COMPOSITIO MATHEMATICA

F. DE KOK

Über die Randwerte beschränkter harmonischer Funktionen

Compositio Mathematica, tome 2 (1935), p. 402-405
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__402_0>

Über die Randwerte beschränkter harmonischer Funktionen

von

F. de Kok

Utrecht

Es sei die Funktion $u(z) = u(x+iy)$ für $y > 0$ harmonisch und beschränkt. Dann gilt bekanntlich für jedes z mit $y > 0$ die Poissonsche Integraldarstellung:

$$(1) \qquad u(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2}\,dt,$$

wo $\lambda(t)$ eine beschränkte und meßbare Funktion ist.

Wir wissen, daß auf dem vollen Maß, wo $\lambda(t)$ approximativ stetig ist, gilt

$$u(z) \rightarrow \lambda(t)$$

für $z \rightarrow t$, $y > 0$ und $\left|\frac{x-t}{y}\right| < a < \infty$, a fest.

Umgekehrt wird durch das Integral in (1) eine beschränkte harmonische Funktion dargestellt in der Halbebene $D(y > 0)$, wenn $\lambda(t)$ beschränkt und meßbar ist.

Im Folgenden werden wir jetzt einen Satz beweisen, der eine hinreichende Bedingung gibt, damit ein Randwert existiert bei einer bestimmten tangentiellen Annäherung.

Definition. Ist $f(t)$ meßbar für $a \leqq t \leqq b$, $a < b$, und $\psi(t)$ stetig für $0 \leqq t \leqq 1$, $\psi(t) > 0$ für $0 < t \leqq 1$, $\psi(0) = 0$, dann heißt die Funktion $f(t)$ rechts approximativ stetig in Bezug auf ψ für $t = t_0$, $(a \leqq t_0 < b)$ wenn bei jedem $\varepsilon > 0$ gilt

$$\frac{\mu E_t\{|f(t)-f(t_0)| > \varepsilon,\ 0 < t-t_0 < h\}}{\psi(h)} \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0.$$

Im Zähler steht das Maß der Punktmenge, wo

$$|f(t)-f(t_0)| > \varepsilon, \qquad 0 < t-t_0 < h.$$

Satz. Es sei $\psi(t) > 0$ *für* $0 < t \leqq 1$, $\psi(0) = 0$, $|\psi'(t)| < M$ *für* $0 \leqq t \leqq 1$, $\psi'(0) = 0$ *(M endlich und unabhängig von t).*

Wenn nun in (1) $\lambda(t)$ *rechts approximativ stetig ist in Bezug auf* ψ *für* $t = t_0$, *dann hat* $u(z)$ *den Randwert* $\lambda(t_0)$ *für* $z \to t_0$ *auf dem Bogen* $y = \psi(x - t_0)$, $x > t_0$.

Zum Beweis ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit, $t_0 = 0$ und $\lambda(0) = 0$ anzunehmen.

Ist $\varepsilon > 0$, so sei δ, $0 < \delta < 1$, derart gewählt, daß

$$\mu E_t\{|\lambda(t)| > \varepsilon,\ 0 < t < h\} < \varepsilon \psi(h)$$

für $0 < h \leqq \delta$.

Nun ist

$$\pi u(z) = y \int\limits_{|t| > \delta} \frac{\lambda(t)}{(t-x)^2 + y^2}\, dt + y \int_{-\delta}^{0} + y \int_{0}^{\delta} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Wenn $|\lambda(t)| < K$ für $-\infty < t < \infty$ und $0 < x < \frac{\delta}{2}$, dann ist

$$|I_1| \leqq y \int_{\delta}^{\infty} \frac{K}{\left(t - \frac{\delta}{2}\right)^2}\, dt + y \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{K}{t^2}\, dt \to 0 \quad \text{für } y \to 0.$$

Ferner ist

$$|I_2| \leqq y \int_{-\delta}^{0} \frac{K}{(t-x)^2 + y^2}\, dt = K \left\{ \operatorname{arc\,tg} \frac{\delta + x}{y} - \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} \right\} \to 0$$

für $x \to 0$, $x > 0$ und $y = \psi(x)$, wegen $\frac{x}{\psi(x)} \to +\infty$ bei $x \to 0$.

Wenn E_1 die Punktmenge ist, wo $|\lambda(t)| \leqq \varepsilon$, $0 < t < \delta$, und E_2 die Komplementärmenge von E_1 auf dem Intervall $(0, \delta)$, dann ist

$$I_3 = y \int_{E_1} + y \int_{E_2} = I_4 + I_5.$$

$$|I_4| \leqq \varepsilon y \int_{0}^{\delta} \frac{dt}{(t-x)^2 + y^2} \leqq \varepsilon \pi \qquad \text{für } y > 0.$$

Wenn $\mu(t)$ das Maß von E_2 auf $(0, t)$ bedeutet, dann bekommt man

$$|I_5| \leqq K y \int_{E_2} \frac{dt}{(t-x)^2 + y^2} \leqq K y \int_{0}^{\delta} \frac{1}{(t-x)^2 + y^2} \frac{d\mu(t)}{dt}\, dt$$

$$= K y \frac{\mu(\delta)}{(\delta - x)^2 + y^2} + K y \int_{0}^{\delta} \mu(t) \frac{2(t-x)}{\{(t-x)^2 + y^2\}^2}\, dt.$$

Das erste Glied strebt gegen Null für $y \to 0$, $0 < x < \frac{\delta}{2}$.

Das letzte Integral zerlegen wir in zwei Bestandteile: von 0 bis x und von x bis δ $(0 < x < \delta)$.

$$\left| Ky \int_0^x \mu(t) \frac{2(t-x)}{\{(t-x)^2+y^2\}^2} dt \right| \leqq K\varepsilon y \int_0^x \frac{\psi(t)\cdot 2(x-t)}{\{(x-t)^2+y^2\}^2} dt$$

$$= K\varepsilon y \int_0^x \psi(t) d\frac{1}{(x-t)^2+y^2} =$$

$$= K\varepsilon y \frac{\psi(x)}{y^2} - K\varepsilon y \int_0^x \frac{\psi'(t)}{(x-t)^2+y^2} dt \leqq K\varepsilon + K\cdot M\cdot\varepsilon\cdot\frac{\pi}{2}$$

für $y = \psi(x)$.

$$0 \leqq Ky \int_x^\delta \mu(t) \frac{2(t-x)}{\{(t-x)^2+y^2\}^2} dt \leqq$$

$$\leqq K\varepsilon y \int_x^\delta \frac{\psi(t)\cdot 2(t-x)}{\{(t-x)^2+y^2\}^2} dt = -K\varepsilon y \int_x^\delta \psi(t) d\frac{1}{(t-x)^2+y^2}$$

$$= K\varepsilon y \left\{ \frac{\psi(x)}{y^2} - \frac{\psi(\delta)}{(\delta-x)^2+y^2} \right\} +$$

$$+ K\varepsilon y \int_x^\delta \frac{\psi'(t)}{(t-x)^2+y^2} dt \leqq K\varepsilon + K\cdot M\cdot\varepsilon\cdot\frac{\pi}{2}$$

für $y = \psi(x)$.

Wir finden also, daß für $0 < x < \frac{\delta}{2}$, $y = \psi(x)$

$$|u(z)| \leqq C\varepsilon + o(1),$$

C eine positive endliche Konstante, woraus die Behauptung folgt.

Beispiel. Wir definieren die Funktion $\lambda(t)$ folgendermaßen:

$\lambda(t) = 1$ für $\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{sk}} \leqq t \leqq \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots, s \geqq 2$, s fest.

$\lambda(t) = 0$ in allen übrigen Punkten.

Es sei $\varepsilon > 0$ und $\frac{1}{2^{\nu+1}} < h \leqq \frac{1}{2^\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$

Dann ist

$$\frac{\mu E_t\{|\lambda(t)| > \varepsilon,\ 0 < t < h\}}{h^s} < \frac{\sum\limits_{k=\nu}^{\infty} \frac{1}{2^{sk}}}{\frac{1}{2^{s(\nu+1)}}} = \frac{2^{2s}}{2^s - 1}.$$

Also gilt bei jedem $\varepsilon > 0$

$$\frac{\mu E_t\{|\lambda(t)| > \varepsilon,\ 0 < t < h\}}{h^p} \to 0 \text{ für } h \to 0,\ p < s,\ p \text{ fest.}$$

Folglich strebt $u(z)$ gegen Null, wenn z gegen Null strebt auf dem Bogen $y = x^p$, $x > 0$, $1 < p < s$, p fest.

Wir wollen jetzt zeigen, daß $u(z)$ nicht gegen Null strebt auf dem Bogen $y = x^p$, $x > 0$, $p \geqq s$, p fest.

$$\pi u(z) = y \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} \frac{dt}{(t-x)^2 + y^2}, \quad a_k = \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{sk}}, \quad b_k = \frac{1}{2^k}.$$

Also:

$$\pi u(z) > y \int_{a_m}^{b_m} \frac{dt}{(t-x)^2 + y^2}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

oder

$$\pi u(z) > \operatorname{arc\,tg} \frac{b_m - x}{y} - \operatorname{arc\,tg} \frac{a_m - x}{y}.$$

Hieraus folgt für $x = \frac{a_m + b_m}{2}$, $y = x^p$, $p \geqq s$,

$$\pi u(z) > \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{1}{2}(b_m - a_m)}{\{\frac{1}{2}(b_m + a_m)\}^p} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{1}{2}(a_m - b_m)}{\{\frac{1}{2}(a_m + b_m)\}^p} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} \frac{b_m - a_m}{\left(\frac{a_m + b_m}{2}\right)^p}$$

$$\geqq 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{2^{s-1}}{\left\{2 - \frac{1}{2^{m(s-1)}}\right\}^s} > \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2}$$

von einem gewissen m an.

(Eingegangen den 7. Februar 1934.)