trifft, bis auf die Endpunkte A und B, und daß der Winkel zwischen der Anfangstangente an W in A mit der Geraden $AB \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ ist, da wir sonst nur B durch einen geeigneten, hinreichend benachbarten Punkt auf σ zu ersetzen brauchen. Wir dürfen ferner annehmen, daß A mit dem Nullpunkt zusammenfällt, und B auf der reellen Achse liegt.

Es seien P, P_1 zwei von A, B verschiedene, *auf* W unmittelbar aufeinander folgende Schnittpunkte von W mit der reellen Achse, die auf der *gleichen* Seite vom Nullpunkt liegen. Folgen sie auf der reellen Achse nicht unmittelbar aufeinander, so dringt W in das zwischen dem Stück PP_1 von W und der Strecke PP_1 der reellen Achse eingeschlossene Gebiet ein und muß sodann dieses Gebiet verlassen, so daß innerhalb der Strecke PP_1 ein weiteres Paar von auf W unmittelbar aufeinander folgenden Schnittpunkten mit der reellen Achse liegen muß. Und da es nur endlich viele solche Schnittpunkte gibt, können wir von vornherein annehmen, daß P, P_1 auch auf der reellen Achse unmittelbar aufeinander folgen. Dann liegen zwei Punkte Q, Q_1, von denen Q auf W unmittelbar *vor* P, Q_1 auf W unmittelbar *nach* P_1 angenommen wird, sicher entweder beide oberhalb oder beide unterhalb der reellen Achse, und sie können ferner so nahe bei P bzw. P_1 angenommen werden, daß die Strecke QQ_1 keinen von Q und Q_1 verschiedenen Punkt von W trifft. Ersetzen wir das zwischen Q und Q_1 liegende Stück von W durch die Strecke QQ_1, so hat der neue so entstehende Streckenzug nach dem Lemma 4 das gleiche $\Theta(A, B)$, und sein Tangentenrichtungsbüschel ist in $S(W)$ enthalten. Indem wir die gleiche Überlegung wiederholt anwenden, gelangen wir schließlich zu einem Streckenzug mit der Eigenschaft, daß zwei auf diesem Streckenzug unmittelbar aufeinander folgende, von A und B verschiedene Schnittpunkte mit der reellen Achse auf verschiedenen Seiten vom Nullpunkt liegen.

Liegt dann der letzte *vor* B auf W liegende Schnittpunkt P von W mit der reellen Achse auf der gleichen Seite vom Nullpunkt wie B, so liegt zwischen P und B auf der reellen Achse kein weiterer Schnittpunkt mit W. Daher dürfen wir nach dem Lemma 4 das ganze zwischen P und B enthaltene Stück von W durch die Strecke PB und sodann den Punkt B durch P ersetzen. So erreichen wir, daß der vor B auf W liegende Schnittpunkt mit der reellen Achse von B durch den Nullpunkt getrennt wird.

Wir dürfen daher von vornherein annehmen, daß, wenn man vom

Nullpunkt aus *längs* W die aufeinanderfolgenden Schnittpunkte $A = P_0 = 0$, P_1, P_2, ..., $P_n = B$ mit der reellen Achse verfolgt, sie abwechselnd rechts und links vom Nullpunkt liegen.

Das zwischen P_ν und $P_{\nu+1}$ liegende Stück von W sei mit U_ν bezeichnet ($\nu = 0, 1, \ldots, n-1$). Wir dürfen nun von vornherein annehmen, daß P_1 links vom Nullpunkt liegt und U_0 oberhalb der reellen Achse verläuft, da man sonst nur die ganze Figur an der imaginären oder reellen Achse zu spiegeln hätte. Zugleich kann man die Anfangsrichtung Θ_0 von W in A so normieren, daß sie im Intervall $(0, \pi)$ liegt. Es sei nun d eine positive Zahl, die kleiner ist als die Abstände von der reellen Achse aller die reelle Achse nicht treffenden Teilstrecken von W. Man zeichne eine parallel zur reellen Achse im Abstand $\frac{d}{2^{n-\nu}}$ auf der gleichen Seite wie U_ν verlaufende Sekante s_ν von U_ν. Nach dem Lemma 4 kann nun

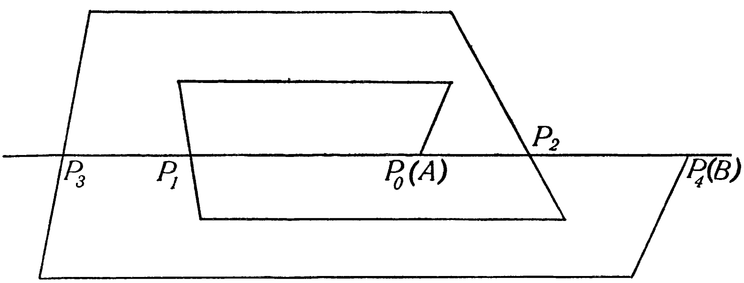

Fig. 8.

sukzessive für $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$ das von s_ν abgetrennte Stück von U_ν durch s_ν ersetzt werden, so daß dann U_ν nur aus zwei die reelle Achse treffenden und einer zur reellen Achse parallelen Strecke besteht. Dann wird aber der Verlauf von W durch die beistehende Figur 8 richtig wiedergegeben. Insbesondere folgt, daß die Tangentenrichtungsfunktion längs W monoton (sprungweise) wächst und längs jedes U_ν einen Gesamtzuwachs $< 2\pi$ erfährt. Ein Blick auf die Figur 8 zeigt nun, daß

$$\pi < \Theta(P_1) < 2\pi < \Theta(P_2) < 3\pi < \ldots <$$
$$< \Theta(P_{n-1}) < n\pi < \Theta(P_n) = \Theta(B) < (n+1)\pi$$

ist. Andererseits folgt unmittelbar

$$\Theta(A, P_1) = \pi, \quad \Theta(A, P_2) = 2\pi, \quad \ldots, \quad \Theta(A, P_n) = \Theta(A, B) = n\pi,$$

so daß $\Theta(A, B)$ im Intervall zwischen $\Theta(P_{n-1})$ und $\Theta(P_n)$ liegt, womit der Sehnenrichtungssatz bewiesen ist.

(Eingegangen den 21. September 1933.)

NACHTRAG. (Eingegangen den 12. Januar 1934.)

Während der Korrektur der vorliegenden Abhandlung bin ich durch einen freundlichen Hinweis von Herrn H. Hopf auf eine Arbeit von G. N. Watson [Proceedings London M. S. (2) **15** (1916), 227—242], A Problem of Analysis Situs, aufmerksam geworden, die der Aufstellung und dem Beweis des Umlaufssatzes für den Fall von durchweg stetiger Tangente gewidmet ist. Danach geht — bis auf weiteres — der erste ausführlich bewiesene Fall des Umlaufssatzes auf Herrn G. N. Watson zurück.